油圧管路における波動現象の研究*

(第15報, 特性曲線法に代わる管路網の過渡波動計算法)

鷲尾 誠一**, 小西 忠孝**, 植田 俊明***

Research on Wave Phenomena in Hydraulic Lines (15th Report, Surge Calculus in Place of Method of Characteristics)

Seiichi WASHIO, Tadataka KONISHI, and Toshiaki UETA

The method of characteristics often turns out to be too bothersome and expensive owing to the laborious evaluation process of Zielke's loss term, when it is applied to viscosity-dominant oil hydraulic pipe networks. This paper intends to present a new surge calculus which is expectedly immune from this difficulty. The fundamental idea of the calculus is based upon the simple but ever-unnoticed theoretical fact: the pressure and flow-rate waves at both ends of a single uniform pipe are linearly related to each other, regardless of the waves anywhere along the pipe between its two ends. Consequently, spatial division of a pipe along its axis required in the method of characteristics is dispensed with, which can largely save time and cost for calculation and therefore gives the present method advantages over its predecessor. Through numerical tests the usability of the method has been confirmed.

Key Words: Transient Wave, Method of Characteristics, Surge, Numerical Inversion, Pipe Network, Oil Hydraulic Line

1. 緒 言

流量制御弁, 圧力制御弁, 方向切換弁などの各種の弁, 絞り, アキュムレータ, ピストンシリンダ, ポンプ, モータといったさまざまな要素を管路によって結びつけて, 動力, 信号の伝達を図る油圧管路網内の流れは多くの場合, 過渡的な変動を受ける。そうした管路網におけるサージ現象を理論的に予測することは, 回路設計の信頼性を高めるうえからも重要である。そして現在, その必要に迫られた時に, ほとんどすべての技術者, 研究者が取り得る手段は, 唯一, 特性曲線法⁽¹⁾であるといつて過言ではない。しかしながら, 時間依存性をもつ粘性せん断損失が無視できない油圧管路における過渡波動の場合, Zielke⁽²⁾の導いた損失評価法に起因する煩雑さと計算労力が障害となって, その適用が躊躇されることもまた事実である。

一方著者らが以前に提唱した, 波動方程式のラプラス変換解を時間遅れ因子につき級数展開したうえで, 数値逆変換する方法⁽³⁾は, 簡単かつ精度の高い解析手段であるものの, 管路網に対しては解析解そのものを

導くことが難しく, またそのままでは非線形境界条件に対応できないなど, 実用上の問題がある。

ところで, 管内過渡波動をラプラス変換を使って取扱う過程の中から, 今回著者らは単一様管の一端における圧力と流量の線形関係が, 管路途中におけるそれらの値とは無関係に, 管端における圧力と流量の履歴のみで決まるという事実を見出した。この性質は, テーパ管をも含めた管路網の過渡波動解析に適用できるものであり, その時の粘性損失評価には, 先の数値逆変換法の精度と簡便さが生かされる。こうして得られる解析手段は, 特性曲線法における時間, 距離双方に差分をとった格子点ごとの計算から, いわば, 距離方向の分割を取り除き, 管路途中の計算を一切不要にするという利点をもつ。

本論文では, 「管端履歴法」と名づけるこの液体管路網の過渡波動計算手段について, その原理と実用化の過程を報告する。

2. 粘性損失を考えない場合

2-1 基本的原理 損失を考えない場合, 管内液体の波動は周知のように, 次の運動方程式および連続式で表される。

* 昭和61年11月23日 関西支部第246回講演会において講演, 原稿受付 昭和61年3月26日。

** 正員, 岡山大学工学部 (〒700 岡山市津島中3-1-1)。

*** 学生員, 岡山大学大学院。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

なお本報で用いる記号は、新たに定義するものを除いて、先の報告⁽³⁾のそれに準ずる。式(1)、(2)をラプラス変換して、 u を消去すれば、

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{s^2}{c^2} P = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

なお、大文字は対応する小文字のラプラス変換形を表す。この式を図1に示すような長さ l の一様管の両端における圧力、流量に対して解けば、次の関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} P_2 &= P_1 \cosh sT_l - z_l Q_1 \sinh sT_l \\ Q_2 &= -\left(\frac{P_1}{z_l}\right) \sinh sT_l + Q_1 \cosh sT_l \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= P_2 \cosh sT_l + z_l Q_2 \sinh sT_l \\ Q_1 &= \left(\frac{P_2}{z_l}\right) \sinh sT_l + Q_2 \cosh sT_l \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

式(4)、(5)のそれぞれについて、第2式に z_l をかけて第1式と和および差をとれば、次の関係を得る。

$$P_2 + z_l Q_2 = P_1 e^{-sT_l} + z_l Q_1 e^{-sT_l} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$P_1 - z_l Q_1 = P_2 e^{-sT_l} - z_l Q_2 e^{-sT_l} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで式(6)、(7)をラプラス逆変換すれば、

$$\begin{aligned} p_2(t) + z_l q_2(t) &= p_1(t - T_l) \mathcal{U}(t - T_l) \\ &\quad + z_l q_1(t - T_l) \mathcal{U}(t - T_l) \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1(t) - z_l q_1(t) &= p_2(t - T_l) \mathcal{U}(t - T_l) \\ &\quad - z_l q_2(t - T_l) \mathcal{U}(t - T_l) \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ただし、 $\mathcal{U}(t)$ は単位ステップ関数である。ここで得られた式(8)、(9)は、管端における圧力と流量の関係が、波動の伝達時間 T_l だけ過去の、他端の圧力と流

図1 管端境界値と $x-t$ 線図

量の値のみで与えられることを示している。そしてこの関係を使えば、管路の途中における圧力、流量を考慮することなく、管端における圧力、流量の変化を時間を追って求めることができる。すなわち、特性曲線法が軸方向、ならびに時間方向に分割された、図1に示すような $x-t$ 線図上の格子点(丸印)のすべてについて、差分式

$$dp \pm z_l dq = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

を計算していくものであるのに対し、この方法は、いわば両端 $x=0$ および $x=l$ の格子点(黒丸印)だけについて、時間方向にのみ逐次計算を行えばよいことになる。これは過渡波動計算法として、特性曲線法に勝る利点である。

次に管路網は図2のように分接点においた一つの集中管路要素と、そこにつながれた幾本かの管路を基本的な構成単位とすると考えることができる。最も簡単な管路要素は単純な結合であり、圧力、流量の連続だけで表される。管路要素の特性は、最も一般的に考えて、各管端の圧力、流量 $p_{0k}, q_{0k} (k=1, 2, \dots, n)$ とその微分値 $\dot{p}_{0k}, \dot{q}_{0k}$ および要素変数 $x_j (j=1, 2, \dots, m)$ (例えば、ポペット変位、シリンダストロークなど)とその微分値 $\dot{x}_j, \ddot{x}_j$ で表される次式のような非線形微分方程式によってモデル化される。

$$f_i(p_{0k}, q_{0k}, \dot{p}_{0k}, \dot{q}_{0k}, x_j, \dot{x}_j, \ddot{x}_j) = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

式(11)を差分化し、要素につながる各単一管についての式(8)、(9)で示される関係式

$$\begin{aligned} p_{0k}(t) \pm z_{lk} q_{0k}(t) &= p_k(t - T_{lk}) \pm z_{lk} q_k(t - T_{lk}) \\ (k=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

と連立させて解けば、分接点における圧力、流量の現在値を求めることができる。これを全分接点について時間増分ごとに繰返せば、管路網全体のサージ現象が計算できる。

図2 管路網構成単位

特性式の差分化の必要性は特性曲線法も同様であるが、その場合、要素の非線形挙動を正確に計算しようとして、時間きざみ Δt を小さくすれば、それに応じて距離のきざみ $\Delta x = c\Delta t$ も小さくなり、長い管路では分割数が多くなってしまふ。それに比べて式(8)、(9)を使う管端履歴法では管路がいかに長くとも、両端における計算だけですむことから、その優位性は明らかである。

なおテーパ管は図3のように、長さが短く径の異なる多くの一様管の集合として近似し、各断面変化分接点ごとに式(8)、(9)を適用してやることで、同様にそこでの過渡波動を計算することができる。

著者らは、管路網の要素と管路の種類および構成条件、過渡波動発生源の場所と種類、初期定常条件、ならびに波形計算位置を数値データで与え、要素特性式はユーザ固有のサブルーチンで与えることで、任意の管路網内の所望の点における圧力、流量の変化を計算しうる管端履歴法のはん用プログラムを実現している。

2.2 計算例 ここで、流体が非粘性の場合に、ポンプ、リリーフ弁、オリフィス形締切弁を分岐パイパス管で結んだ図4に示す回路を例にとり、締切弁を閉じた時の発生サージ圧力を管端履歴法で計算してみる。各要素は次のようにモデル化している。

- (i) ポンプ=定流量源
- (ii) タンク=定圧源
- (iii) オリフィス形締切弁

特性は次式で表す。

$$\left. \begin{aligned} q_2 &= \text{sign}(p_2 - p_3 + \Delta p_s) \alpha_s A_s \\ &\times \sqrt{|p_2 - p_3 + \Delta p_s| / \rho - q_0} \\ q_0 &= \alpha_s A_{s0} \sqrt{\Delta p_s / \rho} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

p_2, p_3 : 締切弁上流側, および下流側の圧力変動,
 α_s : 流量係数, A_s : 開口面積, q_0 : 定常流量

図3 テーパ管の一様管近似

Δp_s : 定常状態での圧力損失, q_2 : 流量変動
 なお弁の閉止は、その開口面積 A_s を、初期値 A_{s0} より零まで、時間 t_s の間に一定割合で減少させる。

(iv) リリーフ弁(図5)

リリーフ弁ポペットの運動を次式で表す。

$$m\ddot{x}_p + \eta\dot{x}_p + kx_p = A_p(p_1 - p_4 + \Delta p_l) - F_0 \quad (14)$$

m : ポペット質量, η : 減衰係数, k : ばね定数

x_p : ポペット変位, A_p : ポペット受圧面積

Δp_l : 定常状態におけるポペット絞りの圧力差

F_0 : クラッキング力

p_1, p_4 : 主管路, および逃がし管路の圧力変動

また、流量特性は次式で与える。

$$\left. \begin{aligned} q_4 &= \text{sign}(p_1 - p_4 + \Delta p_l) \alpha_r x_p^2 \\ &\times \sqrt{|p_1 - p_4 + \Delta p_l| / \rho - q_{40}} \\ q_{40} &= \alpha_r x_{p0}^2 \sqrt{\Delta p_l / \rho} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

q_4 : ドレーン管路の流量変動, α_r : 流量係数

x_{p0} : 定常状態でのポペット変位

以上の管路要素特性式で、各パラメータを

$$\left\{ \begin{aligned} q_0 &= 250 \text{ cm}^3/\text{s}, t_s = 1.22 \text{ ms}, A_{s0} = 0.28 \text{ cm}^2 \\ \alpha_s &= 0.2, \Delta p_s = 1.67 \text{ MPa}, \rho = 859 \text{ kg/m}^3 \\ m &= 10 \text{ g}, \eta = 3\,000 \text{ N}\cdot\text{s/m}, k = 90\,000 \text{ N/m} \\ A_p &= 0.4 \text{ cm}^2, \Delta p_l = 1.67 \text{ MPa}, F_0 = 0, \alpha_r = 10 \\ l_1 &= 2 \text{ m}, l_2 = 6 \text{ m}, l_3 = 4 \text{ m}, l_4 = 8 \text{ m}, l_5 = 6 \text{ m} \\ a &= 0.8 \text{ cm}, c = 1\,430 \text{ m/s} \end{aligned} \right.$$

と置き、タンク側圧力 $p_3 = p_4 = 0$ と考えて計算した締切弁上流, およびリリーフ弁圧力 p_2, p_1 , ならびにリリーフ弁ポペット変位 x_p を描けば図6のようになる。ただし、圧力およびポペット変位は、それぞれ相当水撃圧力 $z_i q_0$, およびポペットの変位限界 $x_{p\text{limit}}$ で無次元化してある。この結果では、締切弁で発生した圧力波が、途中の分岐で分散されながら、 $t = T_1 = T_{12}$

図4 モデル回路

図5 リリーフ弁模型

図6 粘性を考慮しない場合の
管端履歴法によるサージ計算例

+ T_{13} でリリース弁に到達し、その後バイパス管の間で、複雑な反射を繰返すのに応じて、リリース弁のポペット変位が変動する様子が示されている。

3. 粘性損失を考慮した場合

3.1 基本的原理 管内の粘性流体の波動は、次の運動方程式と、半径方向流速を考えた連続の式で表される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (16)$$

$$\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

式(16), (17)にラプラス変換を適用し、 r について解いた後、整理すれば、

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \left\{ F_i(z) \frac{s}{c} \right\}^2 P = 0 \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} F_i(y) &= \{I_0(y)/I_2(y)\}^{1/2} \\ z &= \sqrt{\chi_0 s}, \quad \chi_0 = a_2/\nu \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式(18)を長さ l の一様管について解けば、

$$\left. \begin{aligned} P_2 &= P_1 \cosh sF_i(z)T_l - z_i F_i(z) Q_1 \sinh sF_i(z)T_l \\ Q_2 &= -\frac{P_1}{z_i F_i(z)} \sinh sF_i(z)T_l + Q_1 \cosh sF_i(z)T_l \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= P_2 \cosh sF_i(z)T_l + z_i F_i(z) Q_2 \sinh sF_i(z)T_l \\ Q_1 &= \frac{P_2}{z_i F_i(z)} \sinh sF_i(z)T_l + Q_2 \cosh sF_i(z)T_l \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式(20), (21)のそれぞれについて、第2式に $z_i F_i(z)$ をかけ、第1式との和、および差をとれば、次式を得る。

$$P_2 + z_i F_i(z) Q_2 = P_1 e^{-sF_i(z)T_l} + z_i F_i(z) Q_1 e^{-sF_i(z)T_l} \quad (22)$$

$$P_1 - z_i F_i(z) Q_1 = P_2 e^{-sF_i(z)T_l} - z_i F_i(z) Q_2 e^{-sF_i(z)T_l} \quad (23)$$

式(22), (23)を次のように変形する。

$$P_2 + z_i Q_2 = s P_1 \frac{1}{s} e^{-sF_i(z)T_l} + z_i F_i(z) s Q_1 \frac{1}{s} e^{-sF_i(z)T_l} - \frac{1}{s} z_i \{F_i(z) - 1\} s Q_2 \quad (24)$$

$$P_1 - z_i Q_1 = s P_2 \frac{1}{s} e^{-sF_i(z)T_l} - z_i F_i(z) s Q_2 \frac{1}{s} e^{-sF_i(z)T_l} + \frac{1}{s} z_i \{F_i(z) - 1\} s Q_1 \quad (25)$$

これらを時間領域にラプラス逆変換すれば、非粘性流体の場合の式(8), (9)に対応して、次の関係式が得られる。

$$p_2(t) + z_i q_2(t) = F_{p1}(t - T_l) + F_{q1}(t - T_l) - F_{n2}(t) \quad (26)$$

$$p_1(t) - z_i q_1(t) = F_{p2}(t - T_l) - F_{q2}(t - T_l) + F_{n1}(t) \quad (27)$$

$$F_{pn}(t) = \int_0^t \frac{dp_n}{d\tau} S_p(t - \tau) d\tau \quad (28)$$

$$F_{qn}(t) = z_i \int_0^t \frac{dq_n}{d\tau} S_q(t - \tau) d\tau \quad (29)$$

$$F_{nn}(t) = z_i \int_0^t \frac{dq_n}{d\tau} H(t - \tau) d\tau \quad (30)$$

$$S_p(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} e^{-s\{F_i(z)-1\}T_l} \right] \quad (31)$$

$$S_q(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} F_i(z) e^{-s\{F_i(z)-1\}T_l} \right] \quad (32)$$

$$H(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \{F_i(z) - 1\} \right] \quad (33)$$

式(26), (27)は, 損失を考えなければ, $S_p=1$, $S_q=1$, $H=0$ となって式(8), (9)と一致する。したがって2章の議論から明らかなように, もし重み関数 $S_p(t)$, $S_q(t)$, $H(t)$ の任意の時間 t に対する値を知ることができるならば, これらの関係式を使って粘性損失を考えた場合の過渡波動が計算できる。そして Zielke の損失項⁽²⁾を含めた特性曲線法

$$dq \pm \frac{1}{z_i} dp = - \int_0^t \frac{4}{x_0} w \left(\frac{t-\tau}{x_0} \right) \frac{\partial q(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau dt \quad \dots\dots\dots (34)$$

が, $x-t$ 線図の格子点のすべてについて, 流量を記憶しておかなければならなかったのに対し, この方法は圧力と流量の両者とはいえ, 管端のみでそれらを記憶しておけばよい。これは, 粘性流体の過渡波動を計算するうえで一大利点と言える。

式(31), (32)より明らかなように, $S_p(t)$, $S_q(t)$ はそれぞれ, 半無限管の入口ステップ圧力, および流量に対する距離 l なる位置の圧力を意味する。 $S_p(t)$, $S_q(t)$, ならびに $H(t)$ は, その時間領域における厳密な数学的表現を求めることは困難であるが, 著者らが以前に示した数値逆変換法⁽³⁾を使えば, 任意の t に対するそれらの値を簡単に求めることができる。この方法は, 「数値」逆変換という呼び名から受ける印象に反して, この目的に対する精度は非常に良い。今そのことを示すために, $|z|$ が小さい場合, および大きい場合に導かれる式(31)~(33)の近似をラプラス逆変換して得られる数式解⁽⁴⁾と, 数値逆変換法で得られる値とを比較してみる。

(i) $|z| \gg 1$ の場合:

$$F_i(z) \cong 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$S_p(\bar{t}) \cong e^{-\beta} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\beta}{2\sqrt{\bar{t}}} \right\} \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$S_q(\bar{t}) \cong e^{-\beta} \left[(1-\beta) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\beta}{2\sqrt{\bar{t}}} \right\} + \frac{2\sqrt{\bar{t}}}{\pi} e^{-\beta^2/4\bar{t}} + \int_0^{\bar{t}} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\beta}{2\sqrt{\bar{t}}} \right\} d\bar{t} \right] \quad (37)$$

$$H(\bar{t}) \cong \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\bar{t}} + \bar{t} \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$\beta = T_l/x_0, \quad \bar{t} = t/x_0 \quad \dots\dots\dots (39)$$

(ii) $|z| \ll 1$ の場合:

$$F_i(z) \cong \frac{\sqrt{8}}{z} \quad \dots\dots\dots (40)$$

$$S_p(\bar{t}) \cong \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{2\beta^2}{\bar{t} + \beta}} \right\} \quad \dots\dots\dots (41)$$

$$S_q(\bar{t}) \cong 2\sqrt{\frac{8}{\pi}} (\bar{t} + \beta) e^{-2\beta^2/(\bar{t} + \beta)} - 8\beta \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{2\beta^2}{\bar{t} + \beta}} \right\} \quad \dots\dots\dots (42)$$

$$H(\bar{t}) \cong 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} \bar{t} - 1 \quad \dots\dots\dots (43)$$

ただし, $\operatorname{erfc}(y)$ は余誤差関数である。横軸に無次元時間 $\bar{t}$ を対数でとり, 数値逆変換法, および上記二つの近似解による, S_p , S_q , H の計算結果をそれぞれ, 実線, 点線, および破線で描いて示せば, 図7のようになる。いずれの図でも数値逆変換法による結果は, 立ち上がり近傍, および後端で, それぞれの対応する近似理論値に良く一致し, しかもその中間域では, それらの両限界値を滑らかに結ぶ曲線となっている。この事実, 数値逆変換法が関数 S_p , S_q , H の値を良い精度で与え得ることを示している。

式(26), (27)に基づいた粘性流体に対する管端履歴法は, 右辺の数値積分を除いて, 2章の非粘性の場合と全く同様に行える。なおここでも著者らは, 粘性を考慮した場合の管端履歴法を, 先と同様なはん用プログラムとして実現している。

3.2 計算例

3.2.1 断面変化管路のステップ応答 ここではまず, 図8に示すような, 末端が閉鎖され, 途中で断面変化をもつ直管の入口で圧力ステップを与えた場合の閉鎖端圧力応答を例にとり, 管端履歴法の適用上で考慮すべき点を説明するとともに, 著者らが先に提案した数値逆変換法によるやり方⁽³⁾と対比する。

図7 重み関数の近似理論解との比較

管端履歴法による圧力 p_3 の計算は以下の手順による。まず入口の流量波形 q_1 は、式(27)で $p_1=1$ と置いて求められる。ただし、この例のように入力ステップの場合、右辺 F_{h1} の積分に含まれる dq_1/dt が、 $t=0$ でインパルス $(1/z_1)\delta(t)$ ($\delta(t)$: Dirac のデルタ関数) を含むから、 F_{h1} は次の形で与えなければならない。

$$F_{h1}^{(1)} = H^{(1)}(t) + z_{11} \int_0^t \frac{dq_1}{d\tau} H^{(1)}(t-\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots (44)$$

次に p_2 , q_2 は、式(26), (27)から次式

$$\left. \begin{aligned} p_2 - z_{12}q_2 &= F_{h2}^{(2)} - F_{q2}^{(2)} + F_{h2}^{(3)} \\ p_2 + z_{11}q_2 &= F_{h1}^{(1)} + F_{q1}^{(1)} - F_{h2}^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (45)$$

で定められる。ここでもまた、 $F_{h1}^{(1)}$, $F_{q1}^{(1)}$ はその積分の中に p_1 , q_1 のステップ変化に起因する $\delta(t)$ を含んでいるから、その形は、

$$F_{h1}^{(1)} = S_p^{(1)}(t - T_{11}) \quad \dots\dots\dots (46)$$

$$F_{q1}^{(1)} = S_q^{(1)}(t - T_{11}) + z_{11} \int_0^{t-T_{11}} \frac{dq_1}{d\tau} \times S_q^{(1)}(t - T_{11} - \tau) d\tau \quad \dots\dots\dots (47)$$

で与えられる。式(44), (46), (47)のようなインパルス関数に起因する変形は、過渡波動発生の原因にステップ変化が含まれる場合に限り、発生源と、それに隣りあう分接点でのみ必要である。最後に p_3 は、式(26)に対応して、

$$p_3 = F_{h2}^{(2)} + F_{q2}^{(2)} \quad (q_3=0) \quad \dots\dots\dots (48)$$

より求められる。

一方、数値逆変換法は、図8の管路における両端圧

図8 断面変化回路

力伝達関数

$$\frac{P_3}{P_1} = \frac{1}{\cosh \gamma_1 \cosh \gamma_2 + \alpha \sinh \gamma_1 \sinh \gamma_2} \quad \dots\dots\dots (49)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= sF_i(z_1)T_{11}, \quad \gamma_2 = sF_i(z_2)T_{12} \\ \alpha &= z_{11}F_i(z_1)/z_{12}F_i(z_2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (50)$$

で、 $P_1=1/s$ (ステップ) と置き、右辺を時間遅れ因子 $e^{-(m_1\gamma_1+m_2\gamma_2)}$ で、べき級数展開したうえで、適用するものである。しかし、こうした伝達関数を導く作業は、図8のように比較的簡単な管路ならば、それほど問題はないものの、管路構成が少し複雑になると事実上不可能になってしまう。さらにまた、このような級数の高べき項ほど、見出す作業が煩雑となるため、あまり高次の反射波まで求めることは難しい。

今、流体にわずかな粘性 ($\nu=0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$) を考え、管端履歴法で求めた $p_3(t)$ の波形を、数値逆変換法で求めたそれと比較して、それぞれ破線および実線で図9に示してある。なお、実線の終わりの白丸印は、今回とった数値逆変換法の計算範囲の上限を示す。また、点線は流体を非粘性と考えて、管端履歴法で計算した結果を示す。数値逆変換法で途中まで計算した波形と、管端履歴法による波形は図の上では一致している。非

図9 断面変化回路のステップ応答

図10 粘性を考慮した場合の管端履歴法による計算結果

粘性の結果と比べれば、粘性がわずかであっても、反射を繰返す過程でその影響により、波形が減衰、拡散する様子が示されている。

3・2・2 リリーフ弁モデル回路 上で述べた伝達関数に数値逆変換法を適用する方法は、境界条件が非線形の場合、不可能となる。ここでは粘性を考慮しない場合の2章でとりあげた図4と同一モデルに対し、流体の粘度を3種類に変えて、管端履歴法により計算した、サージ圧力 p_2 , p_1 およびリリーフ弁ポペット変位 x_p の変動の様子を図10に示す。粘性の低い場合の図10(a)では、サージ圧力波形およびポペット変位が、先の非粘性の図6の結果と、特にサージ発生の初めの部分でよく一致している。一般には、反射を繰返す中で、また粘性が大きくなるほど、減衰がめいりようになることが見てとれる。

4. 結 言

ラプラス領域における波動方程式の解から出発して

一様単一管の一つの端における圧力と流量の線形関係が、管端での圧力と流量の履歴のみから決定され、管内におけるそれらの値には依存しないことを見出した。また、その関係における粘性を考慮した場合の損失は、管端での圧力、および流量の時間微分値と、3種の重み関数の畳み込み積分として与えられ、かつそれらの重み関数は、数値逆変換法によって精度よく求められることが判明した。その結果、特性曲線法のように、管路途中での圧力、流量の計算を必要とせず、特に粘性流体管路網サージ計算手段として有効と思われる、管端履歴法を実現し得た。

文 献

- (1) Wylie, E. B. and Streeter, V. L., *Fluid Transients*, Corrected Ed. (1983), 384, FEB Press.
- (2) Zielke, W., *Trans. ASME, Ser. D*, 90-1 (1968), 109.
- (3) 鷲尾・ほか2名, 機論, 40-329 (昭49), 199.
- (4) Brown, F. T., *Trans. ASME, Ser. D*, 84-4 (1962), 547.

討 論

〔質問〕 藤田 勝久・田中 守

〔三菱重工業㈱高砂研究所〕

(1) 非粘性の場合に対しては有効な方法と思われる。粘性を考慮した場合には式(28), (29)の数値積分を行う際の、管端での圧力、流量の時刻歴をすべて記憶しておくためのメモリー容量および数値積分の実行時間ともに $1/T_0$ とともに増加することになると思われる。はん用プログラムを開発されるに当たって、この部分についての工夫があれば、ご教授願いたい。

(2) Zielkeの履歴減衰項について Trikha (付1)も近似評価手法を提案している。貴論文の式(28), (29)の積分に同様の手法が適用できれば、メモリー容量、計算時間ともに大幅に低減されると思われるので検討されてはいかがか。

(3) 工業的利用価値の立場から、解の精度、計算コストなどに関し、本解法と従来法の具体的比較があれば好ましいと思う。

〔回答〕 (1) 粘性を考慮した管端履歴法の提出は、従来の主たる管路網過渡波動計算手段であるZielkeの特性曲線法に対して、同様の精度を保ったまま、その欠点を改善することを目的としている。そして本解析法では、特性曲線法に比べ、メモリー容量と数値積分の掛け算の回数が大幅に削減され、Zielkeの方法では求められなかった現象も計算可能となってい

る。

もちろん実用上からいえば、そうした計算労力が少ないに越したことはないわけであるが、私どもの今回のはん用プログラムでは、理論値の正確な計算という観点から、本稿に述べた以外のメモリー容量など低減の工夫は、特にしていない。

(2) Trikhaは一つ前の時間ステップでの流量および損失項を使って、現在の損失項を求めることができるように重み関数 $w(\tau)$ を近似している。その結果、メモリー容量と計算時間を劇的に減少させることに成功しているが、その分、精度が悪化していることは否めない。ただ、実用上からは Trikhaの近似でも有効である場合もあるだろうし、ご指摘いただいたように、その方向での工夫は、検討に値する課題だと思う。

(3) 現在まだ従来法との比較データをもっていないが、近い将来、Trikhaの近似も含めて、特性曲線法と本法を、精度、メモリー容量、計算時間などについて比較したいと思っている。

ごく単純にいえば、単一管の長さ方向分割数を N とするとき、管端履歴法は Zielkeの特性曲線法に比べてメモリー容量で $2/N$ 、損失項数値積分の掛け算ステップ数で $6/N$ となる。

(付1) Trikha, A. K., *Trans. ASME Ser. I*, 97-1(1975), 97.