傾斜平板間の液膜のメニスカス不安定性*
(第2報, 分離面に現れたパターンの解析)古 口 日 出 男^{*1}Meniscus Instability of a Thin Liquid Film between Tilted Plates
(2nd Report, Pattern Analysis on Separated Surfaces)

Hideo KOGUCHI

Theoretical analysis of the flow with a free surface was carried out in order to apply the theory on meniscus instability to fractography of polymers and glassy metals. To simulate material flow around a crack tip, a viscous fluid is confined between closely spaced plates. Then, finger patterns of liquid are frequently observed on the separated surfaces of plates. Similar patterns are observed on fracture surfaces of polymers. The linear instability theory of flow is used for analysis of wave length and initiation position of finger patterns. Measured results of the wave length and the initiation position of finger patterns agree with a curve using the modified capillary number regardless of the thickness of liquid film and pulled velocity of plates, respectively. The experimental results of initiation position were four times the values of the calculated one.

Key Words: Fluid Mechanics, Meniscus Instability, Thin Liquid Film, Modified Capillary Number, Surface Tension, Wave Length, Disturbance, Fracture Surface

1. 緒 言

高分子材料やガラス状金属の破面に筋状のパターンが観察されることがある。ここではこの筋状のパターンが液体のメニスカス自由表面に発生する不安定性と同様の原因によってできると考え、簡単のためまず粘性流体の自由表面の流れの解析を行った。実験では、2枚の傾斜平板の間に液体をはさみ、その板を引き離れた時空気の流入と液体の流動によって分離面に作られるパターンを調べた。この現象は接着剤で接着した物体をはがす時など、日常よく見うけられるにもかかわらずあまり研究されていない。

前報⁽¹⁾で述べたように板の分離速度がある速度以上になると液体の自由表面に乱れが生じる。これをメニスカス不安定と呼んでいる。この自由表面の乱れはかなり規則正しく、前報では本研究で新たに提案した修正キャピラリ数と乱れの波長の関係を理論的に導き実験結果と比較し、両者はよく一致することを示した。

メニスカス不安定性の研究は、いわゆる Hele-Shaw Cell 中の密度の異なる流体の界面の乱れを調

べた Saffman-Taylor⁽²⁾の研究に始まり、現在も多く
の研究者の関心を集めている。

本報では、前報の解析をさらに詳細に行い実験結果との比較を行った。そして、自由表面に発生する乱れの成長過程を観察し、いわゆるフィンガパターン(板面上に液体が指状に残ってできるパターン)の発生位置と前報で提案した修正キャピラリ数の関係を調べた。そして、修正キャピラリ数は、本研究のような自由表面の流れを整理する有力なパラメータであることを示した。

2. 実験方法

実験方法については、前報に詳しく述べてあるのでここでは簡単に説明する。実験に使用した平板は、長さ $L=60$ mm, 幅 $B=100$ mm, 厚さ 5 mm のガラス板と厚さ 10 mm で同じ大きさのポリカーボネート板を接着剤で接着したものである。2枚の平板のガラス面同士を向かい合わせ、その間にグリセリンを入れ、それらの板を定速度引張試験機で一定の速度で引張り、自由表面付近を写真またはビデオ撮影し、それからメニスカスの乱れの波長と乱れの成長の様子を観察した。グリセリンの粘度は 1.61 Pa·s, 表面張力は 20°C における値 63.4 mN/m である⁽³⁾。

* 昭和62年4月2日 第64期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和61年9月26日。

*¹ 正員、長岡技術科学大学 (〒940-21 長岡市上富岡町1603-1)。

3. 理論解析

3・1 自由表面の位置 液膜内の流体の基礎式は、前報で導いたようにレイノルズ方程式と同じ形となる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 12\mu V_s \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 h は液膜の厚さ、 P は圧力である。また、座標の原点は開口端側にある自由表面の最初の位置にとり、座標軸は流体が流れる方向すなわち板が傾斜している方向に x 軸、板の幅方向に y 軸をとった。ここで、 V_s を板の離れる相対速度とし、 $\alpha = V_s t / h_0$ (t は時間) とおけば、 $h = h_0(1 + \alpha - x/L)$ である。

前報と同様に、式(1)を簡単化し、その時の圧力を P_0 とおくと次式が得られる。

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dP_0}{dx} \right) = 12\mu V_s \quad \dots\dots\dots (2)$$

圧力の境界条件として、液膜の厚さ h の γ 倍の半径を有するメニスカスの表面張力を考えて、式(2)の P_0 を求めると次のようになる。

$$P_0(x) = \frac{6\mu V_s L^2(1+\alpha)}{h_0 h^2} - \frac{12\mu V_s L^2}{h_0 h^2} + \frac{C_1 L}{2h_0 h^2} + C_2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、積分定数 C_1 、 C_2 は次式で与えられる。

$$C_1 = -\frac{2Th_0 h_1 h_2}{\gamma L(h_1 + h_2)} - 12\mu V_s L(1+\alpha) + \frac{24\mu V_s L h_1 h_2}{h_0(h_1 + h_2)}$$

$$C_2 = Pa - \frac{T}{\gamma(h_1 + h_2)} + \frac{12\mu V_s L^2}{h_0^3(h_1 + h_2)} \quad \dots\dots\dots (4)$$

液膜中の x 軸方向の平均流速 $U(x)$ は次のように求まる。

$$U(x) = -\frac{V_s}{h} x - \frac{C_1}{12\mu h} \quad \dots\dots\dots (5)$$

式(5)より自由表面の運動方程式は、自由表面の x 座標 x_1 を使って式のように書ける。

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{V_s}{h_1} x_1 - \frac{C_1}{12\mu h_1} \quad \dots\dots\dots (6)$$

式(6)は開口端側の自由表面の運動方程式であるが、閉口端側にも同様な式を導くことができる。これらの式を連立して解けば自由表面の位置を時間に対して求めることができる。

3・2 移動する自由表面における乱れの解析 前報の解析と同様に、開口端側のメニスカスが直線から乱れた場合の圧力分布の式を次に示す。

$$P(x, y) = P_0(x) + \varepsilon G(x) \exp(\omega t) \cos(ky) \quad \dots\dots\dots (7)$$

なお、 x の範囲は $x_1 \leq x \leq x_2$ であり、 t は時間、 k は $2\pi/\lambda$ (λ は乱れの波長)、 ε は微小な任意常数である。

式(7)の $G(x)$ は、式(7)を式(1)に代入して $G(x)$ の微分方程式をつくりそれを解くと次のように求まる。

$$G(x) = a_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^{2m} \bar{X}^{2m}}{4^m (m+1)! m!} + 3a_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{2m+1} m! (m+1)! k^{2m} \bar{X}^{2m+1}}{(2m+1)! (2m+3)!} \quad \dots\dots\dots (8)$$

なお、 $\bar{X} = x - L(1 + \alpha)$ である。

未定数 a_0 、 a_1 を $G(x)$ の境界条件より決定すると、次のようになる。なお、実験では閉口端側の自由表面は大きく入り込むことはなかった。これは後述する数値計算の結果とも一致する。したがって、閉口端のメニスカスは動かず、乱れもないとして $G(x_2) = 0$ とする。

$$a_0 = \frac{I_1(x_2) G^*(x_1)}{I_2(x_1) I_1(x_2) - I_2(x_2) I_1(x_1)} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$a_1 = -\frac{I_2(x_2) G^*(x_1)}{I_2(x_1) I_1(x_2) - I_2(x_2) I_1(x_1)} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $I_1(x)$ 、 $I_2(x)$ と $G^*(x_1)$ は次の式で与えられる。

$$I_1(x) = 3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m! (m+1)! 2^{2m+1} \bar{X}^{2m+1} k^{2m}}{(2m+1)! (2m+3)!} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$I_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{X}^{2m} L^{2m+1}}{4^m m! (m+1)!} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$G^*(x_1) = -\frac{12\mu V_s x_1 + C_1}{h_0^3 \left(1 + \alpha - \frac{x_1}{L}\right)^3} - T \left(k^2 + \frac{h_0}{\gamma L h_1^2}\right) \quad \dots\dots\dots (13)$$

前報と同様に、実際に観察される現象の乱れの波長は、乱れの成長速度が最も大きい波長であると考えられるので、自由界面 ($x = x_1$) において $\exp(\omega t)$ の ω を正で最大にする k の値を求める。その k の値を求める式が式(14)である。

$$\frac{dG(x_1)}{dk} + G(x_1) \frac{d}{dk} \left[\ln \frac{A}{B} \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで、

$$A = I_2(x_1) I_1(x_2) - I_2(x_2) I_1(x_1)$$

$$B = I_1(x_2) I_4(x_1) - I_2(x_2) I_3(x_1) \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$I_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m \bar{X}^{2m} L^{2m-1}}{4^m m! (m+1)!} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$I_4 = 3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m! (m+1)! 2^{2m+1} \bar{X}^{2m} k^{2m}}{(2m)! (2m+3)!} \quad \dots\dots\dots (17)$$

式(14)を式(18)の自由表面位置の修正キャピラリ数 Ca_1^* で整理すると式(19)のようにまとめることができる。

$$Ca_1^* = \frac{\mu V_s L^3}{Th_1^3} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$Ca_1^* = \frac{h_0(h_1 + h_2)}{12h_1(h_1 - h_2)} \left[k^2 L^2 + \frac{h_0 L}{\gamma h_1^2} - \frac{2h_0 h^2 L}{\gamma h_1^2(h_1 + h_2)} + \frac{2kL^2}{d} \left(\ln \frac{B}{A} \right) \right] \dots\dots\dots (19)$$

4. 数値計算と実験結果との比較

式(6)を開口端と閉口端について導き、その連立微分方程式をルンゲ・クッタ・ギルにより解いて自由表面の位置を時間に対して求めた。時間ステップの大きさは1/1000 sで、その結果を実験結果(丸印)とともに図1に示す。計算と実験の結果はよく一致している。また、閉口端側の自由表面は実験結果と同様に計算では移動しなかった。なお、実験結果は次に述べるようにVTRで自由表面の動きを撮影して求めた。

自由表面の乱れの成長の様子を調べるために、メニスカスの動きを時間に対してトレースした結果を図2(a)と図2(b)に示す。図2(a)は初期すきま $h_0 = 0.75$ mm で引張速度 $V_s = 20$ mm/min, 図2(b)は $h_0 = 0.5$ mm で $V_s = 50$ mm/minの結果である。ここで、時間の書いてない線は図2(a)のほうは4/30 s, 図2(b)のほうは2/30 sの時間間隔ごとの自由表面を表している。図1の実験値はこれらの図から乱れが大きくなる前の時間について、開口端から自由表面の距離を平均して求めた。このようにすきまが狭くレイノルズ数の小さい自由表面のある流れにおいて、その自由表面の位置は乱れが小さいうちは計算で求めることができる。

速度 V_s が小さい場合、メニスカスに乱れはないか、あるいはあっても始まりが遅く実験の観察領域内(100×30 mm)では液体が指状に残ることはなかった。しかし、 V_s が速くなるか h_0 が小さくなると図2に示すように液体が指状に残るようになる。このように指状に液体が残ってできるパターンをフィンガパターンと呼んでいる。メニスカスの乱れの発生は、これらの図からもわかるようにフィンガパターンよりも早い。その乱れの発生位置を正確に求めることはかなり困難である。ところで、これらの図よりフィンガパターンのところでは液体の x 軸方向の速度は小さくなっていることがわかる。このフィンガパターンの発生位置は精度よく測定することができる。前報ではこのフィンガパターンの波長と開口端における修正キャピラリ数との関係を理論的に導き実験結果と比較し、理論値の波長を2倍とすると実験値と一致する結果を得た。

まず、理論的に自由表面における乱れの大きさが最

大となる位置を求める。なお、計算に際して γ の値は0.5とした。ニュートン流体の流速は圧力こう配に比例するので、圧力分布の式(7)を x で微分してその内の乱れの項 $F_m = dG/dx \cdot \exp(\omega t)|_{x=x_1}$ を最大にする x_1 を求める。これは次のように行った。すなわち、式(6)から時間ステップごとにメニスカスの位置を求め、その位置において式(19)と式(18)の値が一致する k の値を探し、その k の値を使って F_m を計算し F_m が最大となる x_1 の値を求める。今、そのように求めた x_1 を x_m とする。前述したように、乱れが発生し始める位置の測定は困難であるので、ここではフィンガパターンの発生位置について調べた。図3は横軸に $4x_m$ 、縦軸にフィンガパターンの発生位置の実験値 x_e をとったものである。実験値はほぼ45°の直線上にのっている。この図から x_m と x_e の間の関係にほぼ次の関係が成り立つことがわかる。

$$x_e = 4x_m \dots\dots\dots (20)$$

図4は横軸にフィンガパターンが発生した位置における修正キャピラリ数、縦軸に x_e をとって初期すきまごとに示したものである。なお、実線は $4x_m$ をプロットしたものである。実験結果にばらつきはあるが、ほぼ一つの曲線上にのっていることがわかる。計算値が完全に実験値と一致せず、4倍することによって実験値と一致するようになったのは、乱れの解析が線形安定理論であることによるものと思われる。しかし、修正キャピラリ数で実験結果および計算結果を整理すれば、薄いすきまの中の流体の乱れの波長、乱れの発生位置や別報で述べる板を引き離す際の仕事やそれに必要な力も初期すきま、引張速度によらず整理することができる。

図1 自由表面の位置の時間変化(計算値と実験値の比較)

(a) 初期すきま $h_0=0.75$ mm, 引張速度 $V_s=20$ mm/min の場合の自由表面の乱れの様子

(b) $h_0=0.5$ mm, $V_s=50$ mm/min の場合

図 2

図 4 修正キャピラリ数とフィンガパターンの発生した位置との関係

5. 結 論

2枚の傾斜平板間にグリセリンをはさみ, それらの

図 3 フィンガパターンの発生した位置の実験値と計算値

板を引き離した時, 分離面に観察される筋状のパターンについて調べた。このパターンをフィンガパターンと呼びメニスカス不安定によって発生するとして, その発生位置と修正キャピラリ数の関係を理論と実験から調べた。自由表面の位置は簡単な二つの運動方程式を連立して解けば求めることができる。次に, フィンガパターンの発生する位置を線形安定性理論と実験から求め比較した結果, 理論値は定性的に実験結果

を説明することができ, さらに理論値を4倍すると実験値とほぼ一致することを示した。それらの値を自由表面の位置に対する修正キャピラリ数で整理すると引張速度 V_s や初期すきま h_0 によらず整理することができることを示した。

なお, 本研究は昭和 61 年度文部省科学研究補助金 [奨励研究(A)] の援助をうけて遂行されたものであることを付記して謝意を表する。

文 献

- (1) 古口・岡田, 本論文集の 2062 ページ。
- (2) Saffman, P. G. and Taylor, G. I., *Proc. R. Soc., Ser. A*, 245 (1958), 312.
- (3) 日本機械学会編, 流体の熱物性値集, (昭 58), 24, 日本機械学会。