粒子と平板の衝突に対する数値計算および空気輸送への応用*

沈 能 耀^{*1}, 辻 裕^{*2}, 森川 敬 信^{*2}A Numerical Simulation of Bouncing between Particle and Plate
and Its Application to Pneumatic Conveying

Nengyao SHEN, Yutaka TSUJI, and Yoshinobu MORIKAWA

The scattering of coefficients of restitution and friction, which is often observed in experiments is studied numerically by using a new bouncing model. This model can be applied to the bouncing of particles of arbitrary shape. Numerical simulation shows that the scattering is largely affected by particle shape and that irregular bouncing and Stick-Slip phenomena of particles in horizontal pneumatic conveying are explained by the present model.

Key Words: Multiphase Flow, Pneumatic Conveying, Numerical Simulation, Bouncing Model, Restitution Coefficient, Friction Coefficient

1. 結 言

空気輸送において粒子が管壁と衝突するとき、衝突前後の速度関係は球形粒子として導いた衝撃方程式に合わないという不規則反発がよく見られる。このような不規則反発を表すために、種々の不規則反発モデル(だ円体モデル⁽¹⁾, 粗面モデル⁽²⁾, 仮想壁面モデル⁽³⁾など)が提案され、管内の粒子の運動の数値シミュレーションに利用されてきた。しかし、これらの不規則反発モデルでは、実験値に合わせて人為的に決められる係数(粗面モデル⁽²⁾の波の幅, だ円体モデル⁽¹⁾の長軸と短軸の比と仮想壁面モデル⁽³⁾の迎え角を決める係数など)が必要で、一般性が欠けている。

本研究では、実験で決められる経験係数を必要としない不規則反発モデルとして、特徴半径モデルを作成し、それを用いて空気輸送における不規則反発とStick slip(粘着滑り)の発生原因について数値的に検討した。

一方、粒子と管壁の衝突を理論的に扱うとき、粒子と平板の反発係数 e (力積の比である)および動摩擦係

数 f が必要になるが、これらのパラメータは実験で求めなければならない。その実験方法として、球形に近い粒子を傾斜板へ落下させ衝突前後の粒子速度を測定し、そしてその値を衝撃方程式に代入して反発係数と動摩擦係数を計算する方法がある⁽⁴⁾⁽⁵⁾。しかし、かなり球形に近い粒子の場合でも、速度の測定値が大きくばらつき⁽⁵⁾⁽⁶⁾、したがって衝撃方程式から求めた反発係数と動摩擦係数も大きくばらつく。多くの研究者はこのばらつきを単に測定の誤差、あるいは粒子と平板の表面状態の差異に原因があるとしている⁽⁵⁾⁽⁶⁾。また、動摩擦係数については、それをばらつくものとして扱うのが妥当であると結論する研究者もいる⁽⁵⁾。しかし、著者らは反発および動摩擦係数のばらつきは衝突の際、粒子と平板の変形がそれほど大きくない限り、かなり球形に近い粒子でもその粒子の非球形度が支配的な要因になっていると考え、特徴半径モデルを用いて従来の実験で観察された粒子形状による反発係数および動摩擦係数の測定値のばらつきを数値的に調べた。数値計算は二次元の場合について行った。

2. 特徴半径モデル

2.1 特徴半径モデルの概念 粒子が平板と衝突する場合、その挙動は粒子の形状によってかなり違っ

* 昭和62年7月14日 東海支部三重地方講演会において講演, 原稿受付 昭和61年12月26日。

^{*1} 学生員, 大阪大学大学院 (〒565 吹田市山田丘2-1)。

^{*2} 正員, 大阪大学工学部。

てくるので、さまざまな形状を表せる衝突モデルが必要である。以下、本モデルに使われる用語の特徴半径と偏角度の意味をあらかじめ説明しておく。

図1のように任意形状の粒子が平板と衝突すると仮定する。粒子の表面にあり接触点となる点 c から粒子の重心 O までの距離を特徴半径 r と定義する。接触点と重心を結ぶ線 Oc と粒子重心を通る平板への垂線 Oh との間の角度を偏角度 θ と定義する。 θ の符号については、接触点 c が垂線から粒子の回転方向にある場合を負とし、逆の場合を正とする。接触点 c がとがった点である場合、その点に対応する偏角度 θ は粒子の入射姿勢によって変わる。すなわち、接触点 c に対応する偏角度が一定値にならず、ある範囲にある。その範囲の上限と下限を最大偏角度 θ_H および最小偏角度 θ_L と定義する。接触点が滑らかな表面にある場合、その偏角度は一意的に決まり、 $\theta = \theta_H = \theta_L$ と表す。偏角度が零にならない原因としては粒子の形状が球形からずれることだけでなく、真球であっても、粒子内の密度が均一ではなく重心と物体の中心が一致しないことなども考えられる。

任意形状の粒子に対して、重心を求めてから適当な数の特徴半径 r をとって、それぞれの特徴半径に対応する最小と最大の偏角度 (θ_L, θ_H) を測って質量などと同じように記録しておけば、2・2 節で述べる方法で粒子と平板の衝突を扱うことができる。特徴半径の数は粒子形状が複雑であるほど多くとるべきである。逆に、粒子形状が簡単で、最大と最小偏角度および特徴半径の長さがほぼ同じである接触点が多ければ、特徴半径の数を少なくしてよい。測定にあたっては、粒子表面が凹になっている部分があれば、その部分の点が接触点になる可能性がないので、その部分では特徴半径をとらなくてよい。

粒子と平板の衝突を計算するとき、粒子表面のどの点が接触点になるか（つまり、どの特徴半径を使って計算するか）は衝突するたびに乱数によって決められる。

2・2 非球形粒子と平板の衝突における衝撃方程式

図1 粒子と平板の位置

図1のように、粒子が回転速度 ω で回転する場合、粒子の重心速度 (V_{x0}, V_{y0}) と接触点 c の速度 (V_x, V_y) の関係は

$$V_{x0} = V_x + \delta r \omega \cos \theta \quad \cdots \cdots (1)$$

$$V_{y0} = V_y + \delta r \omega \sin \theta \quad \cdots \cdots (2)$$

となる。ただし、粒子の回転は図に表している方向を正にする。 δ は粒子が上平板と衝突するか、下平板と衝突するかを示す係数であり、粒子が下平板と衝突する場合 $\delta=1$ 、上平板と衝突する場合 $\delta=-1$ と定める。式(1)、(2)は衝突全期間にわたって成り立つ。衝突する直前、粒子の接触点の速度成分 $V_y^{(0)}$ が平板に向かっていなければならないので ($\delta V_y^{(0)} < 0$)、選んだ特徴半径で計算するとき、次の条件が満足されない場合は、他の特徴半径を使って計算する。

$$\delta V_{y0}^{(0)} < r \omega^{(0)} \sin \theta \quad \cdots \cdots (3)$$

衝突においては、物体が圧縮され、ついで圧縮から回復する二つの期間がある。図1に示されている座標系において、非球形粒子が平板と衝突する場合、その衝撃方程式は次のとおりである。

$$m(V_{x0}^{(1)} - V_{x0}^{(0)}) = -\epsilon J_x^{(1)} \quad \cdots \cdots (4)$$

$$m(V_{x0}^{(2)} - V_{x0}^{(1)}) = -\epsilon J_x^{(2)} \quad \cdots \cdots (5)$$

$$m(V_{y0}^{(1)} - V_{y0}^{(0)}) = \delta J_y^{(1)} \quad \cdots \cdots (6)$$

$$m(V_{y0}^{(2)} - V_{y0}^{(1)}) = \delta J_y^{(2)} \quad \cdots \cdots (7)$$

$$I\omega^{(0)} + \delta \epsilon J_x^{(1)} r \cos \theta - J_y^{(1)} r \sin \theta = I\omega^{(1)} \quad \cdots \cdots (8)$$

$$I\omega^{(1)} + \delta \epsilon J_x^{(2)} r \cos \theta - J_y^{(2)} r \sin \theta = I\omega^{(2)} \quad \cdots \cdots (9)$$

$$J_y^{(2)} = e J_y^{(1)} \quad \cdots \cdots (10)$$

ただし、 m は粒子の質量、 I は粒子の慣性モーメントである。 J_x, J_y は X と Y 方向の力積である。上添字⁽⁰⁾ は衝突直前、⁽¹⁾ は圧縮期間の終わった瞬間、⁽²⁾ は回復期間が終わった瞬間（衝突直後）を意味する。 ϵ は接触点の接線方向速度の正負を表す係数である。 $V_x^{(0)} < 0$ の場合 $\epsilon = -1$ とし、 $V_x^{(0)} > 0$ の場合、 $\epsilon = +1$ とする。 e は反発係数、 $J_y^{(1)}$ は圧縮期間、 $J_y^{(2)}$ は回復期間の法線方向の力積である。

圧縮期間が終わった瞬間、平板に垂直な接触点の速度成分は

$$V_y^{(1)} = 0 \quad \cdots \cdots (11)$$

となる。

衝突状態は粒子の滑りの状態によって三つの場合にわけられる。

(1) 全衝突期間にわたって滑る場合

この場合、条件

$$V_x^{(2)} * V_x^{(0)} > 0 \quad \cdots \cdots (12)$$

は満たされなければならない。また、衝突全期間にわ

たつて

$$J_x = f J_y \quad \text{.....(13)}$$

という関係式が成り立つ。ここで、 f は動摩擦係数である。

(2) 滑りが回復期間において止まる場合

この場合、条件

$$V_x^{(2)} * V_x^{(0)} < 0 < V_x^{(0)} * V_x^{(1)} \quad \text{.....(14)}$$

は満たされなければならない。さらに、粒子の滑りが止まったら、二度と滑りが起こらないと考えられるので

$$V_x^{(2)} = 0 \quad \text{.....(15)}$$

が成り立つ。そして

$$J_x^{(1)} = f J_y^{(1)} \quad \text{.....(16)}$$

という関係がある。

(3) 滑りが圧縮期間において止まる場合

この場合、条件

$$V_x^{(0)} * V_x^{(1)} < 0 \quad \text{.....(17)}$$

は満足されなければならない。(2)と同様な理由で

$$V_x^{(2)} = V_x^{(1)} = 0 \quad \text{.....(18)}$$

が成り立つ。

2.3 衝撃運動方程式の解法 衝突前後の速度関係は滑り状態によって変わるので、以下、それぞれの場合に対応して、衝突後の速度の表現式を導く。まず、粒子の滑り状態が(1)の場合に相当すると仮定する。式(8)から

$$\omega^{(1)} = \omega^{(0)} + \frac{\delta \varepsilon J_x^{(1)}}{I} r \cos \theta - \frac{J_y^{(1)}}{I} r \sin \theta \quad \text{.....(19)}$$

が得られる。

式(2)を使って $V_{y0}^{(1)}$ を求めて、さらに、式(11)を考慮して式(6)を変形すると、式(6)は

$$m(\delta r \omega^{(1)} \sin \theta - V_{y0}^{(0)}) = \delta J_y^{(1)} \quad \text{.....(20)}$$

となる。式(13)を考慮して、式(19)を式(20)に代入すれば

$$J_y^{(1)} = \frac{I m (r \omega^{(0)} \sin \theta - \delta V_{y0}^{(0)})}{I + m r^2 (\sin^2 \theta - \delta \varepsilon f \cos \theta \sin \theta)} \quad \text{(21)}$$

が求まる。式(6)、(7)より、 $V_{y0}^{(1)}$ を消去し、式(10)の関係をいれれば、

$$V_{y0}^{(2)} = V_{y0}^{(0)} + \delta(1+e) J_y^{(1)} / m \quad \text{.....(22)}$$

が得られ、同様に、式(4)、(5)から

$$V_{x0}^{(2)} = V_{x0}^{(0)} - \varepsilon(1+e) f J_y^{(1)} / m \quad \text{.....(23)}$$

が得られる。また、式(8)、(9)から $\omega^{(1)}$ を消去すれば

$$\omega^{(2)} = \omega^{(0)} + (1+e)(\delta \varepsilon f \cos \theta - \sin \theta) r J_y^{(1)} / I \quad \text{.....(24)}$$

が求まる。

求められた $V_{x0}^{(2)}$ と $\omega^{(2)}$ を用いれば、 $V_x^{(2)}$ は式(1)からすぐ求まる。この $V_x^{(2)}$ を使って判定を行うとき、もし式(12)が満足されなければ、粒子の滑りは衝突の間に停止し、(2)か(3)の場合に相当する。

ここで、とりあえず、(2)と仮定する。この場合、式(15)を考慮して式(1)から

$$V_{x0}^{(2)} = \delta r \omega^{(2)} \cos \theta \quad \text{.....(25)}$$

が得られる。式(25)を式(4)、(5)に代入して $V_x^{(1)}$ を消去すれば

$$-\varepsilon(J_x^{(1)} + J_x^{(2)}) = m(\delta r \omega^{(2)} \cos \theta - V_{x0}^{(0)}) \quad \text{(26)}$$

が得られる。

式(26)を式(8)、(9)に代入して、 $\omega^{(2)}$ を求めると

$$\omega^{(2)} = \frac{I \omega^{(0)} + \delta m V_{x0}^{(0)} r \cos \theta - (1+e) J_y^{(1)} r \sin \theta}{I + m r^2 \cos^2 \theta} \quad \text{.....(27)}$$

となる。ただし、 $J_y^{(1)}$ と $V_{y0}^{(2)}$ は(1)の場合と同じである。 $V_{x0}^{(2)}$ はしたがって式(25)から簡単に求まる。

式(1)、(16)を考慮して、式(4)から

$$V_x^{(1)} = V_{x0}^{(0)} - \varepsilon f J_y^{(1)} / m - \delta r \omega^{(1)} \cos \theta \quad \text{.....(28)}$$

が得られる。ただし $\omega^{(1)}$ は(1)の場合と同じである。

もし、ここで求められた $V_x^{(1)}$ が式(14)を満足しなければ、滑りが圧縮期間に止まり、(3)の場合になる。

この場合、式(2)、(11)を考慮して、式(6)から

$$J_y^{(1)} = m(r \omega^{(1)} \sin \theta - \delta V_{y0}^{(0)}) \quad \text{.....(29)}$$

が得られる。

式(1)と式(18)を考慮して、式(4)、(29)を式(8)に代入して $\omega^{(1)}$ について整理すると

$$\omega^{(1)} = \frac{I \omega^{(0)} + \delta m V_{x0}^{(0)} r \cos \theta + \delta m V_{y0}^{(0)} r \sin \theta}{I + m r^2} \quad \text{.....(30)}$$

が得られる。これを式(29)に代入すれば、 $J_y^{(1)}$ が求まり、そして $J_y^{(1)}$ を式(22)に代入すると $V_{y0}^{(2)}$ が求まる。

$\omega^{(2)}$ と $V_{x0}^{(2)}$ は(2)の場合と同じである。

3. 粒子軌跡の計算

3.1 粒子軌跡の計算に関する仮定 ここでは、気流の乱れに直接影響されない粗大粒子を考える。計算に使う粒子として球形に近いものを選んだ。粒子に作用する力としては、流体抵抗、揚力、重力および壁面と衝突する際に受ける反発力、摩擦などがある。空気は常温、非圧縮性とする。

3.2 気流中の粒子の運動方程式 本計算においては、二次元の場合を対象とするので、主流方向を X 軸に、それと垂直の方向を Y 軸にとれば、粒子の運動

方程式は次のようになる。

$$\dot{X} = \frac{3}{4} C_D \frac{\rho V_r}{\sigma d} (U_x - \dot{X}) + \frac{3}{4} C_L \frac{\rho V_r}{\sigma d} (U_y - \dot{Y}) + g_x \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\dot{Y} = \frac{3}{4} C_D \frac{\rho V_r}{\sigma d} (U_y - \dot{Y}) + \frac{3}{4} C_L \frac{\rho V_r}{\sigma d} (U_x - \dot{X}) + g_y \quad \dots\dots\dots (32)$$

ここで、 C_D : 抵抗係数、 C_L : 揚力係数〔文献(1)の計算式を使う〕、 ρ : 空気密度、 σ : 粒子密度、 d : 粒径(粒子が球形に近いので、投影面積と体積の見掛け粒径が同じとみなす)、 g_x, g_y : それぞれ重力の加速度の X と Y 方向の成分、 V_r : 粒子の気流に対する相対速度で $V_r = \sqrt{\dot{Y}^2 + (U - \dot{X})^2}$ 、 U_x, U_y : 気流の X, Y 方向速度、 $(\dot{})$: () の時間微分である。

計算においては、ルンゲクッタ法を用いて、運動方程式(31)、(32)を積分して空気流中の粒子の軌跡を求めるが、粒子が壁面と衝突するときは、2・2節で述べた方法で処理する。

4. 計算結果

4・1 計算条件 粒子の直径は 1.06 mm で、密度は 1026 kg/m³ である。空気密度は 1.19 kg/m³、動粘度は 1.60×10^{-5} m²/s とした。本計算は 2 種類の粒子に対して行った。一つは図 2 に示す粒子で、時計回り方向を回転方向として 41 個の特徴半径がとられている。それらに対応する偏角度は $-4.71 \sim 3.1^\circ$ の範囲内に分布している。もう一つは比較のために考えた 180 個の角をもつ正多角形粒子で、粒径は図 2 の粒子と同じである。その偏角度は $-1 \sim 1^\circ$ で分布しており、上の粒子に比べて偏角度が小さくて球形により近い。以下、図 2 の粒子を単に非球形粒子、正多角形粒子を多角形粒子と呼ぶ。いずれの粒子においても壁面との間の反発係数 $e=0.875$ 、動摩擦係数 $f=0.4$ を定数として与え、これを真の値とする。これらの係数はプラスチック管内で、1.06 mm のポリエチレンペレットを空気輸送する場合に相当する⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁶⁾。

4・2 傾斜板上の反発実験のシミュレーション

4・2・1 法線方向速度比 e' と反発係数 e の関係

図 2 計算機で作成した非球形粒子の形状

球形粒子の場合、粒子の衝突前後の法線方向速度比 e' が反発係数 e (力積比) に等しいので、反発係数を次式から求める研究者が多い^{(3)~(6)}。

$$V_{y0}^{(2)} = -e V_{y0}^{(0)} \quad \dots\dots\dots (33)$$

しかし、一見球形に見える粒子でも実際には真球ではないため、衝突前後の法線方向速度比 e' が大きくばらつく。図 3 は衝突前後非球形粒子の法線方向速度の比を示す。横軸は粒子の入射角である。図中、縦線に見えるものはプロットされた速度比を表す多数の点であり、速度比のばらつきの範囲はこれからわかる。文献(5)と(6)のなかにも、実験で反発係数を測定するとき、大きなばらつきがあると指摘されている。上の計算結果からこのばらつきは斜面上の反発実験で反発係数を測定する場合の避けられない誤差に対応することがわかる。図 4 は偏角度が小さい多角形の粒子を使って計算した結果で、偏角度が小さい粒子の場合(すなわち、真球度がよい)、ばらつきが小さいことを示している。また、入射角が大きくなると、速度比のばらつきが小さくなることも図 3、4 からわかる。したがって、反発係数を測定するとき、入射角を 90° にして水平板に落下させる実験方法がよいことは計算からも明らかである。

図 3 衝突前後非球形粒子の法線方向の速度比

図 4 衝突前後多角形粒子の法線方向の速度比

4.2.2 動摩擦係数 反発実験で動摩擦係数を求める場合、衝突前後の粒子移動速度の測定値を用いて球形粒子として導いた式から求める方法がある⁽³⁾。しかし、実験では粒子の移動速度の差が小さくて測定しにくいので、測定精度が低くなる。ゆえに、回転初速度が零である粒子を落下させて、回転速度から求める方法もよく用いられる⁽⁵⁾。前者の場合、

$$V_{x_0}^{(2)} = V_{x_0}^{(0)} + (1+e)\varepsilon f V_{y_0}^{(0)} \dots\dots\dots (34)$$

が用いられ、後者の場合

$$\omega^{(2)} = \frac{5(1+e)\varepsilon}{d} \delta f V_{y_0}^{(0)} \dots\dots\dots (35)$$

が用いられる。

しかし、実際には移動速度と回転速度から求められる動摩擦係数の値はずいぶん異なる。したがって、ここでは、移動速度から求められる動摩擦係数を f_1 、回転速度からのものを f_2 とする。入射角が大きいほどばらつきが大きくなる。図5、6は式(34)から求められた動摩擦係数であり、図7、8は式(35)からの結果である。与えられた動摩擦係数が一定であっても、式(34)、(35)から求められる動摩擦係数は一定にならない。とくに、回転速度から求められる動摩擦係数は入射角が小さい場合でも、大きくばらつく。したがって、

図5 移動速度から求めた動摩擦係数 f_1 (非球形粒子)

図6 移動速度から求めた動摩擦係数 f_1 (多角形粒子)

実験で得られる動摩擦係数のばらつきは粒子形状に大きく左右されることが推論され、実験で得られる動摩擦係数のばらつきは粒子が非球形のため、避けられないといえよう。本来、動摩擦係数は入射角が小さく、衝突の間粒子が滑っている場合に限って意味がある。し

図7 回転速度から求めた動摩擦係数 f_2 (非球形粒子)

図8 回転速度から求めた動摩擦係数 f_2 (多角形粒子)

図9 傾斜板反発実験の非球形粒子の軌跡

図 10 二次元チャンネルにおける非球形粒子の軌跡
 $D=25 \text{ mm}$, $e=0.875$, $f=0.4$, $U=10 \text{ m/s}$

かし、非球形粒子の場合、球形粒子で導いた滑り条件が満足されても、実際、粒子が滑らないかもしれない。これも動摩擦係数の測定誤差になる。また、図 5, 7 の比較より、移動速度から求める動摩擦係数のほうのばらつきは理論的には小さいはずであるが、測定が困難であるため、実験で求められる動摩擦係数のばらつきは大きい。一方、実験では、回転速度は比較的に精度よく測定できるが、図 7 が示すように、粒子形状の影響を受けやすい。この結果から反発実験によって動摩擦係数を求める方法は真球度のすぐれた粒子に限るべきである。したがって、一般の粒子に対し動摩擦係数を測定するには、別の方法、例えば、水平板の上で滑らせて摩擦力和重量の関係から動摩擦係数を求める方法がよいといえる。

4・2・3 傾斜板に落ちる粒子の軌跡 図 9 は 50 cm の高さで自由落下し、傾斜板と衝突し、反発されて飛んでいく粒子の軌跡である。この図から、非球形粒子の場合、衝突直後粒子の速度がばらつくため、粒子の軌跡はそれぞれ異なっており、ある範囲で分布していることがわかる。これは文献(5)と(6)の反発実験の結果と一致する。したがって、反発実験で得られる軌跡がばらつく原因としては測定誤差、粒子と壁面の表面性質の差異のほか、かなり球形に近い粒子の場合でも、その形状をあげなければならない。

4・3 空気輸送への応用 図 10 に二次元ダクト内の粒子軌跡の 2 例を示す。図からわかるように、粒子は不規則に飛しょうしながら、輸送される。つまり、特徴半径モデルを用いれば、人為的に不規則反発を与え

ずに、不規則反発と呼ばれる現象を再現することができる。

また、図からわかるように、実験でよく観察されている Stick-Slip (衝突後、粒子が壁面に粘着されるように法線方向の速度成分を失ってしばらく衝突を繰返してから反発する現象)もシミュレーションで再現されている。

5. 結 論

本研究では、任意形状の粒子と平板の衝突モデルとして、特徴半径モデルを作成した。このモデルは輸送実験に依存する経験係数を必要としないので、従来の計算モデルに比べ、空気輸送のシミュレーションのための反発モデルとしてより適当である。このモデルを用いて反発係数と動摩擦係数の測定値のばらつき、不規則反発、Stick-Slipなどを調べ、これらの現象が同じ原因(粒子が平板と衝突するとき、接触点が重心を通る平板への垂線から離れたこと)によって発生したものであることを数値的に示した。

文 献

- (1) Matsumoto, S., and Saito, S., *J. Chem. Eng. Jpn.*, 3-1 (1970), 83.
- (2) Matsumoto, S., and Saito, S., *J. Chem. Eng. Jpn.*, 3-2 (1970), 223.
- (3) 辻・ほか 2 名, 機論, 49-445, B (昭 58), 1850.
- (4) 辻, 粉体工学会誌, 20-8 (昭 58), 514.
- (5) 山本, 機論, 51-471, B (昭 60), 3712.
- (6) 辻・ほか 3 名, 機論, 52-474, B (昭 61), 557.