多孔性媒質中を透過する低流速* (抵抗係数に対するレイノルズ数の影響)

加藤 豊文^{*1}, 許 正憲^{*2}
川 又 慎^{*1}, 大島 信徳^{*3}

Slow Flow Through Porous Materials (Effect of Reynolds Number on Drag Coefficient)

Toyofumi KATOH, Masanori KYO,
Shin KAWAMATA, and Nobunori OHSIMA

The drag coefficient of porous materials in slow flow is examined theoretically and experimentally. A theoretical solution for a three-dimensional Oseen's equation is obtained by using a variational consideration and the cell model. From this solution, the drag coefficient is determined as a function of Reynolds number and volume fraction. Theoretical results are compared with experimental ones obtained by using spheres or a coil model as a porous material. It is found that the theoretical analysis is available for Oseen's equation and that the upper limit of effective region for Reynolds number is about 30. The value of drag coefficient for a general porous material seems to lie in the region between the value obtained from 3-dimensional theory and that obtained from 2-dimensional theory.

Key Words: Oseen's Equation, Porous Material, Drag Coefficient, Cell Model, Variational Method

1. 緒 言

既報⁽¹⁾では、互いに平行な円柱群の間を流体が透過するときの圧力こう配と平均流速とが二次比例の関係を示す領域について、二次元理論解析をおこない、その結果を実験結果と比較検討した。

本報では対象を球群および多孔性媒質にしほり、ここでの流体抵抗を理論的に求め、その妥当性を実験により調べる。理論解析では、球群中を流体が透過するときの抵抗係数をレイノルズ数および球群の体積分率の関数として算出する。流体の運動方程式としてはオゼン近似の方程式を用い、多数の粒子の存在により生ずるいわゆる多体効果に対してはセルモデルの方法、オゼン方程式の解法ならびに抵抗算定法には変分問題的考察法を利用する。実験では、多孔性媒質のモデルとして、球群およびコイルモデルを用いる。このコイルモデルは、銅線をコイル状に巻いてから小さく切断したものを相当な量用いて多孔性媒質のモデルとするもので、これを伸縮することにより種々の体積

分率を得ることができる。

2. 理 論

円柱群の場合⁽¹⁾と同様に、座標系は正規直交直線系とし、位置座標を x_i 、流体の密度、粘性係数、圧力および速度を各々 ρ, μ, p, v_i とすればオゼン方程式は

$$\left. \begin{aligned} \rho \bar{v}_k \partial_k v_i &= -\partial_i p + \mu \Delta v_i \\ \partial_k v_k &= 0 \quad (i=1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

となる。ここで、 $\bar{v}_k$ は平均流速、 $\partial_i = \partial/\partial x_i$ 、 $\Delta = \partial_k \partial_k$ 、であり重複指標については総和規約を適用する。次の変分形式を定義する：

$$\begin{aligned} Q(\delta) &= \int_V 2\mu \partial_i v_{ji} \partial_i (\delta v_j) dx \\ &+ \int_V \rho \bar{v}_k \partial_k v_i \delta v_i dx \\ &- \delta \int_V p \partial_i v_i dx \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここで、 V は任意の領域であり、記号 $\{ \}$ は

$$\partial_i v_{ji} \equiv (\partial_i v_j + \partial_j v_i - \delta_{ij} \operatorname{div} v/3)/2$$

の意味をもつ。領域 V の境界面の一部 S_v では変位 v_i^* が指定され、残りの境界面 S_σ では応力 σ_i^* が指定されているとする。次の変分方程式

$$Q(\delta) = \int_{S_\sigma} \sigma_i^* \delta v_i dS, \quad v_i = v_i^* \text{ on } S_v \dots\dots\dots (3)$$

* 昭和62年3月14日 東北支部第22期総会講演会において講演、原稿受付 昭和61年5月19日。

^{*1} 正員、東京農工大学 (〒184 小金井市中町2-24-16)。

^{*2} 正員、海洋科学技術センター (〒237 横須賀市夏島町2-15)。

^{*3} 正員、日本大学生産工学部 (〒272 習志野市泉町1-2-1)。

と式(1)とが等価であることはすぐわかる。ここで、 $S_o + S_\sigma = S \equiv \partial V$ である。

半径 a の球の分布密度を n 個/体積とすればセルの半径 b は次式で与えられる。

$$b = [3/(4\pi n)]^{1/3} \dots\dots\dots (4)$$

平均速度 $\bar{v}_i$ および動径 x_i の方向の単位ベクトルを各々 c_i, e_i とし両者のなす角の余弦を w とする。

$$\bar{v}_i = c_i \bar{v}, \quad e_i = x_i/r, \quad w = c_i e_i \dots\dots\dots (5)$$

また、ベクトル τ_i を次のように定義する。

$$\tau_i \equiv c_i - w e_i, \quad e_i \tau_i = 0, \quad \tau_i \tau_i = 1 - w^2$$

速度場 v_i とその主流方向の成分 v_c を動径および接線方向の成分 v_R, v_T を用いて次のように書く。

$$\left. \begin{aligned} v_i &= v_R(r, w) e_i + v_T(r, w) \tau_i \\ v_c &= c_i v_i = w v_R + (1 - w^2) v_T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

一般に速度成分 v_R, v_T をルジャンドル関数 $P_n(w)$ で次のように展開することができる。

$$v_R = \sum v_{R(n)}(r) P_n(w), \quad v_T = \sum v_{T(n)}(r) P_n(w)$$

今後、次の形の関数に範囲を絞ることにする。

$$\left. \begin{aligned} v_R &= [f(r) P_1(w) + g(r) P_2(w)] \bar{v} \\ v_T &= [\bar{f}(r) P_0(w) + \bar{g}(r) P_1(w)] \bar{v} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

したがって、 $\text{div } v = 0$ を要求すると

$$\bar{f} = rf'/2 + f, \quad \bar{g} = rg'/2 + g \dots\dots\dots (8)$$

となり、変形速度および慣性力は次の形となる。

$$\partial_{(h)} v_{(i)} = (D_{1h} e_{hi} + D_{11} \tau_{hi} + D_{111} e_{(h} \tau_{i)} + D_{0h} \delta_{hi}) \bar{v}/r \dots\dots\dots (9)$$

$$\rho \bar{v} c_h \partial_h v_i = (K_R e_{hi} + K_T \tau_{hi}) \rho \bar{v}^2 / r \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $'$ は r に関する微分であり、また

$$\begin{aligned} e_{hi} &= e_h e_i, \quad \tau_{hi} = \tau_h \tau_i, \quad e_{(h} \tau_{i)} = (e_h \tau_i + e_i \tau_h)/2 \\ D_1 &= (rg' + 2g) P_0/6 + 3rf' P_1/2 + (4rg' - g) P_2/3 \\ D_{11} &= (rg' + 2g) P_0/2 \\ D_{111} &= (r^2 f'' + 2rf') P_0/2 + (r^2 g'' + 2rg' + 4g) P_1/2 \\ D_0 &= -(rg' + 2g) P_0/6 - rf' P_1/2 - (rg' - g) P_2/3 \\ K_R &= (rg' + 4g) P_1/5 + rf' P_2 + 4(rg' - g) P_3/5 \\ K_T &= (r^2 g'' + 4rg' + 2g) P_0/6 + (r^2 f'' + 2rf') P_1/2 \end{aligned}$$

図 1 セルモデル

$$+ (r^2 g'' + rg' - g) P_2/3$$

である。

速度場の関数領域を式(7)のように制限したもとで合理的な方程式系を導くには、変分方程式を利用するのが最良の方策である。1個のセルの場合に対しては、式(2)、(3)を少し書きかえて次のようにする。

$$\begin{aligned} Q_1(\delta) &= \int_{a \leq r \leq b} 2\mu \partial_{(i} v_{j)} \partial_{(i} \delta v_{j)} dx \\ &+ \int_{a \leq r \leq b} \rho \bar{v}_h \partial_h v_i \delta v_i dx \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

また、境界条件は次のようにおく。

$$r = a \text{ で } v_i = 0 \dots\dots\dots (12 \cdot a)$$

$$r = b \text{ で } \langle v_c \rangle = \lambda \bar{v} \dots\dots\dots (12 \cdot b)$$

ここで、 $\langle * \rangle$ は $r = \text{const.}$ の球面上での平均値を意味する。式(12)の中の λ は未定の定数で、セル表面での速度が代表速度 $\bar{v}$ の何倍になるかを示す数値である。

粘性的および動的な仕事率 $Q_\mu(\delta), Q_\rho(\delta)$ は少し煩雑な計算の後、次のようになる。

$$\begin{aligned} Q_\mu(\delta) &= 4\pi(2\mu \bar{v}^2) a \{ [\sum_\mu(\delta) r/a]_{r=b} \\ &+ \int_a^b \Omega_\mu(\delta) d(r/a) \} \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_\rho(\delta) &= 4\pi(\rho \bar{v}^3) a^2 \{ [\sum_\rho(\delta) (r/a)^2]_{r=b} \\ &+ \int_a^b \Omega_\rho(\delta) (r/a) d(r/a) \} \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \sum_\mu(\delta) &\equiv [r(r^2 f'' + 2rf') \delta f' \\ &- (r^3 f''' + 4r^2 f'' - 4rf') \delta f]/12 \\ &+ [r(r^2 g'' + 2rg' + 4g) \delta g' \\ &- (r^3 g''' + 4r^2 g'' - 16rg' - 8g) \delta g]/60 \\ Q_\mu(\delta) &\equiv (r^4 f'''' + 8r^3 f''' + 8r^2 f'' - 8rf') \delta f/12 \\ &+ (r^4 g'''' + 8r^3 g''' + 24rg' + 24g) \delta g/60 \\ \sum_\rho(\delta) &\equiv [(r^2 g'' + 6rg' + 4g) \delta f \\ &+ (r^2 f'' + 2rf') \delta g]/30 \\ \Omega_\rho(\delta) &\equiv -[(r^3 g''' + 8r^2 g'' + 8rg' + 8g) \delta f \\ &+ (r^3 f''' + 4r^2 f'' - 4rf') \delta g]/30 \end{aligned}$$

である。全体としての変分は

$$\begin{aligned} Q_1(\delta) &= Q_\mu(\delta) + Q_\rho(\delta) \\ &= 4\pi(2\mu \bar{v}^2 a) [\sum(\delta)_{r=b} \\ &+ \int_a^b \Omega(\delta) d(r/a)] \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \sum(\delta) &\equiv \sum_\mu(\delta) r/a + Re \sum_\rho(\delta) (r/a)^2/4 \\ \Omega(\delta) &\equiv \Omega_\mu(\delta) + Re \Omega_\rho(\delta) (r/a)/4 \\ Re &= 2\rho a \bar{v}/\mu \end{aligned}$$

であり、 Re は球の直径を代表長さとするレイノルズ数である。変分方程式(11)に対するオイラーの微分方程式は $\Omega(\delta) = 0$ から得られ、次の形に整理する。

$$X(f) = Re \cdot \chi \bar{V}(g)/10 \dots\dots\dots (16 \cdot a)$$

$$Y(g) = Re \cdot \chi \bar{X}(f)/2 \quad \dots\dots\dots (16 \cdot b)$$

ここで

$$X(f) = \chi^4 \ddot{f} + 8\chi^3 \dot{f} + 8\chi^2 \ddot{f} - 8\chi \dot{f}$$

$$\bar{X}(f) = \chi^3 \ddot{f} + 4\chi^2 \dot{f} - 4\chi \dot{f}$$

$$Y(g) = \chi^4 \ddot{g} + 8\chi^3 \dot{g} - 24\chi \dot{g} + 24g$$

$$\bar{Y}(g) = \chi^3 \ddot{g} + 8\chi^2 \dot{g} + 8\chi \dot{g} - 8g$$

$$\chi = r/a, = d/dx$$

である。連立微分方程式(16)の各微分形式は同次であるから、まず χ^n への作用を調べてみる。

$$\left. \begin{aligned} X(\chi^n) &= (n+3)(n+1)n(n-2)\chi^n \\ \bar{X}(\chi^n) &= (n+3)n(n-2)\chi^n \\ Y(\chi^n) &= (n+4)(n+2)(n-1)(n-3)\chi^n \\ \bar{Y}(\chi^n) &= (n+4)(n+2)(n-1)\chi^n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

X と $\bar{X}$ とを同時に零にするのは、 $n = -3, 0, 2$ である。このことから $f = \chi^{-3}, 1, \chi^2$ と $g = 0$ の組合せは式(16)を満足する。一方 Y と $\bar{Y}$ を同時に零にするのは $n = -4, -2, 1$ である。このことから $g = \chi^{-4}, \chi^{-2}, \chi$ と $f = 0$ の組合せは式(16)を満足する。すなわち、 A, B などを任意の定数として

$$f = A_{-3}\chi^{-3} + A_0 + A_2\chi^2$$

$$g = B_{-4}\chi^{-4} + B_{-2}\chi^{-2} + B_1\chi$$

は f, g の一般解の一部を形成する。式(16)は f, g について各々四階の微分方程式であるから、各々もう一つの素解がある。 $f = \chi^{-1}$ は $X(f) = 0$ とするが $\bar{X}(f) \neq 0$ である。これから出発する次のような解が作られる。 $f = \chi^{-1}$ を式(16)₂に代入すれば $Y(g)$ は χ^0 の項だけでなければならないから $g \sim 1$ が得られる。これを式(16・a)に代入すれば $f \sim \chi$ が得られ、再び式(16・b)から $g \sim \chi^2$ が得られる。このようにして、最終的に

$$\left. \begin{aligned} f = F(\chi) &\equiv \chi^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m} \chi^{2m} \\ g = \bar{G}(\chi) &\equiv Re/8 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \bar{C}_{2m} \chi^{2m} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

の形の解が存在することがわかる。式(16)、(18)から

$$C_{2(m+1)} = Re^2/80 \cdot \bar{C}_{2m}/(2m+1),$$

$$\bar{C}_{2m} = 4C_{2m}/(2m+4)$$

がえられ、上式からの $C_{2m}, \bar{C}_{2m}$ の一般項は

$$C_{2m} = (Re/2\sqrt{5})^{2m} 1/[2^m(m+1)!(2m-1)!!]$$

$$\bar{C}_{2m} = (Re/2\sqrt{5})^{2m} 2/[2^m(m+2)!(2m-1)!!]$$

$$(2n+1)!! = (2n+1)!/(2^n \cdot n!) = (2n+1)(2n-1)$$

となる。同じような過程を経て $g = \chi^3$ から出発する解があり、その解は次のようになる。

$$f = \bar{F}(\chi) \equiv Re/40 \chi^4 \sum_{m=0}^{\infty} \bar{D}_{2m} \chi^{2m} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$g = G(\chi) \equiv \chi^3 \sum_{m=0}^{\infty} D_{2m} \chi^{2m}$$

$$\bar{D}_{2m} = (Re/2\sqrt{5})^{2m} 27!/[2^m(m+2)!(2m+7)!!]$$

$$D_{2m} = (Re/2\sqrt{5})^{2m} 7!/[2^m(m+1)!(2m+7)!!]$$

この素解を補って、一般解は次のようになる。

$$f = A_{-3}\chi^{-3} + A_0 + A_2\chi^2 + AF(\chi) + B\bar{F}(\chi)$$

$$g = B_{-4}\chi^{-4} + B_{-2}\chi^{-2} + B_1\chi + BG(\chi) + A\bar{G}(\chi)$$

.....(19)

ここで、

$$F = (Re/2\sqrt{5})[(z^{-2} - z^{-3})e^z - (z^{-2} + z^{-3})e^{-z} + 2z^{-3}]$$

$$\bar{F} = 21\sqrt{5}(Re/2\sqrt{5})^{-3}[(z^{-2} - z^{-3})e^z + (z^{-2} + z^{-3})e^{-z} - 2/3 - z^2/15]$$

$$G = 105(Re/2\sqrt{5})^{-3}[(z^{-2} - 3z^{-3} + 3z^{-4})e^z - (z^{-2} + 3z^{-3} + 3z^{-4})e^{-z} - 2z/15]$$

$$\bar{G} = (Re/2)[(z^{-2} - 3z^{-3} + 3z^{-4})e^z + (z^{-2} + 3z^{-3} + 3z^{-4})e^{-z} - 6z^{-4} + z^{-2}]$$

$$z \equiv (Re/2\sqrt{5}) \cdot \chi$$

であり、これらを求めるためにガンマ関数、変形ベッセル関数 $I_\nu(z)$ および半奇数の ν に対する $I_\nu(z)$ の閉じた形を利用している。

セルの内部でオイラーの微分方程式を満足する解を用いるとすると式(15)で積分項は消えて Q_1 は Σ によるだけとなる。 Σ は式(14)、(15)の下式を用いれば計算できる。 $\chi = r/a, \equiv d/dx$ とおき、各微分項とその係数が同次であることに注意すれば

$$\begin{aligned} \Sigma(\delta) &\equiv \chi/12 \cdot [\chi S(f)\delta \dot{f} - M(f)\delta f \\ &\quad + Re\chi \bar{N}(g)\delta \dot{g}/10] \\ &\quad + \chi/60 \cdot [\chi T(g)\delta \dot{g} - N(g)\delta g \\ &\quad + Re\chi \bar{M}(f)\delta \dot{g}/2] \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

ここで

$$S(f) \equiv \chi^2 \ddot{f} + 2\chi \dot{f},$$

$$M(f) \equiv \chi^3 \ddot{f} + 4\chi^2 \dot{f} - 4\chi \dot{f},$$

$$N(g) \equiv \chi^3 \ddot{g} + 4\chi^2 \dot{g} - 16\chi \dot{g} - 8g,$$

$$T(g) \equiv \chi x^2 \ddot{g} + 2\chi \dot{g} + 4g,$$

$$\bar{M}(f) \equiv \chi^2 \ddot{f} + 2\chi \dot{f}, \quad \bar{N}(g) \equiv \chi^2 \ddot{g} + 6\chi \dot{g} + 4g$$

であり、結局式(15)は次式に帰着する。

$$Q_1(\delta) = 4\pi(2\mu \bar{v}^2 a)[\Sigma(\delta)]_{r=b} \quad \dots\dots\dots (21)$$

主流方向の速度成分は式(6)₂で与えられ、これに式(7)を代入すると

$$\begin{aligned} v_c/\bar{v} &= (f + 2\bar{f})P_0/3 + 2(g + \bar{g})P_1/5 \\ &\quad + 2(f - \bar{f})P_2/3 + (3g - 2\bar{g})P_3/5 \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

が得られる。ここで

$$\int_{-1}^1 w^m P_n(w) dw = 0 \quad (m=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

$$dS = 2\pi r^2 dw \quad (r = \text{const. の面上で})$$

を用いて平均値を求めると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \langle v_c \rangle / \bar{v} &= (f + 2\bar{f})/3 \equiv \lambda \\ \langle v_c w \rangle / \bar{v} &= 2(g + \bar{g})/15 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

セル表面で速度 v_i が $\lambda \bar{v}_i$ であることを期待すれば、

$\langle v_c w \rangle = 0$ したがって上式より $g + \bar{g} = 0$ となる。もう少し条件を狭くする。セルの同等性を基礎にすると、 v_c はセル表面で前後対称でなければならない。このことを要求すれば、式(22)から $r=b$ で $g=0$, $\bar{g}=0$ となり、したがって式(8)から

$$\chi g = 0 \dots\dots\dots (24)$$

となる。また、 λ が一定のとき式(23)の変分をとれば $\delta f + 2\delta \bar{f} = 0$ となり、式(8)から

$$\chi \delta \bar{f} = -3\delta f \dots\dots\dots (25)$$

の関係がえられる。このとき式(20)はセル表面で

$$\Sigma = \chi \left[-M^*(f) + Re \chi \bar{N}(g) / 10 \right] \delta f / 12 \left. \begin{array}{l} M^* \equiv M + 3S = \chi^3 \ddot{f} + 7\chi^2 \dot{f} + 2\chi f \end{array} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

である。

次に、関数 f, g に含まれる 8 個の未定係数を決定する。粒子の表面では $v_i = 0$ であるから式(7), (8)より

$$r=a \text{ で } f=0, \chi \dot{f}=0, g=0, \chi g=0 \dots\dots\dots (27)$$

なる境界条件式がえられる。セル表面では式(24)を仮定する。また、 $g(\chi)$ の係数は次のようにおく。

$$B_{-4} = B'_{-4}A, B_{-2} = B'_{-2}A, B_1 = B'_1A, B = B'A$$

$r=a$ のとき $\chi=1$ であるから B' の決定方程式は

$$\left. \begin{array}{l} B'_{-4} + B'_{-2} + B'(G)_{za} = -(\bar{G})_{za} \\ -4B'_{-4} - 2B'_{-2} + B'_1 + B'(zG')_{za} = -(z\bar{G}')_{za} \\ B'_{-4}\chi_0^{-4} + B'_{-2}\chi_0^{-2} + B'_1\chi_0 + B'(G)_{zb} = -(\bar{G})_{zb} \\ -4B'_{-4}\chi_0^{-4} - 2B'_{-2}\chi_0^{-2} + B'_1\chi_0 \\ + B'(zG')_{zb} = -(z\bar{G}')_{zb} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \chi_0 &\equiv b/a, \quad za \equiv (Re/2\sqrt{5}), \\ zb &\equiv (Re/2\sqrt{5}) \cdot b/a, \\ zG' &\equiv 105(Re/2\sqrt{5})^{-3} \left[\sum_{\epsilon=\pm 1} \epsilon (\epsilon z^{-1} - 5z^{-2} \right. \\ &\quad \left. + 12\epsilon z^{-3} - 12z^{-4}) e^{\epsilon z} - 2z^{-2}/15 \right] \\ z\bar{G}' &\equiv Re/2 \left[\sum_{\epsilon=\pm 1} (\epsilon z^{-1} - 5z^{-2} + 12\epsilon z^{-3} \right. \\ &\quad \left. - 12z^{-4}) e^{\epsilon z} + 24z^{-4} - 2z^{-2} \right] \end{aligned}$$

である。残りの未定係数の決定は、まず、関数 f に対する二つの条件式(27)を用いる。次の条件は、式(26)で与えられる Σ を零とおく。これはセル表面での平均速度が $\lambda \bar{v}_c$ のときの最適解を与えるからである。もう一つの条件は平均速度 $\bar{v}$ が体積平均の速度に等しいことを用いる。すなわち

$$\bar{v}_c \equiv \int_{a \leq r \leq b} v_i dx / [4\pi(b^3 - a^3)/3]$$

より

$$r=b \text{ で } f=1-\chi_0^{-3} \dots\dots\dots (29)$$

を得る。この四つの条件から A の決定式は

$$\left. \begin{array}{l} A_{-3} + A_0 + A_2 + A(F + B'\bar{F})_{za} = 0 \\ -3A_{-3} + 2A_2 + A(zF' + B'z\bar{F})_{za} = 0 \\ A_{-3}\chi_0^{-3} + A_0 + A_2\chi_0^2 + A(F + B'\bar{F})_{zb} \\ = 1 - \chi_0^{-3} \\ 18A_{-3}\chi_0^{-3} + 18A_2\chi_0^2 + A(H)_{zb} = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

ここで

$$\begin{aligned} zF'(z) &\equiv (Re/2\sqrt{5}) \left[\sum_{\epsilon=\pm 1} \epsilon (\epsilon z^{-1} - 3z^{-2} \right. \\ &\quad \left. + 3\epsilon z^{-3}) e^{\epsilon z} - 6z^{-3} \right] \\ z\bar{F}'(z) &\equiv 21\sqrt{5}(Re/2\sqrt{5})^{-3} \left[\sum_{\epsilon=\pm 1} (\epsilon z^{-1} - 3z^{-2} \right. \\ &\quad \left. + 3\epsilon z^{-3}) e^{\epsilon z} - 2z^2/15 \right] \\ H(z) &\equiv M^*(F) + B'M^*(\bar{F}) - Re/10 \cdot \chi [-2B_{-2}\chi^2 \\ &\quad + 10B'_1\chi + B'\bar{N}(G) + \bar{N}(\bar{G})] \\ M^*(F) &\equiv (Re/2\sqrt{5}) \left[\sum_{\epsilon=\pm 1} \epsilon (\epsilon z - 6\epsilon z^{-1} + 18z^{-2} \right. \\ &\quad \left. - 18\epsilon z^{-3}) e^{\epsilon z} + 36z^{-3} \right] \\ M^*(\bar{F}) &\equiv 21\sqrt{5}(Re/2\sqrt{5})^{-3} \left[\sum_{\epsilon=\pm 1} (\epsilon z - 6\epsilon z^{-1} \right. \\ &\quad \left. + 18z^{-2} - 18\epsilon z^{-3}) e^{\epsilon z} - 18z^2/15 \right] \\ \bar{N}(G) &\equiv 105(Re/2\sqrt{5})^{-3} \sum_{\epsilon=\pm 1} \epsilon (1 - \epsilon z^{-1} \\ &\quad + z^{-2}) e^{\epsilon z} - 4z/3] \\ \bar{N}(\bar{G}) &\equiv Re/2 \left[\sum_{\epsilon=\pm 1} (1 - \epsilon z^{-1} + z^{-2}) e^{\epsilon z} - 2z^{-2} \right] \end{aligned}$$

である。

最後に、抵抗力を計算する。平均速度 $\bar{v}$ はこれまで一定のものと考えてきたが、この場合、これも変分の対象としよう。したがって、セルの中で解いた関数 f を用いれば、変分 δv_i は

$$\delta v_i \rightarrow \delta(f\bar{v}) = (f + Re\delta f/\partial Re)\delta \bar{v}$$

になる。これを式(21)に代入する。この式はセル表面で成立する式であり、セル表面では $g, \dot{g}$ は常に零としていたからこれからの寄与はない。また、 $f + 2\bar{f} = 3\lambda$ とおいたから $\chi \dot{f} = 3\lambda - 3\dot{f}$ であり、したがって

$$\begin{aligned} \chi \beta(\dot{f}\bar{v}) &= 3[(\lambda + Re\partial \lambda/\partial Re) \\ &\quad \times (f + Re\delta f/\partial Re)]\delta \bar{v} \end{aligned}$$

となる。最後の項は式(30)の第4式の中に入っているので抵抗力の計算の際は除外できる。このようにして Q_1 は

$$Q_1 = \pi(2\mu \bar{v} a) \chi S(f)(\lambda + Re\partial \lambda/\partial Re)\delta \bar{v}$$

となる。ところで式(3)の $Q(\delta)$ は各セルの $Q_1(\delta)$ の和である。式(3)でみれば

$$Q(\delta) = \int_V D_i \delta \bar{v}_i dx$$

と書けるととき D_i は巨視的な抵抗と考えられる。セルの体積を巨視的な体積素片と考えれば、単位体積当た

りの抵抗 D は

$$\begin{aligned} D &= (Q_1/\delta\bar{v})/(4\pi b^3/3) \\ &= 3/2 \cdot \mu(a/b^3)\chi S(f)(\lambda + Re\partial\lambda/\partial Re)\bar{v} \\ C_D &= D/[(\rho\bar{v}^2/2)(n\pi a^2)] \\ &= 8/Re \cdot [\chi S(f)]_{ab}[\lambda + Re\partial\lambda/\partial Re]_{ab} \dots\dots (31) \end{aligned}$$

と定義する。ここで

$$\begin{aligned} S(f) &= 6A_3\chi^{-3} + 6A_2\chi^2 + A[S(F) + B'S(\bar{F})] \\ S(F) &= (Re/2\sqrt{5}) \left[\sum_{\epsilon=\pm 1} \epsilon(1-3\epsilon z^{-1}+6z^{-2} \right. \\ &\quad \left. -6\epsilon z^{-3})e^{\epsilon z} + 12z^{-3} \right] \\ S(\bar{F}) &= 21\sqrt{5}(Re/2\sqrt{5})^{-3} \left[\sum_{\epsilon=\pm 1} (1-3\epsilon z^{-1}+6z^{-2} \right. \\ &\quad \left. -6\epsilon z^{-3})e^{\epsilon z} - 2z^2/5 \right] \\ \lambda &= A_0 + 5A_2\chi^2/3 + A[(Re/6\sqrt{5})(e^z + e^{-z})/z \\ &\quad + 7\sqrt{5}(Re/2\sqrt{5})^{-3}((e^z - e^{-z})/z - 2 - z^2/3)] \end{aligned}$$

である。

3. 実 験

2章では多孔性媒質中を流体が流れるときの抵抗係数を多孔性媒質の体積分率およびレイノルズ数の関数として理論的に求めた。ここでは、多孔性媒質中を流体が透過するときの圧力降下と流量を測定し、それよ

表 1 圧力降下 Δp と平均流速 U との関係

porous model	volume fraction	pressure drop $\Delta p(\text{Pa/cm})$
sphere	0.615	$(4.42U^2 + 60.0U) \times 10^{-1}$
	0.618	$(4.87U^2 + 59.9U) \times 10^{-1}$
	0.621	$(4.92U^2 + 65.6U) \times 10^{-1}$
coil $a=0.2 \text{ mm}$	0.091	$(1.70U^2 + 23.8U) \times 10^{-1}$
	0.155	$(3.57U^2 + 59.7U) \times 10^{-1}$
	0.193	$(12.30U^2 + 86.6U) \times 10^{-1}$
	0.261	$(12.5U^2 + 151U) \times 10^{-1}$
	0.327	$(13.2U^2 + 184U) \times 10^{-1}$
coil $a=0.25 \text{ mm}$	0.107	$(1.44U^2 + 12.7U) \times 10^{-1}$
	0.164	$(3.44U^2 + 37.3U) \times 10^{-1}$
	0.208	$(6.95U^2 + 35.1U) \times 10^{-1}$
	0.332	$(10.3U^2 + 123U) \times 10^{-1}$
	0.371	$(10.9U^2 + 190U) \times 10^{-1}$
	0.419	$(17.9U^2 + 267U) \times 10^{-1}$

図 2 コイルモデル

り抵抗係数を決定する。多孔性媒質のモデルとしてはガラス球群およびコイルモデルをもちいた。球の平均半径は 1.8 mm である。コイルモデルは銅線を直径 3 mm の棒にコイル状に巻いてから小さく切断したもので、これを伸縮させることにより体積分率を変化させることができる (図 2)。銅線の線径としては 0.4 mm および 0.5 mm の 2 種類をもちいた。

3.1 実験装置 実験装置の概略を図 3 に示す。テストセクションは長さ 600 mm、内径 50 mm のアクリル管で、圧力測定孔間の距離は 400 mm である。

3.2 実験結果 平均流速と圧力降下との関係の一部を図 4 に示す。ここで、縦軸は単位長さ当たりの圧力降下 Δp 、横軸は平均流速 U である。実験結果を最小二乗法で整理したときの関係式を表 1 に示す。

4. 考 察

理論結果との比較のために、実験による無次元抵抗係数を定義する。表 1 からわかるように、圧力こう配と平均流速との関係は

図 3 実験装置

図 4 圧力降下と流速との関係 (コイル)

$$\Delta p = \alpha U^2 + \beta U \dots\dots\dots (32)$$

で表せる。したがって無次元抵抗係数 C_D は

$$\begin{aligned} C_D &= z_c(\alpha U^2 + \beta U) / (\rho U^2 / 2)(n\pi a^2) \\ &= (8/3)[\mu^2 \alpha Re^2 / (4\rho^2 a^2) + \mu \beta Re / (2\rho a)] \\ &\quad \div [\mu^2 / (4\rho a^3) z_d Re^2 / z_c] \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

となる。ここで、 z_c 、 z_d は各々流体および粒子の体積分率、 a は粒子の半径である。コイルモデルの場合、線径の半分を a とした。

4.1 レイノルズ数による影響

4.1.1 球群の場合 球群における抵抗係数とレイノルズ数との関係を図5に示す。ここで実線は実験、点線は理論より求めた曲線である。前報⁽¹⁾における円

表2 レイノルズ数の有効範囲

volume fraction	0.2	0.3	0.5	0.6
cylinders	6	8	10	11
spheres	24	27	29	30

図5 抵抗係数とレイノルズ数との関係 (球)

柱群の場合と同様に、レイノルズ数がある値に達すると理論曲線が大きな振動を示す。この数値的な原因は円柱群の場合と同じく、係数の決定方程式(30)にあると思われる。しかし、理論曲線が振動しないレイノルズ数の領域では、両曲線は良く一致しておりこの範囲では本理論がかなり有効であることがわかる。また、表2に示すように円柱群に対する理論結果と比較すると球群に対するそのほうがレイノルズ数の有効範囲、すなわち抵抗係数の値が振動しだすまでの範囲が大きいことがわかる。

4.1.2 コイルモデルの場合 抵抗係数にレイノルズ数との関係を図6に示す。線径が0.4 mmの場合であり、図6中、実線は実験、点線は三次元理論、一点鎖線は前報における二次元理論の結果である。コイルモデルは、球群の場合に体積分率が0.6付近に限定されてしまうため、それを補うために考案したもので、

(a)

図6 抵抗係数とレイノルズ数との関係 (コイル, $a=0.2$ mm)

(b)

図7 抵抗係数と体積分率との関係

形状からみても球群とは異なる。また、レイノルズ数の代表長さの定義もあいまいであるが、球モデルによる理論解析がどの程度多孔性媒質内の流れを理論的に表現できるかを見きわめる見安となる。したがって、実験結果は三次元で整理した。この結果をみると理論曲線はあるレイノルズ数になると振動しはじめるが、その有効範囲で比較してみるといずれの場合においても、実験曲線は二次元と三次元の理論曲線の間に入っている。このことは、コイルモデルの性質が円柱群の二次元性と球群の三次元性とを併せもつことから判断して、理論の妥当性をある程度示しているといえる。

4・2 体積分率による影響 図7(a), (b)に抵抗係数と体積分率との関係を示す。各々レイノルズ数が1.0, 2.0のときのもので、縦軸は抵抗係数、横軸は粒子の体積分率で、図7中、実線は三次元理論曲線、点線は前報での二次元理論曲線、△印は球群の実験結果、○印および●印はコイルモデルの実験結果である。図7から明らかなように、球群の場合、実験と理論が非常に良く一致しているが、体積分率が小さいときにどのようなになるかは不明であり、この点の解明が必要である。コイルモデルの場合、4・1節で述べたのと同様に、いずれについても実験点が二次元と三次元の理論曲線の間に入っている。つまり、この多孔性媒質モデルが二次元性および三次元性を兼ね備えているとい

える。一般の多孔性媒質の抵抗値は、この結果から判断して、二次元と三次元の理論値の中間の値をとると思われる。

5. ま と め

セルモデルおよび変分問題的考察法を利用して、多孔性媒質中を流体がやや速めに透過する場合の抵抗係数をレイノルズ数と媒質の体積分率の関数として求めた。球群およびコイルモデルを用いた実験結果との比較から、セルモデルの理論はオーゼン近似の方程式に対してもかなり有効な手段であり、レイノルズ数に対する有効範囲は体積分率にもよるが約30程度である。なお、体積分率が小さい場合については不明の点もあるのでさらなる研究が必要である。コイルモデルの場合、実験値は二次元と三次元の理論値の中間の値をとる。一般の多孔性媒質の抵抗値は、コイルモデルの実験結果から判断して、二次元と三次元の理論値の中間の値をとると思われるが、これについてもさらなる研究が必要である。

文 献

- (1) 加藤・ほか3名, 平行な円柱群をよぎる低速流(抗係数に対するレイノルズ数の影響) 機論, 投稿中.

討 論

〔質問〕 石 塚 勝

(神戸芝総合研究所機械研究所)

理論に興味深く拝見した。深く研究されたことに敬意を表する。一つはお聞きしたい。図6で見るような計算結果の振動は Re 数が大になるにつれてどのような挙動を示すのか、単に係数の決定方程式に原因があると片づけて良いのか著者らの見解を伺いたい。

〔回答〕 理論的な抵抗係数の振動が始まる Re 数は粒子の体積分率が増加するにしたがい大きくなっている。振動のモードも体積分率によって異なるが、体積分率の増加に伴い波長が小さくなり、ほとんどの場合、それらは減衰振動であり、 Re 数が大きくなるに従い振動前の曲線の延長線上に収束する傾向を示す。

この振動の原因としては、

- (1) セルモデルの方法の欠点
- (2) 速度場の領域を式(7)の関数で制限したこと
- (3) セル表面における境界条件のとり方

など種々に考えられる。現在のところ数値的に検討できるのは(3)の場合、すなわち λ の値についてのみである。それに対する検討の結果、 λ が振動の原因の一つであることが判明した。著者らは(2)の場合、すなわち関数領域を式(7)のように制限したことも振動の重要な原因と考えて式(7)を拡張した場合の解析解を得ようと試みたがいまだ得られていない。現在、セル内の流れ場を数値的に解析する予定でいる。それが得られれば振動の原因がある程度はつきりすると考えている。