k - ϵ モデルの二次元平行平板間の 流れの近似解*

竹 光 信 正^{*1}

An Approximate Solution of the k - ϵ Model for Turbulent Channel Flow

Nobumasa TAKEMITSU

An approximate solution of the standard k - ϵ model is found for two-dimensional turbulent channel flow. Here, k is the turbulent energy, and ϵ the dissipation rate of kinetic turbulent energy. Using this solution, five constants used in the model are all determined reasonably with the aid of experimental data. If an approximate solution with the logarithmic law as the leading term is sought, the standard k - ϵ model is not applicable since the second-order solution has divergent terms.

Key Words: Turbulence, k - ϵ Model, Approximate Solution, Channel Flow, Model Constants

1. 結 言

工学上問題となる流れは、そのほとんどが乱流である。したがって、その流れの様子を予測することはきわめて重要であるが、これを正確に計算することは、きわめて難しい。その理由として、mixing layerにおけるエネルギーのバランスを正しく計算することが難しいこと、方程式を離散化したとき、離散化した方程式の運動量、エネルギー、エントロピーなどの物理量の保存性に問題があることなどをあげることができる。したがって、現時点では乱流の正確な計算として、モデル計算が重要な意味をもっている。

さて、現在までのところ、信頼性が高く、また適用性の広い乱流モデルとして、 k - ϵ モデル、LESをあげることができる。実際、これらのモデルを使った計算例は多く、壁面乱流、噴流、流体機械内の流れなど、種々の乱流場が計算されている⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾。しかし、これらのモデルにつき、種々のケースについて全く問題がないわけではなく、いろいろの角度から研究がおこなわれている⁽⁵⁾。これらのモデルを比較すると、一般的に

言って、 k - ϵ モデルは計算は簡単であるが、モデル定数の決定は経験の範囲をでていない。これに対して、LESは計算は膨大であるが、細かな乱流の変動量、および統計量を得ることができる。しかし、たとえば壁面乱流の場合、壁面近傍の乱流エネルギーについては、 k - ϵ モデルのほうがLESに比べてよい結果が得られている。この点については、最近Horiuti⁽⁶⁾によってかなり改良されている。

以下、 k - ϵ モデルに話を限る。 k - ϵ モデルは、他の2方程式モデル k - kl モデル⁽⁷⁾、 k - ω モデル⁽⁸⁾などに比べてよく研究されており、そのモデル定数についてもよく吟味されている⁽⁹⁾。現在のところ、2方程式モデルの中では、最も広く使われている⁽¹⁰⁾。さらに、最近、Yoshizawa⁽¹¹⁾により導かれたReynolds応力の高次近似は、たとえば乱流強度の非等方性を表現することができる⁽¹²⁾ため、従来の k - ϵ モデルの適用性を大きく広げたものと考えられる。したがって、工学的な見地からすると、LESに比べて、計算の比較的簡単な k - ϵ モデルは、将来にわたっても重要なモデルであるということが出来る。

しかしながら、最も簡単な乱流場の一つである平行平板間の二次元乱流場に限ってみても、現存の k - ϵ モデルでは、中央付近のうず粘性率が実験値より約5割

* 昭和62年7月14日 東海支部三重地方講演会において講演、原稿受付 昭和61年11月4日。

^{*1} 正員、東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木7-22-1)。

程度大きく計算される。このことは、通常 k -ε モデルでは、うず粘性率が副次的な量であることからあまり問題にされていない。また、壁の効果を取り入れた k -ε モデル⁽⁹⁾⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾についてみると、壁近傍の乱流運動エネルギーは、LES の結果⁽²⁾より実験値とよく一致するが、モデルの普遍性という点で問題がある。

k -ε モデルは、もちろん複雑な非線形方程式である。したがって、上述の種々の問題は、そう簡単ではない。また、複雑な非線形性のために、著者はこれまでこの方程式の近似解について詳しく論じた文献をみたことがない。しかし、この方程式は、以下に示すように近似解をもつ。いわゆる高 Reynolds 数流れの標準 k -ε モデル（本論文では、壁の効果を見捨てた Jones と Launder⁽¹⁵⁾によるモデルを原形としているものを標準 k -ε モデルとよぶことにする）の近似解は、次に示すいくつかの観点から重要な意味をもつものと考えられる。

(1) 方程式の解の構造がわかるから、モデル定数決定の根拠が明確になり、工学的にはモデル定数決定の指針となる。

(2) 物理的には、モデル方程式の各項のオーダー評価が容易にでき、かつモデル方程式の良し悪しの判定の基準になる。

(3) 境界条件として壁関数を使う既存の方法では、境界上の点でモデル方程式はきちんと境界条件を満足していないが、これを満足させるようにすることができる。

(4) 現在のところ、計算スキームのちがいが計算結果に及ぼす影響については、差分格子の大きさの程度なども含めて明確でないが、こうしたことを明確にできる。

以下、本論文において標準 k -ε モデルの近似解を導き、この解の構造を論じ、モデル定数決定の根拠を明確にする。

2. 標準 k -ε モデル

標準 k -ε モデルの平均流の基本方程式は、

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_e \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (1)$$

$$D = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

で与えられる。ここで、 U_i は速度ベクトル ($i=1, 2, 3$)、 x_i は位置ベクトル、 t は時間、 ρ は流体の密度、 p は圧力、 ν_e はうず粘性率、 D は膨張速度を表す。また、 $\langle$

返し下つき添字については、1 から 3 までの和をとるものとする。

うず粘性率 ν_e は、基本的統計量として乱流エネルギー k と、エネルギー散逸率 ε を使うと

$$\nu_e = c_\nu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad c_\nu = \text{const.} \quad (3)$$

と表せる。ただし、 k と ε はじょう乱部分の速度ベクトル u と流体の動粘性率 ν を使って

$$k = \langle u_i u_i \rangle / 2 \quad (4)$$

$$\varepsilon = \nu \langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rangle \quad (5)$$

で定義される。 $\langle \rangle$ はアンサンブル平均を表す。

乱流エネルギー k と、エネルギー散逸率 ε の輸送方程式は、標準 k -ε モデルでは、それぞれ

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k U_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{k1} \nu_e \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - \varepsilon \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon U_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{\varepsilon 1} \nu_e \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{k} G_k - c_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (7)$$

$$G_k = \nu_e \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

のようにモデル化されている。また、Reynolds 応力は、

$$R_{ij} \equiv -\langle u_i u_j \rangle = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + \nu_e \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (8)$$

とモデル化される。ここで、 δ_{ij} は Kronecker のデルタ記号である。

次に、式(1)~(8)を流れ場の代表速度 V 、代表長さ L を使って

$$\begin{aligned} x_i &\rightarrow L x_i, \quad U_i \rightarrow V U_i, \quad p \rightarrow \rho V^2 p, \quad \nu_e \rightarrow \nu_e, \\ k &\rightarrow V^2 k, \quad \varepsilon \rightarrow (V^3/L) \varepsilon, \quad G_k \rightarrow (V^3/L) G_k, \\ R_{ij} &\rightarrow V^2 R_{ij} \end{aligned}$$

とおいて無次元化すると、 $Re = VL/\nu$ (Reynolds 数) として

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} \\ &+ \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_e \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (9) \end{aligned}$$

$$D = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k U_j}{\partial x_j} = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{k1} \nu_e \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - \varepsilon \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon U_j}{\partial x_j} &= \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{\varepsilon 1} \nu_e \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \\ &+ c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{k} G_k - c_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (12) \end{aligned}$$

$$\nu_e = c_\nu Re \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (13)$$

$$R_U = -\frac{2}{3} k \delta_U + \frac{1}{Re} \nu_e \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \dots\dots\dots (14)$$

$$G_k = \frac{1}{Re} \nu_e \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

となる。式(11)～(13)にあらわれる定数は、標準 k - ε モデルでは、

$$c_\nu = 0.09, \quad c_{k1} = 1.0, \\ c_{\varepsilon 1} = 1/1.3, \quad c_{\varepsilon 2} = 1.45, \quad c_{\varepsilon 3} = 1.9 \dots\dots\dots (15)$$

のように選ばれている⁽¹⁾。

3. 二次元平行平板間の乱流場の近似解

3.1 方程式の簡略化と変数の変換 座標系を図1のようにとるものとする。そうすると、この流れは一次元の定常流で、式(9)～(14)は簡単になり、

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_e \frac{\partial U}{\partial y} \right) = Re \frac{\partial p}{\partial x} \dots\dots\dots (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(c_{k1} \nu_e \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \nu_e \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - Re \cdot \varepsilon = 0 \dots\dots (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(c_{\varepsilon 1} \nu_e \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + c_{\varepsilon 2} \nu_e \frac{\varepsilon}{k} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - c_{\varepsilon 3} Re \frac{\varepsilon^2}{k} = 0 \dots\dots\dots (18)$$

$$\nu_e = c_\nu Re \frac{k^2}{\varepsilon} \dots\dots\dots (19)$$

となる。ここで、第1式のみ壁まで考慮した有次元の式

$$\frac{\partial}{\partial y} (\nu + \nu_e) \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \dots\dots\dots (20)$$

を無次元化して

$$\frac{\partial}{\partial y} (1 + \nu_e) \frac{\partial U}{\partial y} = Re \frac{\partial p}{\partial x} \dots\dots\dots (21)$$

を考える。これは、 $\partial p / \partial x$ を摩擦速度を使って表したためである。

$$(1 + \nu_e) \frac{\partial U}{\partial y} = Re \frac{\partial p}{\partial x} y + \text{const.} \dots\dots\dots (22)$$

$y = 1/2$ で $\partial U / \partial y = 0$ であるから、 $\text{const.} = -Re(\partial p / \partial x)/2$ となる。これを代入して

$$(1 + \nu_e) \frac{\partial U}{\partial y} = Re \frac{\partial p}{\partial x} \left(y - \frac{1}{2} \right) \dots\dots\dots (23)$$

が得られる。他方、摩擦速度 u_τ は有次元で

図1 座標系の定義

$u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$, $\tau_w = \mu(\partial U / \partial y)_{y=0}$, μ : 粘性係数であるから、無次元表示では、

$$u_\tau = \sqrt{\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0}}, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} = Re u_\tau^2 \dots\dots\dots (24)$$

となる。式(23)で $y \rightarrow 0$ とおくと、 $\nu_e \rightarrow 0$ であるから

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{1}{2} \frac{1}{Re} \frac{\partial p}{\partial x} \dots\dots\dots (25)$$

式(24)と式(25)から

$$-(\partial p / \partial x) = 2 u_\tau^2 \dots\dots\dots (26)$$

が得られる。これを式(16)に代入して

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_e \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -2 Re u_\tau^2 \dots\dots\dots (27)$$

を得る。

次に、式(24)、および式(16)～(18)に対して、さらに変換

$$U = \frac{u_\tau}{x} U^*, \quad k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{c_\nu}} k^*, \quad \varepsilon = \frac{u_\tau^3}{x} \varepsilon^*, \\ \nu_e = Re x u_\tau \nu_e^* \dots\dots\dots (28)$$

を施す。ただし、 x は Kármán 定数である。この変換は0次の、解 U^* , k^* , ε^* , ν_e^* がモデル定数によらないばかりか、 k のオーダーが y の小さいところで1になるので数値計算にも適している。そうすると、式(27), (17)～(19)は簡明に

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_e^* \frac{\partial U^*}{\partial y} \right) = -2 \dots\dots\dots (29)$$

$$a c_{k1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_e^* \frac{\partial k^*}{\partial y} \right) + \nu_e^* \left(\frac{\partial U^*}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon^* = 0 \dots\dots (30)$$

$$a \beta \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_e^* \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y} \right) + \frac{\varepsilon^*}{k^*} \nu_e^* \left(\frac{\partial U^*}{\partial y} \right)^2 - \gamma \frac{\varepsilon^{*2}}{k^*} = 0 \quad (31)$$

$$\nu_e^* = \frac{k^{*2}}{\varepsilon^*} \dots\dots\dots (32)$$

$$a = x^2 / \sqrt{c_\nu}, \quad \beta = c_{\varepsilon 1} / c_{\varepsilon 2}, \quad \gamma = c_{\varepsilon 3} / c_{\varepsilon 2} \dots\dots (33)$$

とかける。

3.2 近似解の展開 式(16)で y が小さいところ(緩和層の端)では、厳密に対数速度分布が成り立つことがわかっている。そこで、以下 k - ε モデルが近似的に正しいものと仮定すると、 y の小さいところでは、速度分布 U は壁法則からのずれを与えるはずである。したがって、 ν_e^* , k^* , ε^* の分布は

$$\nu_e^* = y(1 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3) + O(y^5) \dots\dots (34)$$

$$k^* = 1 + B_1 y + B_2 y^2 + B_3 y^3 + O(y^4) \dots\dots\dots (35)$$

$$\varepsilon^* = (1 + c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + O(y^4)) / y \dots\dots\dots (36)$$

の形に仮定できる。これを式(29)～(32)に代入し、近似

$$1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad |x| \ll 1 \quad (37)$$

を使って、 y のべきについて整理すると、たしかに解は以下のように定まる。ここで、初項(壁関数)は k 方

程式(30)を満足することを注意しておく。

$$U^* = \ln y^+ - (A_1 + 2)y + \frac{1}{2} \{-A_2 + A_1(A_1 + 2)\}y^2 \\ + \frac{1}{3} \{-A_3 + 2A_2(A_1 + 1) - A_1^2(A_1 + 2)\}y^3 \\ + \text{const.} + O(y^4) \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$A_1 = -\frac{2\{3(\gamma - 1) + \alpha C_{k1}\}}{(\gamma - 1)(2 - \alpha C_{k1})} \quad \dots\dots\dots (39 \cdot a)$$

$$B_1 = -\frac{4}{2 - \alpha C_{k1}} \quad \dots\dots\dots (39 \cdot b)$$

$$C_1 = \frac{2(\alpha C_{k1} - \gamma + 1)}{(\gamma - 1)(2 - \alpha C_{k1})} \quad \dots\dots\dots (39 \cdot c)$$

$$A_2 = f_1 + 2B_2 - C_2 \quad \dots\dots\dots (40 \cdot a)$$

$$B_2 = \frac{f_1 + f_2}{2(2\alpha C_{k1} - 1)} \quad \dots\dots\dots (40 \cdot b)$$

$$C_2 = \frac{1}{2(\alpha\beta + 1 - \gamma)} \left\{ (\alpha\beta + 1)f_1 + f_3 \right. \\ \left. + \frac{(f_1 + f_2)(2\alpha\beta - \gamma + 3)}{2(2\alpha C_{k1} - 1)} \right\} \quad \dots\dots\dots (40 \cdot c)$$

$$f_1 = (B_1 - C_1)^2, \quad f_2 = -(A_1 + 2)^2 - 2\alpha C_{k1} A_1 B_1$$

$$f_3 = -(A_1 + 2)^2 - (B_1 - C_1)\{A_1 + B_1 + 4 \\ - \gamma(B_1 - C_1)\}$$

$$A_3 = g_1 + 2B_3 - C_3 \quad \dots\dots\dots (41 \cdot a)$$

$$B_3 = \frac{g_1 + g_2}{9\alpha C_{k1} - 2} \quad \dots\dots\dots (41 \cdot b)$$

$$C_3 = \frac{1}{2(3\alpha\beta - \gamma + 1)} \left\{ (2\alpha\beta + 1)g_1 + g_3 \right. \\ \left. + \frac{(g_1 + g_2)(4\alpha\beta - \gamma + 3)}{9\alpha C_{k1} - 2} \right\} \quad \dots\dots\dots (41 \cdot c)$$

$$g_1 = (B_1 - C_1)\{2(B_2 - C_2) - C_1(B_1 - C_1)\}$$

$$g_2 = -(A_1 + 2)\{2A_2 - A_1(A_1 + 2) \\ - 3\alpha C_{k1}(2A_1B_2 + A_2B_1)\}$$

$$g_3 = -(A_1 + 2)\{2A_2 - A_1(A_1 + 2) - 2\alpha\beta A_1 C_2 \\ - (B_1 - C_1)\{A_2 - (2\gamma - 1)B_2 + 2\gamma C_2 - (A_1 + 2)^2 \\ - B_1(A_1 + B_1 + 4) + \gamma B_1(B_1 - C_1)\} \\ - (B_2 - C_2)(A_1 + B_1 + 4)\}$$

ただし、 $y^+ = Re u_\tau y$ で、const. は定数である。

3・3 近似解の性質 モデル定数(15)の決め方とその根拠は、文献(1)、(16)にみられるが、現状では経験の範囲をでない⁽⁹⁾。本論文においては、標準 k - ε モデルが近似的に正しいと仮定して、近似解(34)～(38)を使い、解の性質とモデル定数決定の根拠を明確にする。

3・3・1 0 次の解 0 次の解は、通常標準 k - ε モデルで壁関数として、境界条件に用いられているものと一致する。すなわち、

$$U/u_\tau = \ln y^+ / x + \text{const.} \quad \dots\dots\dots (42)$$

$$k/u_\tau^2 = 1/\sqrt{C_\nu} \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$\varepsilon/u_\tau^3 = 1/xy \quad \dots\dots\dots (44)$$

$$\nu_e/Re u_\tau = xy \quad \dots\dots\dots (45)$$

である。これより、零次の解から、次の諸定数が決定されることがわかる。

U の分布から x と const. が決まる。

k の分布から C_ν が決まる。

ε の分布から x が決まる。

ν_e の分布から x が決まる。

これらの分布のうち、エネルギー散逸率 ε の分布は、 $(\partial w/\partial y)^2 = (\partial u/\partial y)^2$ のような等方性が仮定される⁽¹⁷⁾ ので、実験データの信頼性にかけるから、除外しておく。

図2は、Hussain-Reynolds⁽¹⁸⁾によって測定された主流の速度分布である。ただし、本論文においては、Reynolds数 Re を定義する際、流れ場の代表長さとして流路幅、代表速度として流路中央の最大速度をとっている。図2の $y^+ = 60$ と 100 のデータから、式(42)を使って x と const. を定めると、

$$\left. \begin{aligned} x &= 0.4088 \pm 0.0063 \\ \text{const.} &= 5.4042 \pm 0.5003 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (46 \cdot a)$$

となる。 $y^+ = 50$ と 100 のデータを使うと

$$\left. \begin{aligned} x &= 0.4050 \pm 0.0005 \\ \text{const.} &= 5.3020 \pm 0.4549 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (46 \cdot b)$$

が得られる。これらの値は、いずれも一般に受け入れられている値

$$x \approx 0.4, \quad \text{const.} \approx 5.0 \quad \dots\dots\dots (46 \cdot c)$$

を含んでいると考えてよいが、ここではさしあたり、±の範囲の広い式(46・a)のほうを採用しておく。なお、Laufer⁽¹⁹⁾の実験値を使って、 $y^+ = 60$ と 100 の主流の速度分布の値から x と const. を決めると、

$$\left. \begin{aligned} x &= 0.3380 \pm 0.0083 \\ \text{const.} &= 5.0787 \pm 0.5547 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (46 \cdot d)$$

となって、 x の値が通常受け入れられている値(46・c)より小さすぎるので、ここでは採用しない。

図2 主流の速度分布⁽¹⁸⁾

次に、うず粘性率 ν_e の分布からも x が決まるから、これを調べてみる。図 3 は、Hussain-Reynolds⁽¹⁸⁾ の実験値である。 y の小さいところで、 x の値に Re 数依存性がみられることに注意したい。しかし、 $y^+ = 70 \sim 90$ の範囲では、 x の値は 0.4 に近い。そこで、 $y^+ \approx 80$ 付近では、どの変数 (U, k, ε, ν_e) も第 0 近似解 (壁関数) によってほぼ正しく近似されていると考えてよいものと思われる。

このことを考慮に入れて、乱流エネルギー k の分布を調べたのが図 4 である。図 4 からわかるように、 k の分布にも、実験値、および大きな Re 数依存性が見られる。これらのデータから、Clark⁽²⁰⁾ の実験値の $Re = 2 \times 15\,200, 2 \times 27\,600$ の $y^+ = 80$ における k の値の平均をとって c_k を定めると、

$$c_k = 0.086\,54 \pm 0.020\,74 \quad (47)$$

となる。 $Re = 2 \times 45\,600$ のデータから c_k を決めると、 $c_k \approx 0.05$ となってすこし小さな値が得られる。Kreplin と Eckelmann⁽²¹⁾ の $y^+ = 80$ におけるデータからは、 $c_k \approx 0.2$ となる。これは、 Re 数が低いためである。なお、Laufer⁽¹⁹⁾ の実験データからは、 $Re = 2 \times 30\,800$ のとき $c_k = 0.116\,4$ となり、ほぼ上記の値の範囲内にある。

3.3.2 一次の解 一次の解を書き下すと

図 3 Kármán 定数 x の分布

図 4 乱流エネルギー k の分布

$$U^* = \ln y^+ - (A_1 + 2)y + \text{const.} \quad (48)$$

$$k^* = 1 + B_1 y \quad (49)$$

$$\varepsilon^* = (1 + C_1 y)/y \quad (50)$$

$$\nu_e^* = y(1 + A_1 y) \quad (51)$$

である。したがって、実験データから A_1, B_1 を決めれば、モデル定数 C_{k1} は式 (39・b) から

$$C_{k1} = \frac{2 + 4/B_1}{\alpha} \quad (52)$$

によって定まり、 γ は式 (39・a) から

$$\gamma = 1 - \frac{2\alpha C_{k1}}{6 + A_1(2 - \alpha C_{k1})} \quad (53)$$

と定まる。残る β は、0 次の解 (42) ~ (45) をエネルギー散逸率の式 (31) に代入して得られるよく知られた関係式⁽⁹⁾

$$\alpha\beta + 1 - \gamma = 0, \quad \beta = (\gamma - 1)/\alpha \quad (54)$$

から求める。そうすると、 ε 方程式のモデル定数のうち、 $C_{\varepsilon 3}$ は格子乱流の減衰の様子から 2.0 となることがわかっているから、すべてのモデル定数を求めることができる。すなわち、標準 k - ε モデルのすべての定数 (5 個) は、一次の近似解から求まることが明らかになった。

以上の考え方に基づいて、実際にすべての定数を求めると、たとえば以下ようになる。

Laufer の $Re = 2 \times 12\,300$ の $y^+ = 78$ と 130 のデータから k の分布を求めると、

$$k/u_\tau^2 = 3.208\,3 - 8.486\,1 y \quad (55)$$

が得られる。 $c_{k \max} = 0.107\,28, c_{k \min} = 0.065\,80$ を使うと、

$$-2.779\,5 \leq B_1 \leq -2.176\,8 \quad (56)$$

となる。ここで、平均をとって $B_1 = -2.478\,2$ とする。こうしないと、式 (53) の分母が零になる場合を含むので γ の範囲が無限大を含む。

次に、Hussain と Reynolds のうず粘性率 ν_e の分布 (図 5) から A_1 を定める。 $Re = 2 \times 13\,800, 2 \times 23\,200, 2$

図 5 うず粘性率の分布

×32 300 の $y=0.075$ と 0.1 のデータから ν_e の分布を近似すると、それぞれ

$$\nu_e/Reu_\tau y = 0.4725 - 1.660y \quad \dots\dots\dots (57\cdot a)$$

$$\nu_e/Reu_\tau y = 0.4698 - 1.572y \quad \dots\dots\dots (57\cdot b)$$

$$\nu_e/Reu_\tau y = 0.4834 - 1.700y \quad \dots\dots\dots (57\cdot c)$$

が得られる。 $x_{\max}=0.4151$, $x_{\min}=0.4025$ を使って

$$-4.2236 \leq A_1 \leq -3.7870 \quad \dots\dots\dots (58)$$

を得る。式(52)と式(56)から、 $B_1 = -2.4782$ として

$$0.5745 \leq C_{\epsilon 1} \leq 0.7802 \quad \dots\dots\dots (59)$$

となる。式(58)を使うと

$$-6.8173 \leq A_1(2 - \alpha C_{\epsilon 1}) \leq -6.1126 \quad \dots\dots\dots (60)$$

であるから、式(53), (59), (60)から、

$$1.9443 \leq \gamma \leq 7.8544, \quad 1.4059 \leq \beta \leq 13.8585 \quad \dots\dots\dots (61)$$

となる。したがって、 $C_{\epsilon 3}=2.0$ とおけば、

$$0.3579 \leq C_{\epsilon 1} \leq 14.2549, \quad 0.2546 \leq C_{\epsilon 2} \leq 1.0286 \quad \dots\dots\dots (62)$$

となる。標準 k - ϵ モデル定数(15)は、上記の数値の範囲内にほぼ当てはまる。

本論文においては、3・3・3項で述べる理由から、多くの実験データを使ってこれらの定数を最適化するこ

とはしない。ただし、すでに述べたように A_1, B_1 の値がごくわずか違って結果に及ぼす影響は大きい。

図6~9は、 $Re=2 \times 13\,800$, $u_\tau=0.0464$ としたときの近似解(図6~9中の Approx)〔式(48)~(51)〕、数値解〔式(29)~(32)〕および実験値である。ただし、数値解の境界条件は式(48)~(51)で与え、壁に最も近い格子点は $y=0.05(y^+ \approx 64)$, $y=0.95$ とした。またモデル定数は、標準 k - ϵ モデルの定数(15)を用いた。数値解析の方法は、著者の方法⁽²²⁾を使い、格子幅は一律に $1/100$ とした。

図6~9からわかるように、数値解と実験値の最も大きな違いはうず粘性率に見られるが、このことは、うず粘性率が副次的な量であることから、通常問題にされていない。速度分布 U^* と乱流エネルギー k^* の分布は、数値解は実験値とよく一致している。

次に、数値解と近似解を比較してみると、うず粘性率の分布が最も近似が悪い。しかし、乱流の実験値は、たとえば乱流エネルギーの分布をみてもわかるように、一般にばらつきが大きい。測定値の幅が2倍にも達することはめずらしくない⁽⁹⁾。そこで、近似解も $y \approx 0.1$ 位までを考えれば、どの近似解も数値解とほぼ一致していると言えるであろう。

3・3・3 2次の解 2次の解を書き下すと

$$U^* = \ln y^+ - (A_1 + 2)y$$

図6 主流速度の数値解と近似解の比較

図8 エネルギー散逸率の数値解と近似解の比較

図7 乱流エネルギーの数値解と近似解の比較

図9 うず粘性率の数値解と近似解の比較

$$+ \{-A_2 + A_1(A_1 + 2)\}y^2/2 + \text{const.} \quad \dots\dots (63)$$

$$k^* = 1 + B_1y + B_2y^2 \quad \dots\dots\dots (64)$$

$$\epsilon^* = (1 + C_1y + C_2y^2)/y \quad \dots\dots\dots (65)$$

$$\nu^* = y(1 + A_1y + A_2y^2) \quad \dots\dots\dots (66)$$

である。この解は、係数 A_2 および C_2 の分母に

$$\alpha\beta + 1 - \gamma \quad \dots\dots\dots (67)$$

をもつ。この式の値が零にならないと、 ϵ 方程式は境界の点で方程式を満足しない。標準 k - ϵ モデルでは、モデル定数(15)を式(67)に代入しても、厳密には零になっていない。しかし、標準 k - ϵ モデルの五つの定数のうち、 C_2 を定めるのに上式が零となることをめやすにしている⁽¹⁶⁾。したがって

$$\alpha\beta + 1 - \gamma = 0 \quad \dots\dots\dots (68)$$

となるようにモデル定数が決定されている。他の k - ϵ モデル⁽⁹⁾でも、通常式(68)は満足されている。ところが、この条件(68)は、式(40・c)から2次の近似解が発散する条件になっている。すなわち、標準 k - ϵ モデルは、解が式(34)～(41)の形に展開できるとしたら適正ではない。

3次の解も、同様に発散する項をもつ。

4. 結 言

本論文で示した k - ϵ モデルの近似解から、既存の標準 k - ϵ モデルの解の構造、モデル定数決定の根拠を明らかにした。本論文で示した解析結果から、以下のことが結論できる。

(1) 既存の標準 k - ϵ モデルは、二次の近似解が発散する条件を使ってモデル定数を決めている。したがって、標準 k - ϵ モデルの近似解が本文式(34)～(36)、および式(38)の形に展開できると仮定すると、標準 k - ϵ モデルは適正ではない。

(2) 標準 k - ϵ モデルの五つの定数のうち、うず粘性率の定義に使われる定数は、乱流エネルギー k の分布の y の小さいところ ($y^+ \approx 80$) での定数の値から決まる。また、 k 方程式の拡散項の定数は、 k の分布の傾きから決定される。次に、これらの定数が決まったも

のとして、エネルギー散逸率 ϵ 方程式の発生項の定数は、 ϵ あるいはうず粘性率の分布から決定される。 ϵ 方程式の拡散項の定数の決定には、条件(68)を使う。ただし、 ϵ 方程式の消滅項の定数 2.0 は既知とする。

本研究をすすめるにあたり、東大生研 NST (乱流数値シミュレーション) 研究グループのご支持とご討論をいただいた。とくに、同研究所吉澤徹助教授、西島勝一技官には貴重なご討論をいただいた。ここに記して厚く感謝する。

文 献

- (1) Bradshaw, P., Cebeci, T. and Whitelaw, J. H., *Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow*, (1981), Academic Press Inc.
- (2) Moin, P. and Kim, J., *J. Fluid Mech.*, 118 (1982), 341.
- (3) Rodi, W., *Turbulence Models and their Application in Hydraulics-A State of Art Review*, (1980), International Association of Hydraulic Research, Monograph, Delft.
- (4) 小林・諸岡, 生産研究, 38-1 (昭 61), 50.
- (5) 乱流の数値シミュレーション, 東京大学生産技術研究所, (昭 61), NST 研究グループ.
- (6) Horiuti, K. *J. Comput. Phys.*, submitted.
- (7) Rotta, J., *Proc. AGARD Conf. Turbulent Shear Flows*, (1971).
- (8) Wilcox, D. C. and Rubesin, W. M., *NASA Tech. Paper*, (1980), 1517.
- (9) Patel, V. C., ほか 2 名, *AIAA J.*, 23-9 (1985), 1308.
- (10) Rodi, W., *AIAA J.*, 20-7 (1982), 872.
- (11) Yoshizawa, A., *Phys. Fluids*, 27-6 (1984), 1377.
- (12) Nisizima, S. and Yoshizawa, A., *AIAA J.*, submitted.
- (13) Lam, C. K. G. and Bremhorst, K., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, 103 (1981), 456.
- (14) 長野・ほか 2 名, 機論, 50-457, B (昭 59), 2022.
- (15) Jones, W. P. and Launder, B. E., *Int. J. Heat Mass Transf.*, 15 (1972), 301.
- (16) Launder, B. E. and Spalding, D. B., *Mathematical Models of Turbulence*, (1972), 98, Academic Press Inc.
- (17) Hinze, J. O., *Turbulence*, (1975), McGraw-Hill.
- (18) Hussain, A. K. M. F. and Reynolds, W. C., *Trans. ASME, J. Fluid Eng.*, 97 (1975), 568.
- (19) Laufer, J., *NACA Tech Note*, 2123 (1950).
- (20) Clark, J. A., *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, 90 (1968), 455.
- (21) Kreplin, H-P, and Eckelmann H., *Phys. Fluids*, 22-7 (1979), 1233.
- (22) Takemitsu, N., *J. Comput. Phys.*, 36-2 (1980), 236.