導電性磁性流体の基本的流動特性に関する理論解析*
(平行平板間単純せん断流れ)志澤 一之*¹, 井門 康司*², 棚橋 隆彦*³A Note on the Fundamental Dynamic Flow Characteristics
of Conducting Magnetic Fluids
(Simple Shear Flow between Two Parallel Plates)

Kazuyuki SHIZAWA, Yasushi IDO, and Takahiko TANAHASHI

The fundamental flow of magnetic fluids with good conductivities of electricity and heat have not been sufficiently discussed in the micropolar fluid theory. In the present paper, when the homogeneous electric and magnetic fields and flow direction are orthogonal to one another, a simple shear flow between two parallel plates is discussed using the system equations for conducting magnetic fluids considering the internal rotation which was proposed by the authors in the previous report. Hydrodynamical quantities such as velocity, angular velocities of fluid and suspended particles are theoretically obtained considering the diffusion effect of internal angular momentum. The simple shear flow of conducting magnetic fluids is characterized by some dimensionless numbers (electric effect parameter, Hartman number, micropolar effect parameter, magnetic effect parameter and so on). Effects that these dimensionless numbers are influent to the conducting magnetic fluids flow are investigated in detail. Furthermore a limit of the range for the wall surface coefficient when applied electromagnetic fields exist is given.

Key Words: Conducting Magnetic Fluid, Internal Rotation, Analytical Solution, Simple Shear Flow, Dynamic Flow Characteristics

1. 緒 言

現在市販されている磁性流体は、水やケロシンなどの非導電性の液体中に、粒子径約 10 nm 程度のマグネタイトなどの強磁性体微粒子を安定にけん濁したような流体である。非導電性の磁性流体に関して、これまでさまざまな理論的研究および実験による研究がなされてきた。また一方で、導電性を有する流体に関する研究が MHD を中心として、近年さかに行われてきている。ところが最近、液体金属（水銀やナトリウム-カリウム金属混合体など）を母液とした導電性を有する磁性流体が試作されるに至り、磁性流体の応用範囲が拡大された。これに伴い、著者らは前報⁽¹⁾において熱力学的手法を用いて、内部回転を考慮した導電性磁性流体の基礎方程式系を導出した。しかし、導電性磁性流体の流れは一般に流れ場と電磁場との複雑な相互作用によるものである。そのため基本的な流れに関しても解析的にその解を導出することは非常に困難であ

る。解析的に解が得られるのは、いくつかの仮定のもとでの極めて特殊なケースに限られるものと考えられる。このため、導電性磁性流体の基本的な流れについて、粒子の角運動量の拡散をも考慮して、速度、流体および粒子の回転角速度などの主な流体力学的諸量の空間分布を解析的に与えているものはいまだない。そこで、ここでは前報⁽¹⁾で提示した内部回転を考慮した導電性磁性流体の基礎方程式系に対して、流動現象のなかでも最も基本的な流れである平行平板間における定常せん断流れをその適用例としてとりあげ、粒子の角運動量の拡散効果を無視することなしに、上述の主な流体力学的諸量を解析的に求める。また、流れを特徴づける数個の無次元数を定義し、これらが流れに及ぼす影響について調べる。特に電場効果パラメータが流れに大きく影響することを示し、その値によって流れがどのように変わるかを調べる。また、壁面係数の適用限界についても言及する。

主 な 記 号

 E_0 : 印加電場の強さ e_i : 基底ベクトル H_0 : 印加磁場の強さ

* 昭和 62 年 4 月 2 日 第 64 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 61 年 6 月 25 日。

*¹ 正員、慶応義塾大学大学院 (〒223 横浜市港北区日吉 3-14-1)。

*² 学生員、慶応義塾大学大学院。

*³ 正員、慶応義塾大学理工学部。

Ha : ハルトマン数 $= \mu_0 H_0 l \sqrt{\sigma/\eta}$

h : 磁化率パラメータ $= M_0/\mu_0 H_0$

i : 体積平均慣性半径

$2l$: 平行平板間距離

M_0 : 平衡磁化の強さ

Re_m : 磁気レイノルズ数 $= \mu_0 \sigma l V_0$

V_0 : 上平板の移動速度

δ : 壁面係数

ε : 極性効果パラメータ $= \eta_1/\eta$

ζ : 電場効果パラメータ $= E_0/\mu_0 H_0 V_0$

η : セン断粘性係数

η_1 : 渦粘性係数

λ : 寸法効果パラメータ $= l/i$

σ : 電気伝導率

σ_m : 磁性効果パラメータ $= \tau \tau_s M_0 H_0 (1-h)/I$

*: 無次元量を示す添字

なお, その他の記号および物質定数間の諸関係式については前報⁽¹⁾を参照されたい。

2. 解析モデルおよび基礎方程式系

2.1 基礎方程式系 解析にあたり, 前報⁽¹⁾による内部回転を考慮した導電性磁性流体に対する基礎方程式系を用いる。運動方程式, 角運動量方程式, 電磁場の方程式および電流密度と磁化の構成方程式はそれぞれ以下ようになる。

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv}{dt} = & -\nabla p + (\eta + \eta_2) \nabla(\nabla \cdot v) \\ & + \eta \nabla^2 v + 2\eta_1 \nabla \times (\Omega - \omega) + \rho_e E \\ & + (P \cdot \nabla) E + P \times (\nabla \times E) + j \times B \\ & + (M \cdot \nabla) H + M \times (\nabla \times H) + \rho b \quad \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I \frac{d\Omega}{dt} = & (\alpha + \beta) \nabla(\nabla \cdot \Omega) + \gamma \nabla^2 \Omega \\ & + 4\eta_1 (\omega - \Omega) + P \times E + M \times H + \rho l \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\nabla \times E = -\partial B / \partial t \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\nabla \times H = \partial D / \partial t + j \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\nabla \cdot D = \rho_e \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$j = \sigma(E + v \times B) + \rho_e v \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$M = M_0 (I - \tau \Omega \cdot \varepsilon) \cdot H / H \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\omega = \nabla \times v / 2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

2.2 境界条件 速度の境界条件は壁面において no-slip 条件を適用する。また, 粒子の回転角速度に対する境界条件として, 本論文では前報⁽²⁾と同様に, Condiff-Dahler の条件を採用する。したがって, 境界において

$$\Omega = \delta \omega$$

となる。また, 電磁場に関する境界条件は, 電場の接線成分の連続性, 電束密度の法線成分の連続性, 磁場の接線成分の連続性および磁束密度の法線成分の連続性である。

2.3 解析モデルおよび仮定 導電性磁性流体が距離 $2l$ だけ隔たった半無限平行平板間に満たされ, 一方の平板が他方の平板に対して速度 V_0 で平行に等速運動しているものとする。また流体内の温度差は微小である (図 1 参照)。さらに解析にあたり, 以下の仮定を設ける。

- (i) 流体は非圧縮性で, 微粒子は剛体回転する ($\nabla \cdot v = 0, \nabla \cdot \Omega = 0$)。
- (ii) 流体の物質定数の温度依存性を無視する。
- (iii) 流れ場, 電磁場は定常である。このため, 流体中では常に電荷密度は零に保たれる ($\rho_e = 0$)。
- (iv) 電磁力以外の体積力, 体積偶力を無視する。
- (v) 流体の分極は無視する ($P = 0$)。
- (vi) 圧力こう配は与えない ($\partial p / \partial z = 0$)。
- (vii) 誘起磁場は印加磁場に比べて十分小さい ($H_z / H_0 \ll 1, Re_m \ll 1, Per = \tau \Omega \ll 1$)。
- (viii) 上下壁面は絶縁体である。また壁面での磁化率は $\chi_m \approx 0$ である。

(ix) 流体は十分に密な媒質で構成されており, 電子の自由走行時間は電子の Lamor 振動周期に比べて十分小さい。このため, 導電率は磁場に依存しない。

このとき, 各物理量 $v, \omega, \Omega, H, M, E$ および p は x のみの関数となる。

3. 方程式系の成分表示

3.1 電磁場の方程式 式(3)および式(5)を, 仮定(iii)を考慮して成分表示すると次のようになる。

$$\frac{dE_x}{dx} = 0, \frac{dE_y}{dx} = 0, \frac{dE_z}{dx} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

また, 上下壁面内では電流分布が存在しない。したがって, 壁面内では x 方向には磁場が, また, $-y$ 方向には電場がともに一様に印加されている。境界におけ

図 1 平行平板間定常流れ

る電場の接線成分の連続性, および電束密度の法線成分の連続性を考慮すると, 式(10)により, 電場ベクトルの成分は次のようになる。

$$E=(0, -E_0, 0) \dots\dots\dots(11)$$

仮定(iii)より式(4)は

$$\nabla \times H = j \dots\dots\dots(12)$$

となる。式(12)と仮定(iii)を考慮すると式(7)より次式が得られる。

$$\nabla \times H = \sigma(E + v \times B) \dots\dots\dots(13)$$

式(11)を考慮してこれを成分表示すると次式を得る。

$$\sigma v B_y = 0 \dots\dots\dots(14)$$

$$\frac{dH_z}{dx} = \sigma E_0 - \sigma v B_x \dots\dots\dots(15)$$

$$\frac{dH_y}{dx} = 0 \dots\dots\dots(16)$$

式(16)から $H_y = \text{const.}$ であるが, 境界条件により $H_y = 0$ となる。以上より, 磁場および電流密度ベクトルを成分表示すると次のようになる。

$$H = (H_x, 0, H_z) \dots\dots\dots(17)$$

$$j = (0, j_y, 0) \dots\dots\dots(18)$$

3.2 磁化の方程式 式(17)を考慮して式(8)を成分表示すると次式を得る。

$$x \text{ 成分: } M_x = M_0(H_x + \tau H_z \Omega) / H \dots\dots\dots(19)$$

$$z \text{ 成分: } M_z = M_0(H_z - \tau H_x \Omega) / H \dots\dots\dots(20)$$

ここで, 仮定(vii)より $H \approx H_x$ とすれば式(19)および(20)は次のように書き換えられる。

$$x \text{ 成分: } M_x \approx M_0 \dots\dots\dots(21)$$

$$z \text{ 成分: } M_z \approx M_0 \left(\frac{H_z}{H_x} - \tau \Omega \right) \dots\dots\dots(22)$$

3.3 運動方程式 仮定(i)~(ix)および式(11), (17)および(21)を考慮して式(1)を成分表示すると次式を得る。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu_0 j_y H_z \dots\dots\dots(23)$$

$$2(\eta + \eta_1) \frac{d\omega}{dx} - 2\eta_1 \frac{d\Omega}{dx} - M_0 \frac{dH_z}{dx} + \mu_0 j_y H_x = 0 \dots\dots\dots(24)$$

また y 成分からは, 圧力が y 方向に変化しないという結果が得られる。

3.4 角運動量方程式 仮定(i)~(ix)を考慮して式(2)の y 成分を表示すると次式のようになる。

$$\gamma \frac{d^2 \Omega}{dx^2} - 4\eta_1 (\Omega - \omega) - (M_0 H_z - M_z H_x) = 0 \dots\dots\dots(25)$$

また, x および z 成分はそれぞれ $M_y H_z = M_z H_y$, $M_z H_y = M_y H_x$ となるが式(17), (21), (22)および $M_y = 0$ より両辺とも零となる。

4. 方程式系の無次元化

本解析においては $\nabla \cdot v = 0$ および $\nabla \cdot \Omega = 0$ は自動的に満足されている。式(9), (12), (23), (24), および(25)を表1の代表量(主にNewton流体の最大値)を用いて無次元化する。この結果, Ohmの法則の y 成分, 運動方程式の x 成分と z 成分, 角運動量方程式の y 成分, および流体の角速度の式はそれぞれ次式のようになる。

$$j_y^* = -\zeta + v^* \dots\dots\dots(26)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial x^*} = 2Ha^2 j_y^* H_z^* \dots\dots\dots(27)$$

$$\frac{d\omega^*}{dx^*} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{d\Omega^*}{dx^*} + \frac{2Ha^2}{1+\varepsilon} v^* + \frac{2\zeta Ha^2}{1+\varepsilon} = 0 \dots\dots\dots(28)$$

$$\frac{d^2 \Omega}{dx^2} - 4\varepsilon \lambda^2 (1 + \sigma_m) \Omega^* + 4\varepsilon \lambda^2 \omega^* = 0 \dots\dots\dots(29)$$

$$\omega^* = -2 \frac{dv^*}{dx^*} \dots\dots\dots(30)$$

ただし

$$\zeta = \frac{E_0}{\mu_0 V_0 H_0} \dots\dots\dots(31)$$

$$Ha = \mu_0 H_0 l \sqrt{\sigma \eta} \dots\dots\dots(32)$$

$$\varepsilon = \frac{\eta_1}{\eta} \dots\dots\dots(33)$$

$$\lambda = \frac{l}{i} \dots\dots\dots(34)$$

$$\sigma_m = \frac{\tau \tau_s H_0 M_0}{I} (1 - h) \dots\dots\dots(35)$$

ただし

$$h = \frac{M_0}{\mu_0 H_0} \dots\dots\dots(36)$$

ここで ζ は印加電場と誘起電場の影響を表す無次元数であり, これを電場効果パラメータと定義する。 Ha はハルトマン数である。また, ε , λ および σ_m はそれぞれ極性効果の大きさ, 装置の寸法と粒子の大きさの比および印加磁場が流れに及ぼす影響の強さを表す無次元数である。

表1 無次元化に用いる代表量

x, z	l	E	E_0
v	V_0	H	H_0
ω, Ω	$V_0 / 4l$	M	M_0
p	$\eta V_0 / 2l$	j	$\sigma \mu_0 H_0 V_0$

5. 理論解析

今後特に断わりのない限り、無次元量を表すアスタリスク*を省略する。

5.1 支配方程式 運動方程式の z 成分と角運動量方程式の y 成分の式(28)および(29)に式(30)を代入して得られる2個の式より、次の式(37)、(41)が得られる。

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - \xi_1 \frac{d^2 v}{dx^2} + \xi_2 v - \xi_3 = 0 \quad (37)$$

ここで、

$$\xi_1 = 4\epsilon\lambda^2(1+\sigma_m) + (Ha^2 - 4\epsilon^2\lambda^2)/(1+\epsilon) \quad (38)$$

$$\xi_2 = 4\epsilon\lambda^2(1+\sigma_m)Ha^2/(1+\epsilon) \quad (39)$$

$$\xi_3 = 4\epsilon\lambda^2(1+\sigma_m)Ha^2\zeta/(1+\epsilon) \quad (40)$$

$$\Omega = \{ (Ha^2 - 4\epsilon^2\lambda^2)dv/dx - (1+\epsilon)d^3v/dx^3 / 2\epsilon^2\lambda^2(1+\sigma_m) \} \quad (41)$$

式(37)は速度 v に関する4階の微分方程式である。この方程式の特性方程式を考え、特性根を求めると、次の3個の場合に分けられることがわかる。

$$(I) \quad \xi_1^2 - 4\xi_2 > 0$$

$$(II) \quad \xi_1^2 - 4\xi_2 = 0$$

$$(III) \quad \xi_1^2 - 4\xi_2 < 0$$

(I)の場合には4個の特性根はすべて相異なる実数となり、(II)の場合には2組の実数の重根、(III)の場合には相異なる4個の複素数となる。

5.2 v , ω および Ω の解 v , ω および Ω の解は流れを知るうえで最も基礎的なものである。これら3個の解析解を次の手順に従って求める。

(イ) 式(37)の特性方程式より特性根を求め、 v の一般解を求める。

(ロ) (イ)で求めた v の一般解を式(30)および式(41)に代入して ω および Ω の一般解を得る。

(ハ) (イ)および(ロ)で求めた v , ω および Ω の一般解は4個の積分定数を含んでいる。したがって、

先に述べた境界条件のもとでこれを決定する。

(ニ) (ハ)で求めた4個の積分定数を一般解に代入して解析解を得る。以上の手順によって、表2に示すような v , ω および Ω の解析解が求められる。また、(I)の場合についてこれらの解析解のパラメータ依存性を図2から図6に示す。

6. 解析結果および検討

前章で得られた結果からわかるように、一様電磁場の作用下における導電性磁性流体の定常流れを特徴づける主な無次元数は ϵ , λ , σ_m , Ha , δ および ζ の6個である。また導電性磁性流体の物質定数については、まだ十分な測定結果が得られていないのが現状である。したがって、従来の非導電性磁性流体および液体金属の物性値を目安として考えた。また、 ϵ , σ_m , ζ , Ha および λ の範囲は、理論上可能な限り広くとり、次のように設定した。

$$0 \leq \epsilon < 1, 0 \leq \sigma_m < \infty, 0 \leq \zeta < \infty$$

$$0 \leq Ha < \infty, 5 \leq \lambda < \infty$$

ただし導電性磁性流体に対する δ の範囲は6.2節で明らかにされる。

6.1 解析解の形の場合分けに関する検討 前章において、 v , ω および Ω の解が $\xi_1^2 - 4\xi_2$ の値によってその形が3個の場合に分かれることが示された。 $\xi_1^2 - 4\xi_2 = 0$ に式(38)および(39)を代入し、ハルトマン数について解くと次式を得る。

$$Ha = \frac{2\sqrt{\epsilon}(1+\sigma_m+\epsilon\sigma_m)\lambda}{\sqrt{(1+\epsilon)(1+\sigma_m)} \pm \sqrt{\epsilon}}$$

上式に式(32)および(34)を代入して整理すると

$$\mu_0 H_0 = \frac{2\sqrt{\epsilon}(1+\sigma_m+\epsilon\sigma_m)\sqrt{\eta\sigma}}{\{\sqrt{(1+\epsilon)(1+\sigma_m)} \pm \sqrt{\epsilon}\}i} \quad (51)$$

となる。式(51)の右辺において複号が+の場合の $\mu_0 H_0$ の値を B_1 とし、複号が-の場合の $\mu_0 H_0$ の値を B_2 とする。このとき $\xi_1^2 - 4\xi_2$ の値が零または負になるのは次の関係が成り立つ場合である。

($\lambda=5.0, \delta=0.0, \sigma_m=0.5, Ha=1.0, \zeta=0.0$)

図2 極性効果パラメータ ϵ による変化

($\epsilon=0.4, \delta=0.0, \sigma_m=0.5, Ha=1.0, \zeta=0.0$)

図3 寸法効果パラメータ λ による変化

表 2 平行平板間せん断定常流れの解析解

Analytical solutions				(I) $\xi_1^2 - 4\xi_2 > 0$	
v	$\{k_1 \text{ch}(\sqrt{\kappa_1}x) + k_2 \text{ch}(\sqrt{\kappa_2}x) + k_3 \text{sh}(\sqrt{\kappa_1}x) + k_4 \text{sh}(\sqrt{\kappa_2}x)\} / D + \zeta \dots \dots \dots (42)$				
ω	$-2\{k_1 \sqrt{\kappa_1} \text{sh}(\sqrt{\kappa_1}x) + k_2 \sqrt{\kappa_2} \text{sh}(\sqrt{\kappa_2}x) + k_3 \sqrt{\kappa_1} \text{ch}(\sqrt{\kappa_1}x) + k_4 \sqrt{\kappa_2} \text{ch}(\sqrt{\kappa_2}x)\} / D \dots \dots \dots (43)$				
Ω	$-\{k_1 \sqrt{\kappa_1} \phi_1 \text{sh}(\sqrt{\kappa_1}x) + k_2 \sqrt{\kappa_2} \phi_2 \text{sh}(\sqrt{\kappa_2}x) + k_3 \sqrt{\kappa_1} \phi_1 \text{ch}(\sqrt{\kappa_1}x) + k_4 \sqrt{\kappa_2} \phi_2 \text{ch}(\sqrt{\kappa_2}x)\} / D \dots \dots \dots (44)$				
Coefficients					
D	$2\psi_1\psi_2 \{\text{ch}(2\sqrt{\kappa_1}) \text{ch}(2\sqrt{\kappa_2}) - 1\} - (\psi_1^2 + \psi_2^2) \text{sh}(2\sqrt{\kappa_1}) \text{sh}(2\sqrt{\kappa_2})$				
k_1	$(1-2\zeta) [-\psi_2^2 \text{sh}\sqrt{\kappa_1} \text{sh}(2\sqrt{\kappa_2}) + \psi_1\psi_2 \text{ch}\sqrt{\kappa_1} \{\text{ch}(2\sqrt{\kappa_2}) - 1\}]$	κ_1	$(\xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 - 4\xi_2}) / 2$		
k_2	$(1-2\zeta) [-\psi_1^2 \text{sh}(2\sqrt{\kappa_1}) \text{sh}\sqrt{\kappa_2} + \psi_1\psi_2 \text{ch}\sqrt{\kappa_2} \{\text{ch}(2\sqrt{\kappa_1}) - 1\}]$	κ_2	$(\xi_1 - \sqrt{\xi_1^2 - 4\xi_2}) / 2$		
k_3	$-\psi_2^2 \text{ch}\sqrt{\kappa_1} \text{sh}(2\sqrt{\kappa_2}) + \psi_1\psi_2 \text{sh}\sqrt{\kappa_1} \{\text{ch}(2\sqrt{\kappa_2}) + 1\}$	ψ_1	$\sqrt{\kappa_1} (\phi_1 - 2\delta)$		
k_4	$-\psi_1^2 \text{ch}\sqrt{\kappa_2} \text{sh}(2\sqrt{\kappa_1}) + \psi_1\psi_2 \text{sh}\sqrt{\kappa_2} \{\text{ch}(2\sqrt{\kappa_1}) + 1\}$	ψ_2	$\sqrt{\kappa_2} (\phi_2 - 2\delta)$		
ϕ_1	$\{(1+\epsilon)\kappa_1 + 4\epsilon^2\lambda^2 - Ha^2\} / 2\epsilon\lambda^2(1+\sigma m)$		ϕ_2	$\{(1+\epsilon)\kappa_2 + 4\epsilon^2\lambda^2 - Ha^2\} / 2\epsilon\lambda^2(1+\sigma m)$	
Analytical solutions				(II) $\xi_1^2 - 4\xi_2 = 0$	
v	$\{[(1-2\zeta)\{(h_1-h_2)\text{ch}(gx) - x(h_3-h_4)\text{sh}(gx)\} + (h_1+h_2)\text{sh}(gx) - x(h_3+h_4)\text{ch}(gx)]\} / R \dots \dots \dots (45)$				
ω	$2\{[(h_3+h_4)\{\text{ch}(gx) + gx\text{sh}(gx)\} - g(h_1+h_2)\text{ch}(gx) + (1-2\zeta)\{(h_3-h_4)\{\text{sh}(gx) + gx\text{ch}(gx)\} - g(h_1-h_2)\text{sh}(gx)\}]\} / R \dots \dots \dots (46)$				
Ω	$\{[(1-2\zeta)[g(\alpha_1 - \alpha_2 g^2)(h_1-h_2)\text{sh}(gx) - (h_3-h_4)\{(\alpha_1 - 3\alpha_2 g^2)\text{sh}(gx) + gx(\alpha_1 - 3g^2)\text{ch}(gx)\}] + g(\alpha_1 - \alpha_2 g^2)(h_1+h_2)\text{ch}(gx) - (h_3+h_4)\{(\alpha_1 - 3\alpha_2 g^2)\text{ch}(gx) + gx(\alpha_1 - 3g^2)\text{sh}(gx)\}]\} / R \dots \dots \dots (47)$				
Coefficients					
h_1	$(\Delta_1\Delta_2 - 2\Delta_1\Delta_3 + \Delta_3^2)(\text{ch}g - \text{sh}g) + (\Delta_1\Delta_2 - \Delta_2^2)\{\text{ch}(3g) + \text{sh}(3g)\}$		α_1	$(Ha - 4\epsilon^2\lambda^2) / 2\epsilon\lambda^2(1+\sigma m)$	
h_2	$(\Delta_1\Delta_3 - 2\Delta_1\Delta_2 - \Delta_2^2)(\text{ch}g + \text{sh}g) + (\Delta_1\Delta_3 - \Delta_3^2)\{\text{ch}(3g) - \text{sh}(3g)\}$		α_2	$(1+\epsilon) / 2\epsilon\lambda^2(1+\sigma m)$	
h_3	$(2\Delta_1\Delta_3 - \Delta_1\Delta_2 - \Delta_1^2)(\text{ch}g - \text{sh}g) + (\Delta_1^2 - \Delta_1\Delta_2)\{\text{ch}(3g) + \text{sh}(3g)\}$		Δ_1	$\alpha_1 g - \alpha_2 g^3 + 2\delta g$	
h_4	$(\Delta_1\Delta_3 - 2\Delta_1\Delta_2 - \Delta_1^2)(\text{ch}g + \text{sh}g) + (\Delta_1^2 + \Delta_1\Delta_3)\{\text{ch}(3g) - \text{sh}(3g)\}$		Δ_2	$(\alpha_1 + 2\delta)(1+g) - \alpha_2(3+g)g^2$	
R	$(h_1 - h_2 - h_3 - h_4)\text{ch}g + (h_1 + h_2 - h_3 + h_4)\text{sh}g$	g	$\sqrt{\xi_1/2}$	Δ_3	$(\alpha_1 + 2\delta)(1-g) - \alpha_2(3-g)g^2$
Analytical solutions				(III) $\xi_1^2 - 4\xi_2 < 0$	
v	$\{[(1-2\zeta)\{(f_1-f_2)\text{ch}(\theta_1x)\cos(\theta_2x) - (f_3-f_4)\text{sh}(\theta_1x)\sin(\theta_2x)\} + (f_1+f_2)\text{sh}(\theta_1x)\cos(\theta_2x) - (f_3+f_4)\text{ch}(\theta_1x)\sin(\theta_2x)]\} / L + \zeta \dots \dots \dots (48)$				
ω	$2\{[(1-2\zeta)\{[(f_3-f_4)\theta_2 - (f_1-f_2)\theta_1]\text{sh}(\theta_1x)\cos(\theta_2x) + [(f_1-f_2)\theta_2 + (f_3-f_4)\theta_1]\text{ch}(\theta_1x)\sin(\theta_2x)\} - [(f_1+f_2)\theta_1 - (f_3+f_4)\theta_2]\text{ch}(\theta_1x)\cos(\theta_2x) + [(f_1+f_2)\theta_2 + (f_3+f_4)\theta_1]\text{sh}(\theta_1x)\sin(\theta_2x)]\} / L \dots \dots \dots (49)$				
Ω	$\{[(1-2\zeta)\{[(f_1-f_2)\gamma_1 - (f_3-f_4)\gamma_2]\text{sh}(\theta_1x)\cos(\theta_2x) - [(f_1-f_2)\gamma_2 + (f_3-f_4)\gamma_1]\text{ch}(\theta_1x)\sin(\theta_2x)\} + [(f_1+f_2)\gamma_1 - (f_3+f_4)\gamma_2]\text{ch}(\theta_1x)\cos(\theta_2x) - [(f_1+f_2)\gamma_2 + (f_3+f_4)\gamma_1]\text{sh}(\theta_1x)\sin(\theta_2x)]\} \dots \dots \dots (50)$				
Coefficients					
L	$\{(f_1-f_2)\text{ch}\theta_1 + (f_1+f_2)\text{sh}\theta_1\}\cos\theta_2 - \{(f_3+f_4)\text{ch}\theta_1 + (f_3-f_4)\text{sh}\theta_1\}\sin\theta_2$				
f_1	$\{g_4^2\cos\theta_2 + (g_1g_3 - g_2g_4 - g_1g_4)\sin\theta_2\}\{\text{ch}(\theta_1 - \text{sh}\theta_1)\} - \{g_3^2\cos\theta_2 - g_2g_3\sin\theta_2\}\{\text{ch}(3\theta_1) + \text{sh}(3\theta_1)\}$				
f_2	$\{g_4^2\cos\theta_2 + g_1g_4\sin\theta_2\}\{\text{ch}(3\theta_1) - \text{sh}(3\theta_1)\} - \{g_3^2\cos\theta_2 - (g_2g_4 - g_1g_3 - g_2g_3)\sin\theta_2\}\{\text{ch}\theta_1 + \text{sh}\theta_1\}$				
f_3	$\{(g_1g_4 + g_2g_4 - g_1g_3)\cos\theta_2 - g_1^2\sin\theta_2\}\{\text{ch}\theta_1 - \text{sh}\theta_1\} - \{g_2g_3\cos\theta_2 - g_2^2\sin\theta_2\}\{\text{ch}(3\theta_1) + \text{sh}(3\theta_1)\}$				
f_4	$\{(g_2g_4 - g_1g_3 - g_2g_3)\cos\theta_2 - g_2^2\sin\theta_2\}\{\text{ch}\theta_1 + \text{sh}\theta_1\} + \{g_1g_4\cos\theta_2 + g_1^2\sin\theta_2\}\{\text{ch}(3\theta_1) - \text{sh}(3\theta_1)\}$				
g_1	$(\gamma_1 + 2\delta\theta_1)\cos\theta_2 + (\gamma_2 + 2\delta\theta_2)\sin\theta_2$	γ_1	$\{(Ha^2 - 4\epsilon^2\lambda^2)\theta_1 - (1+\epsilon)(\theta_1^2 - 3\theta_2^2)\theta_1\} / 2\epsilon\lambda^2(1+\sigma m)$		
g_2	$(\gamma_1 + 2\delta\theta_1)\cos\theta_2 - (\gamma_2 + 2\delta\theta_2)\sin\theta_2$	γ_2	$\{(Ha^2 - 4\epsilon^2\lambda^2)\theta_2 + (1+\epsilon)(\theta_2^2 - 3\theta_1^2)\theta_2\} / 2\epsilon\lambda^2(1+\sigma m)$		
g_3	$(\gamma_2 + 2\delta\theta_2)\cos\theta_2 + (\gamma_1 + 2\delta\theta_1)\sin\theta_1$	θ_1	$\sqrt{\xi_1 + 2\sqrt{\xi_2}} / 2$		
g_4	$(\gamma_2 + 2\delta\theta_2)\cos\theta_2 - (\gamma_1 + 2\delta\theta_1)\sin\theta_2$	θ_2	$\sqrt{-\xi_1 + 2\sqrt{\xi_2}} / 2$		

$$B_1 \leq \mu_0 H_0 \leq B_2$$

ところが現在人工的に印加する磁場の大きさはたかだか 10 テスラ程度である。また、粒子の径がある限度以上に大きくなると粒子を安定に分散させることができなくなる。したがって、式(51)において ε , σ_m のとりうる値の範囲を考慮すると $\xi_1^2 - 4\xi_2$ の値が零または負になるのは σ_m が比較的小さくかつ $\varepsilon \approx 0$ となる場合、すなわち導電性磁性流体が単なる電磁流体に近づいた場合のみであることがわかる。しかし、本報では極性を有する磁性流体を対象として考えているので、このような場合は考えないものとする。したがって、

以降の検討では $\xi_1^2 - 4\xi_2$ の値が正の場合に限るものとする。

6.2 無次元数が流れに及ぼす全体的傾向

6.2.1 極性効果パラメータ ε による影響

図 2 を見ると速度分布、流体の角速度分布は、 ε を小さくすると非極性の電磁流体の流れに近づくことがわかる。速度、流体および粒子の角速度の解に対して $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとると表 3 の式(52), (53)および(54)を得る。これらの式は非極性の電磁流体の流れに一致していることから ε を零に近づける、すなわち粒子の体積濃度を零に近づけると流れは非極性の電磁流体の流れ

表 3 解析解の極限

$\varepsilon \rightarrow 0$	v	$\text{sh}\{Ha(1+x)\}/\text{sh}(2Ha) + \zeta\{1 - \text{ch}(Hax)/\text{ch}Ha\} \dots\dots\dots (52)$			
	ω	$-2Ha\{(1-2\zeta)\text{sh}Hash(Hax) + \text{ch}Hach(Hax)\}/\text{sh}(2Ha) \dots\dots\dots (53)$			
	Ω	$-\delta Ha(1-2\zeta+x)\tanh Ha \dots\dots\dots (54)$			
$\lambda \rightarrow \infty$	v	$\{(1-2\zeta)\text{sh}\delta_1\text{ch}(\delta_1x) + \text{ch}\delta_1\text{sh}(\delta_1x)\}/\text{sh}(2\delta_1) + \zeta \dots\dots\dots (55)$			
	ω	$-2\delta_1\{(1-2\zeta)\text{sh}\delta_1\text{sh}(\delta_1x) + \text{ch}\delta_1\text{ch}(\delta_1x)\}/\text{sh}(2\delta_1) \dots\dots\dots (56)$			
	Ω	$-2\delta_1\{(1-2\zeta)\text{sh}\delta_1\text{sh}(\delta_1x) + \text{ch}\delta_1\text{ch}(\delta_1x)\}/(1+\sigma_m)\text{sh}(2\delta_1) \dots\dots\dots (57)$			
	Coefficient		δ_1	$Ha\sqrt{(1+\sigma_m)/(1+\sigma_m+\varepsilon\sigma_m)}$	
$\sigma_m \rightarrow \infty$	v	$\{(1-2\zeta)\text{sh}\delta_2\text{ch}(\delta_2x) + \text{sh}\delta_2\text{sh}(\delta_2x)\}/\text{sh}(2\delta_2) + \zeta \dots\dots\dots (58)$			
	ω	$-2\{(1-2\zeta)\text{sh}^2\delta_2\text{ch}\delta_3\text{sh}(\delta_3x) - \text{ch}^2\delta_2\text{sh}\delta_3\text{ch}(\delta_3x)\}/\text{sh}(2\delta_3) \dots\dots\dots (59)$			
	Ω	$0 \dots\dots\dots (60)$			
	Coefficient		δ_2	$Ha/\sqrt{1+\varepsilon}$	δ_3
$Ha \rightarrow 0$ $\zeta \rightarrow 0$	v	$[K_1(1+\sigma_m)(1+x) - \varepsilon K_2\{\text{sh}\delta_4 + \text{sh}(\delta_4x)\}/\delta_4]/2\{K_1(1+\sigma_m) - \varepsilon K_2\text{sh}\delta_4/\delta_4\} \dots\dots\dots (61)$			
	ω	$-\{K_1(1+\sigma_m) + \varepsilon K_2\text{ch}(\delta_4x)\}/\{K_1(1+\sigma_m) - \varepsilon K_2\text{sh}\delta_4/\delta_4\} \dots\dots\dots (62)$			
	Ω	$\{K_1 - (1+\varepsilon)K_2\text{ch}(\delta_4x)\}/\{K_1(1+\sigma_m) - \varepsilon K_2\text{sh}\delta_4/\delta_4\} \dots\dots\dots (63)$			
	Coefficient		δ_4	$2\varepsilon\lambda/\{1+\sigma_m(1+\varepsilon)\}/\varepsilon(1+\varepsilon)$	
			K_1	$\{1+\varepsilon(1-\delta)\}\text{ch}\delta_4$	
		K_2	$1-\delta(1+\sigma_m)$

4-1

4-2

4-3

($\varepsilon=0.4$, $\lambda=5.0$, $\delta=0.0$, $Ha=1.0$, $\zeta=0.0$)

図 4 磁性効果パラメータ σ_m による変化

に近づくことが確かめられる。この場合、非導電磁性流体において全領域で成り立つ関係式 $\Omega = \delta\omega$ は成立しない。

6・2・2 寸法効果パラメータ λ の影響 図3より λ を小さくすると、壁面の影響が流体内部に伝わりや

すくなることがわかる。 λ の影響については非導電性の場合と同様であるので、詳細については前報⁽²⁾を参照されたい。表2に示す解析解に対して $\lambda \rightarrow \infty$ の極限をとると、表3の式(55)～(57)の結果を得る。これより、 $\lambda \rightarrow \infty$ のとき、流れは見かけの粘度が $\{1 + \sigma_m(1$

図5 電場効果パラメータ ζ による変化

図6 ハルトマン数 Ha による変化

$+ \epsilon) \eta / (1 + \sigma_m)$ に増加した場合の非極性の電磁流体の流れに一致することがわかる。

実際に用いられる実験装置や工業用装置の場合、装置の大きさは粒子の大きさに比べて非常に大きく λ の値は通常 $\lambda > 10^5$ 程度である。したがって、 $\lambda \rightarrow \infty$ の極限をとった式(55)～(57)は実用的かつ重要である。

6・2・3 磁性効果パラメータ σ_m による影響 図4を見ると粒子の角速度分布は、磁性効果パラメータ σ_m を増大させるに従って次第に小さくなっていることがわかる。表2に示す解析解の $\sigma_m \rightarrow \infty$ の極限をとると表3の式(58)～(60)の結果を得る。これより、 $\sigma_m \rightarrow \infty$ では、速度および流体の角速度は見かけの粘度が $(1 + \epsilon) \eta$ に増加した非極性の電磁流体に対するものと一致することがわかる。 σ_m を大きくする、すなわち強い磁場を印加すると磁気トルクの作用によって粒子はその回転を抑えられ回転しにくくなることを示している。したがって図4の粒子の回転角速度分布からわかるように粒子の回転に対しては、印加磁場が弱い場合には速度こう配が支配的で、強くなれば磁化の作用が支配的になる。

6・2・4 電場効果パラメータ ζ による影響 図5を見ると、速度分布は $\zeta = 0.5$ のときをほぼ境として $\zeta > 0.5$ の場合には加速される傾向が見られ、 $\zeta < 0.5$ の場合には減速される傾向が見られる。このことは図6のハルトマン数依存性を見るといっそう明らかである。このとき流体各点に働く Lorentz 力は次式で表される。

$$\mathbf{F} = j_y (B_x \mathbf{e}_x - \mu_0 H_0 \mathbf{e}_z) \dots \dots \dots (64)$$

このうち流れ方向に働く力は $-\mu_0 H_0 j_y$ である。したがって、 $j_y > 0$ の場合には流れは減速され、 $j_y < 0$ の場合には加速されることになる。この誘起電流による Lorentz 力の大きさによって図5の速度分布に見られるように3とおりのパターンを示すことになる。すなわち印加電流が比較的小さければ ($\zeta < 0.5$) 印加磁場の作用は流れを減速する働きをもつことになる。また、 $\zeta = 0.5$ の場合には粘性力に対して印加電流と誘起電流による Lorentz 力は釣り合い、さらに $\zeta > 0.5$ の場合には印加電流による Lorentz 力が大きくなり、流れは加速される。この電場効果パラメータの値は、他の無次元数の変化が流れに及ぼす影響にも大きく関わってくる。ただし、この分布状態の加減速の区別は流れ場全体として見た場合にどちらの傾向が強く出ているかによるもので、流体の各点を見れば $\zeta > 0.5$ の場合でも流れが減速される点があり得ることを注意しておく。また、 $\zeta = 0.5$ の場合には、流量はハルトマン数 Ha の値によらず一定でニュートン流体の流量に一致する。

次に粒子の角速度分布を見ると ζ の値にかかわらず Ha が大きい場合には平板間中央付近では粒子の回転がほぼ零になることがわかる。さらに静止壁面近傍では ζ を増大させていくと負の回転方向に角速度が増加していくが、動壁面近傍では $\zeta = 0.5$ の値を境にしてその回転方向の逆転現象が見られる。

6・2・5 ハルトマン数 Ha による影響 図6を見ると、速度分布、流体および粒子の回転角速度分布は ζ の値によって分布の様子が大きく異なっている。印加磁場は、 $\zeta < 0.5$ の場合には速度を減速する方向に働き、 $\zeta > 0.5$ の場合には速度を加速する方向に働くことが図6の速度分布よりわかる。この原因は前節で述べたように Lorentz 力の x 成分から説明できる。ハルトマン数 Ha を大きくすれば印加磁場あるいは電流の絶対値を増大させることになり、Lorentz 力による流れの加減速の作用がより顕著に現れるようになる。ハルトマン数を小さくすると非導電性磁性流体の流れに近づき、大きくするとその逆の傾向が見られる。 $Ha \rightarrow 0$ かつ $\zeta \rightarrow 0$ の極限をとったものを表3の式(61)、(62)および(63)に示す。これは非導電性磁性流体の解⁽²⁾に一致する。したがって、 Ha および ζ を零に近づける、すなわち磁性流体の電気伝導率を小さくし、印加電場を小さくすると流れが非導電性磁性流体の流れに近づくことが確かめられる。図6の粒子の角速度分布を見るとハルトマン数 Ha を零に近づけると偶関数的な傾向が強まることがわかる。一方、ハルトマン数 Ha を増大させると速度 v は ζ の値に近づき、 $Ha \rightarrow \infty$ の極限で $v \rightarrow \zeta$ となる。したがって、 Ha を増大させると平板間中央付近での速度こう配が減少して粒子の回転が抑えられる。 $\zeta = 0.5$ の場合には、粒子の角速度分布は Ha の値によらず偶関数的である。 $\zeta < 0.5$ の場合、 Ha が増大すると静止壁面近傍から平板間中央付近にかけて粒子の回転が抑制され、動壁面近傍では粒子の角速度の変化が急激になる。 $\zeta > 0.5$ の場合、 Ha が増大すると平板間中央付近では粒子の回転が抑えられるが、静止壁面近傍では粒子の回転の変化が急激になる。以上の現象は速度分布および速度こう配によって説明できる。

6・3 壁面係数 δ の適用限界 $\lambda \rightarrow \infty$ おける解(56)と(57)を比較すると、壁面上を除くあらゆる場所

$$\Omega = \frac{\omega}{1 + \sigma_m} \dots \dots \dots (65)$$

が成立することがわかる。したがって、本解析モデルにおける壁面係数の適切な範囲は

$$0 \leq \delta \leq \frac{1}{1 + \sigma_m} \quad \dots\dots\dots (66)$$

となる。この範囲の妥当性はすでに前報⁽²⁾によって保証されている。

7. 結 言

著者らが誘導した内部自由度をもつ導電性磁性流体に対する基礎方程式系を用いて、流れと印加電磁場が直交する場合の平行平板間単純せん断流れについて理論解析を行った結果、次のような結果を得た。

(1) 平行平板間せん断流れに対して表2に示す速度、流体および粒子の回転角速度の解析解が求められた。これらの解を特徴づける無次元数は極性効果パラメータ ϵ 、磁性効果パラメータ σ_m 、寸法効果パラメータ λ 、壁面係数 δ 、ハルトマン数 Ha および電場効果パラメータ ζ である。

(2) 解析解は無次元数 ϵ 、 λ 、 ζ および Ha の値によってその形が3個の場合に分かれる。

(3) 導電性磁性流体の流動特性を支配する主な無次元数が流れに及ぼす影響は次のとおりである。

(i) 極性効果パラメータ ϵ を小さくすると、流れは非極性の電磁流体の流れに近づく。

(ii) 寸法効果パラメータ λ を小さくすると壁面の影響が流体内部に伝わりやすくなる。また λ を増大させると流れは見かけの粘度が $[(1 + (1 + \epsilon)\sigma_m)/(1 + \epsilon)]\eta$ に増加した場合の非極性の電磁流体の流れに近づく。

(iii) 磁性効果パラメータ σ_m を減少させると流れは導電性を有する極性流体の流れに近づき、逆に増大させると流れは見かけの粘度が $(1 + \epsilon)\eta$ に増加した場合の非極性の電磁流体の流れに近づく。 σ_m を増大させると粒子の回転は磁化作用によって抑えられ、粒子の角速度は減少する。

(iv) 電場効果パラメータ ζ の値が0.5より大きい場合には流れは加速され、0.5より小さい場合には減速される傾向が強くなる。ハルトマン数 Ha を増大させると、 $\zeta > 0.5$ の場合には磁場は流れを加速させるように働き、 $\zeta < 0.5$ の場合には減速させるように働く。電場効果パラメータ ζ およびハルトマン数 Ha をともに小さくすると流れは非導電性の極性磁性流体の流れに近づく。ハルトマン数 Ha を増大させると速度 v は ζ の値に近づき平板中央付近の粒子の回転は抑えられる。 $\zeta = 0.5$ を境にして動壁面近傍の粒子の回転方向は変化する。また、粒子の角速度分布は Ha が減少すると偶関数的性質が強くなる。

(3) 本解析モデルにおける壁面係数 δ の適切な範囲は次式で与えられる。

$$0 \leq \delta \leq \frac{1}{1 + \sigma_m}$$

文 献

- (1) 志澤・棚橋, 機論, 52-473, B (昭61), 325.
- (2) 志澤・ほか2名, 本論文集の2404ページ.

討 論

〔質問〕 山根 隆一郎〔東京工業大学工学部〕

結果を拝見すると電磁流体としての効果が支配的で磁性流体としての効果は非常に小さいように思われる。具体的にはどの程度の物性の流体を想定されているのか。磁性効果がもっと強い流体もあり得るのか。

〔回答〕 導電性磁性流体は現在試作段階であり、物性値などに関しては十分な測定がなされていないのが現状である。そこで、本報ではナトリウム-カリウム金属混合体を母液とする導電性磁性流体を考え、母液に関する物性値に対してはナトリウム-カリウムの値を、また懸濁粒子に関する物性値に対しては従来の非導電性磁性流体の値を参考にして磁性流体の物性値を計算した。いま0.1 T程度の印加磁場を想定すると、導電性磁性流体の主な物性値は、ほぼ以下のようになる。

$a = 5.5 \text{ nm}$	$\rho = 8.62 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$
$\sigma = 2.22 \times 10^2 \text{ 1}/\Omega\text{m}$	$\rho_a = 5.16 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
$\eta_0 = 3.75 \times 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s}$	$N = 1.25 \times 10^{23} \text{ 個/m}^3$
$\eta = 1.90 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$	$M_c = 1.52 \times 10^{-2} \text{ T}$
$\eta_1 = 3.92 \times 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s}$	$T = 473 \text{ K}$
$\tau = 0.96 \text{ }\mu\text{s}$	$i = 11 \text{ nm}$
$\tau_s = 111 \text{ ps}$	

ここで、 a は懸濁粒子の半径、 ρ は磁性流体の密度、 ρ_a は粒子の密度、 η_0 は母液のせん断粘性係数、 N は単位体積あたりの粒子数、 T は絶対温度、 τ は磁化の緩和時間、 τ_s は流体摩擦にもとづく回転運動の緩和時間である。その他の記号については本文を参照されたい。

このとき、 $\sigma_m \equiv \tau_s H_0 M_0 / I$ とすると $\sigma_m \approx 5.0$ となる。一方、従来の非導電性磁性流体の場合、 σ_m は、同じ印

加磁場のもとで、 $\sigma_m \approx 2.0$ となる。したがって、同じ強さの印加磁場に対して導電性磁性流体のほうが非導電性磁性流体よりも磁性効果が大きい。本報では、磁性効果が導電性の効果に比べて小さく現れているが、上述の理由から導電性磁性流体の磁性効果が単に小さいとはいえない。

また、導電性磁性流体の磁性効果を大きくするには、印加磁場をさらに強くする。あるいは平衡磁化の強さがより大きい強磁性体微粒子を使用するなどが考えられる。しかし、導電性磁性流体は、上述のとおり試作段階にあり、そのような流体が存在するか否かは現在不明である。

〔質問〕 神 山 新 一〔東北大学高速力学研究所〕

(1) 電磁流体力学や非導電性磁性流体力学の運動方程式においては表されなかった $\mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{H})$ の力の項が加わることが本解析の強調すべき点であると思われるが、式(12)より $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ 、したがって、式(1)において、

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \times (\mathbf{B} - \mathbf{M}) = \mathbf{J} \times \mu_0 \mathbf{H} \quad \dots\dots\dots (i)$$

となり、これは通常の電磁流体力学のローレンツ力と同じカテゴリーに入ってしまうのではないか。

(2) 図5および図6では $\delta=0, \lambda=5.0$ の極端な場合を示されているが具体的な適用例を示していただきたい。

〔回答〕 (1) 前報⁽¹⁾において、圧力 p は電場の項を省略するとき

$$p = p_0 + \int_0^H \left(\frac{\partial v \mathbf{M}}{\partial v} \right) \cdot d\mathbf{H} \quad \dots\dots\dots (ii)$$

で定義される。ところで、導電性磁性流体、非極性の導電性磁性流体および MHD ではそれぞれ

$$(i) \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \chi_m \neq \text{const}$$

$$(ii) \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \chi_m \neq \text{const}$$

$$(iii) \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \chi_m = \text{const}$$

の仮定が成り立つ。(i)の仮定では式(ii)の右辺第2項は具体化することができない。このとき、運動方程式における圧力および電磁場に関する項は電場の項を省略すると、

$$-\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{H}) \quad \dots\dots\dots (iii)$$

となる。式(4)における変位電流 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ は、他の項に比べ $(V_0/c)^2$ だけ小さいから無視すると、式(4)は式(12)となる。式(12) : $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$ を用いる限り、式(iii)は

$$-\nabla p + \mathbf{j} \times \mu_0 \mathbf{H} + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} \quad \dots\dots\dots (iv)$$

となる。仮定(ii)の場合も式(ii)の右辺第2項は具体化できない。一方、 $\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}$ は $\chi_m / \nabla H^2 / 2 + \mathbf{j} \times \mathbf{M}$ に分類できるから前述の項は

$$-\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + 1/2 \chi_m \nabla H^2 \quad \dots\dots\dots (v)$$

となる。また、仮定(iii)の場合には、式(ii)の右辺第2項は $p = p_0 + 1/2 \chi_m H^2$ と具体化できる。その結果、前述の項は

$$-\nabla p_0 + \mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\nabla p_0 + \mathbf{j} \times \{(\mu_0 + \chi_m) \mathbf{H}\} \quad \dots\dots\dots (vi)$$

となり、従来の MHD 方程式に一致する。すなわち、導電性の流体におけるローレンツ力の項は、非極性の仮定のもとでは $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ として現れるが、極性を有する場合には式(12)のもとで $\mathbf{j} \times \mu_0 \mathbf{H}$ なる形にしか現れない。この点が両者の相違点である。ご指摘の $\mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{H})$ が方程式中に残るのは、電磁場の変動が非常に速やかで式(4)における $\partial \mathbf{D} / \partial t$ が無視できない場合のみであり、このとき、これは $\mathbf{M} \times (\partial \mathbf{D} / \partial t)$ の形として現れる。

(2) 本報は、いまだ得られていない導電性磁性流体の解析解を導出すること、およびその解の基本的性質を明らかにすることを主目的としている。したがって、具体的な適用例は考えていない。上述の目的のために、流れを特徴づける数個の無次元数の流れに及ぼす影響がなるべく顕著に現れるように無次元数の値を選定している。壁面係数は本報の議論により式(66)で与えられる範囲をもつ。 δ を上限値 $1/(1+\sigma_m)$ に近い値を選ぶと解は $\lambda \rightarrow \infty$ の解に近い。寸法効果の影響を調べにくい。そこで、極性流体でよく用いられる no-spin 条件 : $\delta=0$ を採用した。同様の主旨から、寸法効果パラメータの値も小さくとった。しかし、実際には本文中でも述べたように、 $\lambda \rightarrow \infty$ の解が重要かつ実用的である。