電気化学的方法による狭さく後部の壁面せん断応力測定*

山 口 隆 平*¹Measurement of Wall Shear Stress behind a Stenosis
by the Electrochemical Method

Ryuhei YAMAGUCHI

In the present paper, the wall shear stress in a pulsating flow through a two dimensional stenosed channel has been studied. In the experiment, the wall shear stress behind the stenosis is measured by the electrochemical method. The measurement is conducted at a Reynolds number of 160, a non-dimensional frequency of 3.40 and a flow amplitude of 0.3. The wall shear stress is numerically estimated by calculating the continuity equation and the vorticity transferred equation. In steady flow, the wall shear stress behind the stenosis is a maximum at the upstream region of the reattaching point. In pulsating flow, the time variation of the wall shear stress is a maximum at the reattaching point corresponding to the steady flow. Consequently, it is clarified that the deterioration of an arterial wall with a stenosis is remarkably accelerated near the reattaching point corresponding to the steady flow.

Key Words: Fluid Mechanics, Wall Shear Stress, Pulsating Flow, Electrochemical Method, Physiology, Atherosclerosis

1. 緒 論

血管壁に生じる病理学的異変は、血管内の流れと密接に関連している。なかでも、血管壁の劣化については、種々の説が挙げられている⁽¹⁾。この原因として、壁上における過度の壁面せん断応力、はく離域における新陳代謝の低下、さらに血管壁の透過性などが指摘されている^{(2)~(4)}。本報では、血管壁劣化の一因と指摘されている壁面せん断応力を対象とする。

境界面上のせん断応力分布を知ることは、流体と境界壁との間の相互作用、例えば物体に働く抗力や流体と壁面との熱伝達特性を知るうえで重要なことである。壁面せん断応力の測定法のうち、浮動片などを用いる機械的な方法は、時間応答性に難点がある⁽⁵⁾。プレストン管やクラウザーチャートを用いる方法は、その適用可能な範囲が限定されている⁽⁶⁾⁽⁷⁾。また、熱膜や熱線流速計を用いる方法⁽⁸⁾⁽⁹⁾があるが、これまで主に気体流れに用いられているようである。他方、化学工学の発達に伴い、電気化学的方法を用いた壁面せん断応力の測定が示されている⁽¹⁰⁾。この方法は、電解液を

流し陰極上での拡散抵抗支配の反応を利用して、電極間を流れる電流値から壁面せん断応力を求めようとするものである。

本報では、二次元狭さく後部における壁面せん断応力分布を、このような流れ場の測定に適した電気化学的方法により検討する。狭さく部の壁面せん断応力分布は、定常流についてはLee-Fung⁽¹¹⁾が、脈動流については川口・浜野⁽¹²⁾が数値解析により示している。その結果によれば、狭さく部および狭さく部下流の再付着点近くで、壁面せん断応力の影響が大きくなるとされている。しかしながら、このような壁面上のせん断応力分布を実験的に解明することが必要である。

2. 実験装置および測定原理

2.1 実験装置 狭さく前後の電極の配置および電気回路を、図1に示す。供試流路(流路幅 $H=4$ mm, 紙面に垂直な幅 50 mm) に取付けられた狭さく部の後方に、測定用の白金電極 (Test cathode, $d=0.5$ mm) を 2~3 mm 間隔に 10 箇所埋め込んである。また、狭さく前部に検定のための電極 (Reference cathode, $d=0.5$ mm) を埋め込んである。

狭さくの前後部助走長さは、それぞれ 360, 210 mm である。流路概略は前報⁽¹³⁾と同様である。供試流路の

* 昭和 62 年 3 月 16 日 東海支部第 36 期総会講演会において講演、原稿受付 昭和 61 年 9 月 19 日。

*¹ 正員、芝浦工業大学 (〒108 東京都港区芝浦 3-9-14)。

流出口下流にスプール形の流量制御弁を設け、偏心カムによりその開口面積をある動作点を中心に正弦的に変えることにより、脈動流をつくる⁽¹⁴⁾。作動流体として、赤血塩 $K_3Fe(CN)_6$ と黄血塩 $K_4Fe(CN)_6$ の等モル溶液 (10^{-2} mol/L) および支持電解質として水酸化カリウム KOH (1 mol/L) との混合電解液を用いる。この電解液の性状は、温度により影響を受けるので、液温を一定に保つ (設定温度 $\pm 0.2^\circ C$)。

2・2 測定原理 壁面せん断応力の測定では、電気化学的方法を用いる⁽¹⁰⁾⁽¹³⁾。流路に電解液を流し、ポテンショスタットを用いて、アノード ($20 \times 150 \text{ mm}^2$) とカソード ($d=0.5 \text{ mm}$) との間に一定電圧を加える。このとき、カソード上では、

なる還元反応が生じ、これにより生じる電流 i は、ファラデーの法則により、

$$i = A_c F N \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 A_c : カソード ($d=0.5 \text{ mm}$) 面積、 F : ファラデー定数、 N : モル流束である。

電極面の長さはせいぜい 0.5 mm 程度 ($d=0.5 \text{ mm}$) であり、電解液のシュミット数のオーダーは 10^3 である。したがって、この電極近傍での濃度境界層は、電極面近傍のごく薄い領域に限られ、この領域内の速度は壁面からの垂直距離 y^* に比例すると考えられる。

$$u^* = ky^* \quad \dots\dots\dots (3)$$

以下では、座標、時間、速度成分、せん断応力などの記号について上付き添え字: * は有次元量を示すものとする。平板上の流れの場合、流れ方向に x^* 座標、この方向の速度 u^* をとると、拡散方程式は、

$$u^* \frac{\partial C}{\partial x^*} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^{*2}} \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。ただし、 C : 電解液のモル濃度、 D : 拡散係数である。境界条件は、

$y^*=0$, $C=C_w=0$ (限界電流下では、電極上の濃度は 0)

$y^*=\infty$, $C=C_\infty$ (電解液本体の濃度)

図1 電極の配置と電気回路

である。式(3)を式(4)に代入し、 $\beta = y^*(k/9Dx^*)^{1/3}$ を用いて変数変換し、上記の境界条件のもとで解けば、

$$\frac{C - C_w}{C_\infty - C_w} = \frac{1}{\Gamma(4/3)} \int_0^\beta \exp(-\beta^3) d\beta \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。電極の長さ l にわたって平均したモル流束 N は、

$$N = \frac{1}{l} \int_0^l D \left. \frac{\partial C}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} dx^* = \frac{\sqrt[3]{3}}{2\Gamma(4/3)} (C_\infty - C_w) \left\{ D^2 \frac{k}{l} \right\}^{1/3} \quad \dots\dots\dots (6)$$

また、壁面上のせん断応力は、 $\tau_w^* = \mu(\partial u^*/\partial y^*) = \mu k$ であるから、式(2)、(6)より⁽¹⁰⁾、

$$\tau_w^* = B i^3 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし、

$$B = \frac{8}{3} \frac{\mu l}{D^2} \left\{ \frac{\Gamma(4/3)}{(C_\infty - C_w) A_c F} \right\}^3$$

である。係数 B は、電解液の性状、濃度、温度および電極形状などにより決まる。

2・3 測定方法 本測定では、Reference cathode を用いて、その電流値 i と二次元ポアズイユ流れから理論的に求めた壁面せん断応力 τ_w^* との関係を、あらかじめ検定する。定常流の壁面せん断応力の測定では、流量を鹿威形流量計⁽¹³⁾により求め、そのときの電極間を流れる電流値 i を測定する。脈動流の場合には、スプール形の流量制御弁の変位と、このとき流れる電流値 $i(t)$ とをペンレコーダに記録する。流量制御弁変位と実際の流量変動との間には、若干の位相差があるので、あらかじめこの位相差を検定する。

流れ方向検出のためのダブル電極を、図2に示す。厚さ 0.14 mm の絶縁部をはさんだ2本の電極を、壁面に埋め込む。流れが左から右へ向かう場合、電極2は電極1が作る濃度境界層に覆われるため、 $i_1 > i_2$ となる。流れ方向が逆の場合には、 $i_1 < i_2$ となる。

図2 流れ方向の検出

3. 数値解析

図3のように二次元直角座標をとり、速度を平均速度 U 、長さを流路幅 H および時間を脈動の振動数 f で無次元化する。本報で用いる狭さく部の形状は、狭さく比 $L/H=0.475$ 、狭さく部厚さ $\delta/H=0.12$ とする。連続の式と運動方程式を、流れ関数 ψ およびうず度 η により表すと、

$$\eta = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) \dots\dots\dots (8)$$

$$\left(\frac{\alpha^2}{2\pi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial t} + Re\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 Re : レイノルズ数 $=UH/\nu$, α : 無次元振動数 $=H\sqrt{\omega/\nu}$, ν : 流体の動粘度および ω : 脈動の角速度 $=2\pi f$ である。

基礎式(8), (9)を座標変換の後に差分近似し、緩和法により数値計算する。これらの座標変換、数値解法については、前報⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾を参照されたい。なお、流量 Q は次式のように正弦的に変動するものとする。

$$Q/Q_0 = 1 + A \sin \omega t^* \dots\dots\dots (10)$$

ただし、 Q_0 は平均流量、 A : 無次元流量振幅である。

図3 流れ場と座標

図4 定常流における壁面せん断応力の検定

4. 結果および考察

4.1 定常流における壁面せん断応力の検定 定常流で得られた Reference cathode の電流値 i と、そのときの二次元ポアズイユ流れから理論的に求めた壁面せん断応力 τ_w^* との関係を、図4に示す。対象とするレイノルズ数の範囲は、 $Re=70\sim400$ である。図4に示す結果より、壁面せん断応力 τ_w^* は $i^{1/3}$ に比例し、式(7)の関係がよく示されている。

4.2 脈動流における壁面せん断応力の検定 供試流路下流にスプール形の流量制御弁を取付け、その開口面積を変えることにより、脈動流を作る。 $f=0.1$ Hz の場合、流量制御弁(スプール弁)変位とそのときの Reference cathode からの電流値 i を、図5(a)に示す。これらの電流値 i より得られた無次元壁面せん

(a) スプール弁変位と電流値の測定例 ($Re=81$, $f=0.1$ Hz, $A=0.20$)

(b) 脈動流におけるせん断応力の実験値と理論値 ($Re=81$, $A=0.20$)

図5 脈動流における壁面せん断応力の検定

断応力 τ_w と理論解との比較を、図 5 (b) に示す。対応する定常流では、壁上の無次元せん断応力 τ_w の値は 6.0 である。無次元振動数 $\alpha=3.56, 7.11$ は、それぞれ振動数 $f=0.1, 0.4$ Hz に相当する。 $\alpha=3.56$ の場合、 τ_w の振幅は 0.2 程度であるが、 $\alpha=7.11$ の場合には 0.27 となり、振動数が高くなると壁面せん断応力の振幅が大きくなり、その位相は進む。

4・3 流線とうず度分布の解析結果 数値解析により求めた狭さく回りの流線とうず度分布を、図 6 に示す。流量が最大の時刻 $\omega t^*=\pi/2$ のとき、狭さく後方のはく離域は拡大し、流量最小の時刻 $\omega t^*=3\pi/2$ で最も縮小する様子が示される。

4・4 狭さく後部の壁面せん断応力分布

4・4・1 定常流における壁面せん断応力 定常流の場合、狭さく後部の壁面せん断応力の分布を、図 7 に示す。本報では、狭さくの影響を無視できる十分上流において、下方壁上の無次元せん断応力を $\tau_w = -6.0$ と定める。図 7 において、 X 軸を横切る点 ($\tau_w = 0$) が流れの再付着点となり、この位置より上流においてはく離域となる。再付着点の若干上流で、壁面せん断応力は最大値 $\tau_{w\max}$ をとる。 Re 数が大きくなると、再付着点と壁面せん断応力が最大となる位置は後方へ

図 6 脈動流における狭さく後部の流線と等うず度線

移動し、最大壁面せん断応力の値は大きくなる。

壁面せん断応力の方向検定には、図 2 に示すダブル電極を用いる。電極のサイズなどから、その埋め込み位置を $X=2, 4, 6$ の 3 箇所に限定する。 $X=2$ および 6 では、その方向検出は可能であったが、 $X=4$ では流れの変化が微妙なため明確にはできなかった。

実験値と計算値とはよく一致しているが、その最大値 $\tau_{w\max}$ 、再付着点位置において若干の相違がある。計算値を基準に評価すれば、測定誤差は最大値 $\tau_{w\max}$ に対し 6%，再付着点に対して 5% 程度と推定される。

4・4・2 脈動流における壁面せん断応力 脈動流の場合、狭さく後部壁上のせん断応力分布を、図 8 に示す。無次元振動数 $\alpha=3.40$ は、比較的径の大きな動脈内における値と同じ程度である⁽¹⁵⁾。各時刻において、再付着点の上流で τ_w は最大値となる。この傾向は、定常流の場合と同じである。 $\tau_{w\max}$ は、流量最大の時刻 $\omega t^*=\pi/2$ で最も大きく、流量最小の時刻 $\omega t^*=3\pi/2$ で最小となる。同流量の時刻では、 $\omega t^*=0$ の場合の $\tau_{w\max}$ のほうが、 π の場合のそれよりも大きい。さらに、計算による再付着点は、それぞれ $X_r=3.29, 3.95$ となる。このことは、 $\alpha=3.40$ の場合には、すでに脈動による位相遅れが生じていることを示す。

脈動流の場合、対応する定常流の再付着点位置において壁面せん断応力の変動が最も大きくなる。たとえば、対応する定常流 ($Re=160$) の再付着点 $X_r=3.60$

図 7 定常流中における壁面せん断応力分布

図 8 脈動流中における壁面せん断応力分布

において、時刻 $\omega t^* = \pi/2$ と $3\pi/2$ の τ_w の差は 10 程度となり、その変動の大きいことが示される。このことは、血管壁劣化への壁面せん断応力の影響⁽¹⁾が、対応する定常流の再付着点近くにおいて最も大きくなることを意味する。

実験値は計算値に良く一致しているが、その再付着点位置や最大せん断応力において最大 10 % 程度の差異がある。本測定で用いた Cathode の直径は 0.5 mm であり、これは流路幅 $H=4$ mm に対し、13 % 程度の長さを有する。したがって、測定値はこの長さにわたっての平均値であるため、厳密な局所せん断応力測定ができなかったと考える。

一般に、数値計算により二次元流れや軸対称流れの壁面せん断応力を求める場合、計算手法や計算時間に多大な時間を必要とする。さらに、軸対称流れを仮定できない場合には、数値計算により壁面上の流れを算出することは現状では不可能である。以上のことを考慮すると、本報で示した壁面せん断応力の測定法は種々の検討の余地はあるが、壁面上の流れを評価するうえで非常に有効な方法と考える。

5. 結 論

本報では、電気化学的方法により、二次元狭さく後部における壁面せん断応力の分布を検討した。その結果、以下の結論が得られた。

(1) 狭さく後部では、再付着点の若干上流で壁面せん断応力は最大となる。脈動流の場合、対応する定常流れの再付着点近傍において壁面せん断応力の時間

変動が大きい。

(2) 本測定の誤差は、定常流の場合 6 %、脈動流では 10 % 程度である。この一因として、電極長さが有限であるため、厳密な局所せん断応力の測定ができなかったためと考えられる。

最後に、本研究を行うに際し貴重なご助言をいただいた上智大学 高橋浩爾教授、ならびに本学 岡本史紀助教授に謝意を表す。本研究の一部は、昭和 61 年度文部省科学研究費によったことを記し、関係各位に謝意を表す。

文 献

- (1) Lighthill, M. J., *J. Fluid Mech.*, **52**-3 (1972), 475.
- (2) Fry, D. L., *Cir. Res.*, **22** (1968), 1965.
- (3) Caro, C. G., ほか 2 名, *Proc. R. Soc., Ser. B*, **177** (1971), 109.
- (4) Oka, S., *Biorheology*, **16** (1979), 203.
- (5) Tennant, M. H., ほか 2 名, *J. Fluid Eng.*, **102**-1 (1980-3), 21.
- (6) Patel, V. C., *J. Fluid Mech.*, **23**-1 (1965), 185.
- (7) Preston, J. H., *J. R. Aeronaut. Soc.*, **58** (1954), 109.
- (8) Bellhouse, B. J. and Schultz, D. L., *J. Fluid Mech.*, **24**-2 (1966), 379.
- (9) 藤原・ほか 4 名, 機論, **49**-448, B(昭 58), 2937.
- (10) Mizushima, T., *Advances in Heat Transfer*, **7** (1971), 87, Academic Press.
- (11) Lee, J. S., and Fung, Y. C., *Trans. ASME, Ser. E*, **37**-1 (1970-3), 9.
- (12) 川口・浜野, 非ニュートン流体力学シンポジウム講演論文集, (1975), 102.
- (13) 山口, 機論, **51**-467, B(昭 60), 2358.
- (14) 山口, 機論, **52**-482, B(昭 61), 3469.
- (15) McDonald, D. A., *J. Physiol.*, **127** (1955), 533.