多重格子アルゴリズムを用いた圧縮性粘性流体の数値解析* (Implicit MacCormack 法の改良への一提案)

田中久史**, 金井恵理也***
棚橋隆彦†, 小笠原健治††

A Numerical Method for Compressible Viscous Flow with a Multi Grid Algorithm

Hisashi TANAKA, Eriya KANAI,
Takahiko TANAHASHI, and Kenji OGASAWARA

In the calculation of a compressible viscous supersonic unsteady flow, the stability of the solution and the consumption of the CPU time are major important problems. In the present paper, a new scheme is obtained which includes the Multi Grid algorithm by using the concept of Rusanov's artificial damping. In order to prove the effectiveness of this scheme, the shock wave-boundary layer interaction flow is considered, and the following conclusions are obtained.

(1) For the computation time, this method has proved to be about three times faster than Implicit MacCormack Method, which can calculate only steady flows, and more than tens times faster than another scheme which can calculate unsteady flows. (2) Characteristics of the shock wave-boundary layer interaction flow can be simulated well, and the numerical results agree well with the experimental results by Hakkinen. (3) This Multi Grid algorithm can be used for other time marching algorithms.

Key Words: Numerical Analysis, Compressible Viscous Flow, Unsteady Flow, Implicit MacCormack Method, Multi Grid Algorithm

1. 緒 言

空気を対象としたいわゆる空気力学の数値シミュレーションは、汎用大形コンピュータ、あるいはスーパーコンピュータの出現により、近年飛躍的な発展を遂げている。すでに、2 step Lax-Wendroff 法を始めとするいくつかの手法により、非粘性圧縮流体としての解析が多数行われ、亜音速流ばかりでなく、遷音速流における流れ場をも、かなり正確に得ることが可能となっている⁽¹⁾。

そして現在では、圧縮性粘性流体としての数値シミュレーションとして、Beam-Warming 法⁽²⁾をもとにした数々の研究が始められてはいるが、さらに、より高いレイノルズ数の流れや、その他複雑な条件のもとでの解析を行うには、いまだ計算スピードが不十分である。

現在最も有効であるといわれているスキームの一つに、差分陰解法である Implicit MacCormack 法⁽³⁾が

ある。これは、高速解法の一つである Saul'yev の陽的時間前進の概念を内抱する、極めて高速なスキームである。

しかし、より高精度の値を得るためには、それだけ多くの格子点を必要とする。また、複雑な条件下での流れの解析を行う場合にも、高密度のメッシュが必要となる。ところが、このメッシュ密度は、時間進行幅と密接な関係にある。すなわち、メッシュ幅と時間進行幅は比例関係にあり、メッシュ密度が高ければ、それだけ時間進行幅を小さくしなければならない。時間進行幅が小さければ、それだけ求めるべき時点まで時間進行するまでに必要となる計算量は増大する。

さらに、メッシュ幅は、誤差成分の消失にも大きな影響を及ぼす。時間進行法において、メッシュ幅より波長の長い誤差成分は容易に消失しないため、細かいメッシュでは、解の収束は遅くなる。

したがって、細かいメッシュ系でも、時間進行幅を比較的大きく取ることができ、さらに誤差波長を効果的に抑えることができるようなアルゴリズムの開発が必要となる。

これらの問題を効果的に回避できる解決策の一つに、多重格子アルゴリズムがある。これは、粗いメッシュ系で時間進行幅を大きくとるとともに誤差を効果的

* 昭和61年11月24日 関西支部第246回講演会において講演、原稿受付 昭和61年6月25日。

** 学生員、慶応義塾大学大学院 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。

*** 正員、慶応義塾大学大学院。

† 正員、慶応義塾大学理工学部。

†† 日本アイビーエム (〒106 東京都港区六本木3-2-12)。

に減少させ、さらに細かいメッシュ系で計算精度を上げる、という手法である。

しかし、この多重格子アルゴリズムは境界値問題については数多く用いられているが、時間進行法への応用についてはあまり例を見ない。さらに、従来の多重格子アルゴリズムはメッシュ幅と誤差振動の関係のみに着目したものである。

そこで本報では、Implicit MacCormack 法に独自の多重格子アルゴリズムを導入することで、Rusanov の人工拡散の概念をも内包する、新しいスキームを提案し、衝撃波-境界層干渉問題を非定常問題として解析することにより、本スキームの有効性を示す。

主 な 記 号

$[A], [B]$: Jacobian

a_v : 陰的人工粘性係数

α : 陰的混合パラメータ

c : 音速

e : 単位質量当たりの全エネルギー

ε : 単位体積当たりの内部エネルギー

F, G, U : 流れのフラックスベクトル

γ : 比熱比

k : 熱伝導率

$[\Lambda_A]$: $[A]$ の固有値対角行列

$[\tilde{\Lambda}_A]$: $[\Lambda_A]$ に α を乗じたもの

$[\Lambda_B]$: $[B]$ の固有値対角行列

$[\tilde{\Lambda}_B]$: $[\Lambda_B]$ に α を乗じたもの

λ : 安定性パラメータ

λ_v : 第二粘性係数

M : マッハ数

μ : 粘性係数

ν : 動粘性係数

p : 圧力

P_r : プラントル数

R : 気体定数

Re : レイノルズ数

ρ : 密度

σ_i : 垂直応力成分

T : 絶対温度

t : 時間

τ_{ij} : せん断応力成分

u, v : 流速の x および y 方向成分

ϕ : 任意の変数

2. 数 値 解 析

2.1 支配方程式 圧縮性粘性流体の運動方程式

は、熱源および外力を無視すると、次式のような保存形の Navier-Stokes 方程式で与えられる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

ここで各ベクトルは以下のように与えられる。

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 - \sigma_x \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (e - \sigma_x)u - \tau_{yx}v - k(\partial T / \partial x) \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{yx} \\ \rho v^2 - \sigma_y \\ (e - \sigma_y)v - \tau_{xy}u - k(\partial T / \partial y) \end{bmatrix}$$

また、垂直応力成分およびせん断応力成分は以下のよう

$$\sigma_x = -p + \lambda_v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_y = -p + \lambda_v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

さらに、

・気体の状態方程式

$$p = \rho RT \quad (2)$$

・全エネルギーおよび内部エネルギー

$$e = \rho \{ \varepsilon + (u^2 + v^2) / 2 \} \quad (3)$$

$$\varepsilon = (\gamma - 1) / \gamma \cdot RT \quad (4)$$

・Stokes の式

$$\lambda_v = -2/3 \cdot \mu \quad (5)$$

・Sutherland の式

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \left(\frac{T_0 + S_1}{T + S_1} \right) \quad (6)$$

ただし、

$$S_1 = 110 \text{ K}, T_0 = 273 \text{ K},$$

$$\mu_0 = 1.73 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

・熱伝導率

$$k = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{\mu}{P_r} \quad (7)$$

を補足式として用いる。

以上で本方程式系は閉じたものとなる。

2.2 Implicit MacCormack 法 高速なスキームの開発と、コンピュータの演算速度の飛躍的な向上によって、より複雑な問題の解析が可能になってくる

につれ、スキーム開発の主眼は、従来の「限られた要素数でどれだけ現実的な解を得るか」から「現実的な解を、より細かい要素でどれだけ安定かつ高速に得るか」に変わってきた。

従来の 2 step Lax-Wendroff 法に代表されるような陽解法では CFL 条件により厳しく拘束されるために、メッシュを細かくすると、時間ステップを小さく取らなければならない。これはそのまま計算時間の増大につながり、複雑な条件での解析、すなわち高密度のメッシュを必要とする解析においては大きな問題となる。

そこで、そのような弱点を持たない手法として、陰解法が考えられる。これは、新時刻における解を、旧時刻における値のみでなく、新時刻の値をも含んだ連立方程式（行列式）を解くことによって導くという手法であるが、陽解法に比べて、安定条件において格段に優れる。完全な陰解法であれば、そのスキームは無条件で安定となり、時間進行幅はメッシュ幅による拘束を受けない。

したがって、時間進行幅は、解の精度のみから制限されるため、通常 CFL 条件の数倍から数十倍の大きさが可能となっている。

そのような陰解法の一つに、Implicit MacCormack 法がある。これは陽解法である MacCormack 法⁽⁴⁾の陰解法版であり、次のような特長を持つ。

- (1) 空間および時間について二次の精度を持つ。
- (2) Beam-Warming 法同様、alternative direction sequence のアルゴリズムを持つ。
- (3) 予測子・修正子の二段階演算を踏襲しているために、反転する行列は片側二重対角行列となり、Saul'yev の陽的時間前進の概念が導入されている。
- (4) 陽的安定条件を満たす領域では陰的計算を行わない。

特に(3)、(4)により、他のスキームに比べて格段に高速となっている。

そこで、本報ではこの Implicit MacCormack 法を用いることにする。

Navier-Stokes 方程式をヤコビアンを用いて表すと次のようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -[A] \frac{\partial U}{\partial x} - [B] \frac{\partial U}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 $[A] = \partial F / \partial U$, $[B] = \partial G / \partial U$

これを時間分割を導入して、Implicit MacCormack 法で離散化すると次のようになる。

・予測子

$$\begin{cases} \Delta U_{ij}^n = -\Delta t \left(\frac{\Delta F_{ij}^n}{\Delta x} + \frac{\Delta G_{ij}^n}{\Delta y} \right) \\ ([I] - \Delta t \frac{\Delta [\tilde{A}]}{\Delta x}) \delta U_x^{n+1} = \Delta U_{ij}^n \\ ([I] - \Delta t \frac{\Delta [\tilde{B}]}{\Delta y}) \delta U_y^{n+1} = \delta U_x^{n+1} \\ U_{ij}^{n+1} = U_{ij}^n + \delta U_{ij}^{n+1} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (9 \cdot a)$$

・修正子

$$\begin{cases} \Delta U_{ij}^{n+1} = -\Delta t \left(\frac{\Delta F_{ij}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\Delta G_{ij}^{n+1}}{\Delta y} \right) \\ ([I] + \Delta t \frac{\Delta [\tilde{A}]}{\Delta x}) \delta U_x^{n+1} = \Delta U_{ij}^{n+1} \\ ([I] + \Delta t \frac{\Delta [\tilde{B}]}{\Delta y}) \delta U_y^{n+1} = \delta U_x^{n+1} \\ U_{ij}^{n+1} = 1/2 \cdot (U_{ij}^n + U_{ij}^{n+1} + \delta U_{ij}^{n+1}) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (9 \cdot b)$$

ただし、

$$[\tilde{A}] = \alpha[A], [\tilde{B}] = \alpha[B]$$

$$\Delta_{\pm} U / \Delta x = (\pm U_{i \pm 1, j} - U_{i, j}) / \Delta x$$

また、Navier-Stokes 方程式における各ヤコビアンは以下のように表される。

$$[\tilde{A}] = [S_x]^{-1} [\tilde{A}_x] [S_x] \quad \dots\dots\dots (10 \cdot a)$$

$$[\tilde{B}] = [S_y]^{-1} [\tilde{A}_y] [S_y] \quad \dots\dots\dots (10 \cdot b)$$

$$[\tilde{A}_x] = \begin{bmatrix} \lambda_{A1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{A2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{A3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{A4} \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{A}_y] = \begin{bmatrix} \lambda_{B1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{B2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{B3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{B4} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{A1} = \max \left(|u| + \frac{2\gamma}{\rho \Delta x} - \frac{\Delta x}{2\Delta t}, 0 \right)$$

$$\lambda_{A2} = \max \left(|u + c| + \frac{2\gamma}{\rho \Delta x} - \frac{\Delta x}{2\Delta t}, 0 \right)$$

$$\lambda_{A3} = \lambda_{A1}$$

$$\lambda_{A4} = \max \left(|u - c| + \frac{2\gamma}{\rho \Delta x} - \frac{\Delta x}{2\Delta t}, 0 \right)$$

$$\lambda_{B1} = \max \left(|v| + \frac{2\gamma}{\rho \Delta y} - \frac{\Delta y}{2\Delta t}, 0 \right)$$

$$\lambda_{B2} = \lambda_{B1}$$

$$\lambda_{B3} = \max \left(|v + c| + \frac{2\gamma}{\rho \Delta y} - \frac{\Delta y}{2\Delta t}, 0 \right)$$

$$\lambda_{B4} = \max \left(|v - c| + \frac{2\gamma}{\rho \Delta y} - \frac{\Delta y}{2\Delta t}, 0 \right)$$

$$\nu = \max(4/3 \cdot \mu, k)$$

$$[S_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & \rho c & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\rho c & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ a\beta & -u\beta & -v\beta & \beta \end{bmatrix}$$

$$[S_y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho c & 1 \\ 0 & 0 & -\rho c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ a\beta & -u\beta & -v\beta & \beta \end{bmatrix}$$

ただし, $a=1/2 \cdot (u^2+v^2)$, $\beta=\gamma-1$

2.3 多重格子アルゴリズム ある問題を解析する際に, 複数の密度の異なるメッシュ系を用いるような手法を, 広い意味で多重格子アルゴリズムという⁽⁵⁾.

図1に示すような, 領域 Ω の解析に, 細かいメッシュと粗いメッシュを交互に適用しながら計算を進めていくようなアルゴリズムはその一例である.

数値解析を行う場合, 計算精度を上げようとするメッシュを細かくとらねばならない. ところが, 数値計算には近似誤差がつきものである. 計算を進めると誤差振動が発生し, 計算の進行とともに振動が減衰していく. この現象を smoothing というが, この誤差振動が早く消失すれば, それだけ解は早く収束する.

ところが, この誤差振動の減衰の速度は, メッシュ密度の大小に深く関与している.

格子幅に対して波長が相対的に短いものは早く減衰し, 逆に長波長成分はなかなか減衰しない. そのため, メッシュが細かいと, 誤差振動は消滅しづらいものとなり, 解の収束は遅くなる.

このメッシュ密度と誤差振動の關係に着目して生まれたのが多重格子アルゴリズムである. 粗いメッシュ

図1 計算領域とメッシュ

系で誤差を効果的に消滅させ, さらに細かいメッシュ系で解の精度を上げることで, 解をより高速に, かつ精度よく得ることができる.

2.4 時間進行法への応用 多重格子アルゴリズムを用いる際には, 異なるメッシュ間での各変数の受け渡しという操作が必要となる. そのうち, 粗いメッシュから細かいメッシュへの受け渡しを prolongation, 逆を restriction, 総称して correction という.

従来, 多重格子アルゴリズムは, 境界値問題の反復計算において非常に効果的に使われてきたが, いずれも前述の smoothing による効果が中心的な役割を果たしており, correction がもたらす効果については, なんら考慮されていなかった. そのため, prolongation は距離の重みづけを, また, correction は差分化における重みづけをそのまま用いているにすぎない.

本報では, 時間進行法に多重格子アルゴリズムを応用するにあたり, 特に restriction に着目し, それ自体に積極的にスキームの安定をもたらし作用を持たすことで, より効果的な, アルゴリズムを提案する.

まず, 図2に示すようなメッシュ間の restriction について考えてみる.

最も簡単な例としては, 線形一次補間が考えられる, 粗いメッシュ系での値を添字 I で表すと, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \phi_i &= (\phi_{i+1} + 2\phi_i + \phi_{i-1})/4 \\ &= \phi_i + (\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1})/4 \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

この式に示されるように, restriction 操作は元の値 ϕ_i に拡散項を付加した形で表され, 陰的な人工粘性を導入した形になる.

しかし, 物理的分子粘性はメッシュ幅の二乗に逆比例するため, 問題によって, この陰的な人工粘性の相対的な大きさは変化してしまう.

そこでその点を考慮し, 常に物理的分子粘性程度の大きさで作用し, 図3のような不等間隔メッシュにも適用できるように改良したものが次式である.

$$\begin{aligned} \phi_i &= (1 - 2a_v)\phi_i \\ &+ 2a_v \left(\frac{\Delta_{i-1}\phi_{i+1} + \Delta_{i+1}\phi_{i-1}}{\Delta_{i+1} + \Delta_{i-1}} \right) \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ただし,

$$\Delta_{i\pm 1} = \pm x_{i\pm 1} - x_i$$

図2 等間隔メッシュ間の restriction

$$a_v = k_v \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2}, \quad k_v \approx 1$$

本報ではこの restriction を用いた多重格子アルゴリズムを用いる。

なお, prolongation については, 従来同様, メッシュ幅に応じた重みづけ (図4) を利用する。

以上示した restriction ではすべての変数が拡散される。これは, 人工粘性のみならず, 人工熱伝導, 人工質量拡散の意味あいをも含んでいる。

この, 全流束の人工拡散は, 衝撃波を含む流れの解析において解を安定させるために非常に有効な手法の一つである, いわゆる Rusanov の人工拡散の概念に一致する。

したがって, 本報で提案した多重格子アルゴリズムは, その元となるスキームに Rusanov 法の概念を導入することになり, 従来の多重格子アルゴリズムの効果と併せて, スキーム全体の安定化に非常に有効な手法となっている。

なお, 簡単な計算の流れを図5に示す。

3. スキームの検証

以上述べてきた多重格子 Implicit MacCormack 法を実際に衝撃波-境界層干渉流れに適用し, 本スキームの有効性を示す。

3.1 解析モデル (図6) 平板と平行に超音速で空気が流れだし, その結果平板近傍では境界層が形成されていく。さらにその後, 外部より境界層へ向かって衝撃波が飛来した時の, 流れの時間的変化について解析する。

この場合, 時間とともに発達していった境界層と, 外部からの衝撃波が干渉しあい, 境界層の厚みは増し,

図3 不等間隔メッシュ間の restriction

図4 prolongation (等間隔メッシュ)

さらには, 境界層内の逆流, 流れのはく離, 再付着などが生ずることが, 実験で観察されている。

3.2 初期条件および境界条件 流れを特長づけるパラメータは, 衝撃波の飛来角 θ , $x = x_{SHK}$ におけるレイノルズ数 Re , 主流マッハ数 M_0 である。

$$Re = (u_0 x_{SHK}) / \nu_0 \quad (13)$$

$$u_0 = c_0 M_0 \quad (14)$$

ただし,

x_{SHK} : 平板前縁と衝撃波が接する点の距離

u_0 : 主流における速度

c_0 : 音速

図5 本スキームの計算の流れ

図6 解析モデル

ν_0 : 動粘性係数

また, 初期条件としては一様流を考える.

$$u = u_0, v = v_0 (= 0), \rho = \rho_0, p = p_0$$

一方, 境界条件は以下のとおりである. ただし, (A) ~ (D) は図 6 中の記号を示している.

(A) 流入境界条件

超音速流れであるので, 一定値を与える.

$$u = u_0, v = v_0, \rho = \rho_0, p = p_0$$

(B) 上方境界条件

この境界でも一定値ではあるが, ここでの境界条件が衝撃波を生み出すので, 衝撃波前後では値が異なる.

衝撃波前: $u = u_0, v = v_0, \rho = \rho_0, p = p_0$

衝撃波後: $u = u_1, v = v_1, \rho = \rho_1, p = p_1$

また, 流束の衝撃波前後の関係は, 斜め衝撃波の式より求められる.

(C) 流出境界条件

流出条件については, 零次補間を行う.

$$u_{i_{\max}, j} = u_{i_{\max}-1, j}$$

$$v_{i_{\max}, j} = v_{i_{\max}-1, j} \quad (i_{\max} \text{ は } i \text{ の最大値})$$

(D) 下方境界条件

平板の前方と平板上では条件は異なる. 平板前方ではスリップ条件を, 平板上ではノン・スリップ条件を適用する.

平板前方: $u_{i,1} = u_{i,2}, v_{i,1} = -v_{i,2}$

$$\rho_{i,1} = \rho_{i,2}, T_{i,1} = T_{i,2}$$

平板上: $u_{i,1} = -u_{i,2}, v_{i,1} = -v_{i,2}$

$$\rho_{i,1} = \rho_{i,2}, T_{i,1} = T_{i,2}$$

ただし, 平板は $j=1$ と $j=2$ の, ちょうど中間にあるものとする.

また, 平板は断熱壁である.

3.3 解析結果 以上のモデルについて本スキームにより解析した結果を図 7~9 に示す. ただし, 流れのパラメータは以下のとおりである.

$$Re = 3.0 \times 10^5, M_0 = 2.0, \theta = 32.6^\circ$$

なお, 図 7 の速度ベクトル図は, 計算領域全体ではなく, 流れの変化の特徴となっている, はく離泡近傍を拡大したものである [図 7(a)].

これらはいずれも 59×59 および 119×59 の二段階のメッシュにより, 解析を行った. また, 計算には, 東京大学大型計算機センターの HITAC M-280 H を用いた.

図 7 の速度ベクトル図から, 境界層は時間とともに発達していき, $t=1.5$ で衝撃波が境界層へ到達すると, x_{SHK} を中心に厚みを増し, 境界層と衝撃波の干渉が始まったことがわかる.

(a) Field of Fig. 7

(b) $t=0.25$

(c) $t=0.5$

(d) $t=1.5$

(e) $t=2.0$

(f) $t=2.5$

(g) $t=3.0$

(h) $t=4.0$

(i) $t=4.5$

図 7 干渉領域の発達 (速度ベクトル図)

図 8 表面摩擦係数分布

さらに、 $t=2.5$ になると、流れがはく離し、下流で再付着している。さらにはく離泡の中では逆流が生じていることが非常に明確に捕えられている。

はく離泡の成長は、時間とともに顕著となっていく、 $t=4.0$ でほぼ定常となる。

これらの現象はいずれも実験などですでに明らかにされているが、本スキームは非常に明確に捕らえることに成功している。

さらに、定量的に検証を行うために、Hakkinenの実験結果⁽⁶⁾との比較を行った(図8, 9)。

どちらも実験結果と非常によく一致した。特に、表面圧力分布は流体の圧縮性がよく表れるものであるが、それが非常に良好な結果を得ているということからも、本スキームが圧縮性粘性流体を高精度で解析できたことがわかる。

4. 検 討

以上のとおり、本スキームは、高レイノルズ数流れの非定常問題を高精度で解析することができ、スキームとしての正当性を確かめることができた。

さらに、本スキームの大きな特長の一つである計算速度について、Implicit MacCormack 法等との比較を表1に示す。

Beam-Warming 法は同じ HITAC M-280 H で、また Implicit MacCormack 法は、ほぼ同じ処理速度を持つ CDC-7600 で、同じ問題の解析を行った結果である。

これらのスキームと本スキームの厳密な比較は困難である。なぜなら、粗いメッシュ系を含む本スキームのほうが、明らかに全体でのメッシュ数が少ないために、演算量は当然減少するからである。

しかし、本スキームが Implicit MacCormack 法の数倍の高速性を示していることは明らかである。

以上示したとおり、高レイノルズ数の流れにおいて

表 1 計算速度の比較

Numerical Method	CPU Time $\times 10^4$ [s]	Speed Ratio
Beam & Warming Method	7.0	1.9
Implicit MacCormack Method	1.5 ~ 2.5	5.3 ~ 8.8
Present Scheme	0.4 ~ 0.7	19 ~ 33

○ EXPERIMENTAL (Hakkinen, et al)
 — COMPUTATIONAL (59×59 Mesh)
 --- COMPUTATIONAL (119×59 Mesh)

図 9 表面圧力分布

も、「非常に高速」でかつ「非常に安定」であって、しかも「安定化させるために、非物理的なほどに巨大な人工粘性などを必要としない」のが、本報で提案する多重格子 Implicit MacCormack 法なのである。

5. 結 言

以上述べてきたとおり、本報で提案するスキームは、Implicit MacCormack 法に Rusanov の人工拡散の概念を内包する多重格子アルゴリズムを導入した、多重格子 Implicit MacCormack 法である。

本スキームは以下のような特長を持つ。

(1) 従来の Implicit MacCormack 法の数倍のスピードを持った高速解法である。

(2) Rusanov の人工拡散の概念を内包するために、巨大な人工粘性を導入しなくても、高レイノルズ数の流れの解析を行うことができる。

(3) 本スキームの特長である多重格子アルゴリズムは、Implicit MacCormack 法以外の時間進行法に適用することも可能であり、従来の人工粘性などのようなスキームを安定させるための手法に代わり得る、汎用性の高いアルゴリズムであり、しかも既存のプログラムに組み込む場合も、ほとんど修正を加える必要がない。

数値解法は流体に限らず、なるべく自然のままに計

算を行うのが本来の姿である。従来の研究ではコンピュータの性能とのかねあい等もあり、どうしても非物理的な概念を導入せざるを得ないのが実状ではあるが。

これからの研究ではますます複雑な条件での解析が必要となり、それに従ってメッシュ数も急増すると思われる。それに対応できるだけのスキーム、すなわち安定性の高いスキームの開発が非常に重要である。

この多重格子 Implicit MacCormack 法はそれに対する一つの試みであるが、これを翼まわりの流れなどの現実的な問題にも適用し、有効性を実証していくことが必要である。さらには、「より速く」、「より安定

に」、そして何よりも、「より自然に」が、これからの課題である。

文 献

- (1) 石黒, 航空宇宙技術研究所報告, TR-489 (昭52), 1.
- (2) Beam, R. M. and Warming, R. F., *SIAM-AMES Proceeding, Symposium on Computational Fluid Dynamics*, 11 (1978), 85.
- (3) MacCormack, R. W., *AIAA J.*, 20-9 (1982), 1275.
- (4) MacCormack, R. W., *AIAA Paper*, 69-354 (1969).
- (5) Hackbush, W., *Computational Method for Turbulent Transonic and Viscous Flows*, Springer-Verlag (1983), 45.
- (6) Hakkinen, R. J., *NASA Memo*, 2-18-59 W (1959).

討 論

〔質問〕 安 喜 隆 幸〔航空宇宙技術研究所〕

(1) 多重格子による加速は、MacCormack が陰解法を用いてテストし、2～4倍速くなることを報告している(1983)。基本的に新しい提案と思えないがいかがか。

(2) 表1の速度比は何を基準にしたものか。クーロン数・収束判定条件・繰返し回数・格子遷移回数などのデータがないので客観性に不満がある。さらにフォーミュレーションで差の明白な原形 B-W 法と比較したのでは「非常に高速」という言葉に重みがない、他の bi-diagonal と比較してほしい。

(3) 式(12)を用いた効果が不明確で、式(11)だと不都合/不自然と言われても本質的重要性の問題が残る。このオーダの量が問題になるならば、近似分解誤差(～クーロン数の積)はどうなのか。

(4) Δt が大きくとれることで「非常に安定→高速→望ましいスキーム」と考えておられるのか。また「自然に」には、時間的に忠実に追従して定常解を求めよ、という意味も含めておられるのか。最後に、貴スキームの使用目的(どんな問題に適用か)をお聞かせ願いたい。

〔回答〕 (1) 従来の多重格子アルゴリズムはいずれも、積極的にスキームを安定化する作用はもたなかった。本報で提案する多重格子アルゴリズムはこの点を改良した独自のアルゴリズムである。

(2) 表1の結果は解析モデルについての定常解を得るまでの総計算時間をもとにしたものである。

correction の回数によって全体の計算量も変化するが、本報掲載分は、粗いメッシュ系と細かいメッシュ系を交互に4ステップごとに変化させた。また、各

変数について、変化量の全点あたりの平均が 10^{-5} 未満になった時を定常状態としている。

(3) 人工粘性や、ある種の乱流モデルを用いることで、解の収束を速め、定常解を高速で得ることができるが、過渡的な状態については保証できない。

しかし、本スキームでは、安定化をもたらす作用子も、自然の大きさに合わせるようにした。その結果、定量的には未検討であるが、図7にあるとおり、定性的には境界層の発達などを過渡的にとらえることができた。

(4) メッシュ幅が非常に小さくても、比較的大きな時間進行幅をとることができれば、解は高速に得ることができる。さらに、その時に得られる解が必要な正解さと精度を保っているのであれば、それは「良い」スキームと考えられると思う。そして、高密度のメッシュが必要とされることが多い現状においては、その点では「望ましい」スキームと思われる。

解の収束を速める作用子を導入することで、定常解を高速に得ることができる。しかし、その作用子が効果的であるほど、その過渡状態においては、正確さを保証することはできない。さらには、解の変化が抑えられて、一見定常状態になっている可能性もある。その意味では、定常解を求める場合でも、必要以上に「不自然な」手法は好ましいとは思われない。

最後に、本手法の大きな利点の一つに、他の人工粘性などを必要としないことがある。これを翼周りの遷音速流の解析に用いることが一つの目標であるが、さらに理論的背景を確立することで、非定常問題解析用スキームとしても応用することができると思う。