希薄高分子溶液の曲がり管内流動に関する研究* (第3報, 乱流管摩擦損失の近似解析)

横山 俊雄^{*1}, 富田 幸雄^{*1}

Flow of Dilute Polymer Solutions Through Curved Pipes (3rd Report, Approximate Analysis of Turbulent Pipe Friction Loss)

Toshio YOKOYAMA and Yukio TOMITA

Momentum integral equations for the turbulent flow through curved pipes have been set up in consideration of a viscoelasticity of solutions and solved approximately. The resulting coefficient of pipe friction has been compared with experimental results and presented in a form suitable for engineering use. In addition, the boundary thickness, the velocity distribution of the secondary flow and the pressure difference between the inner and the outer side have been given respectively.

Key Words: Fluid Mechanics, Non-Newtonian Fluid, Curved Pipe, Momentum Integral Equation, Drag Reduction, Coefficient of Pipe Friction

1. 緒 言

曲がり管は工業上広く使用されており, したがってその内部の流動状態を明らかにすることは重要なので, ニュートン流体に関してはこれまで多数の研究が行われている。

ところで近年, 化学工業の発展とともに各種の流体が取扱われるようになったが, これらの流体の多くは一般に非ニュートン流動特性を示す。そのため非ニュートン流体の流れに関する研究はますます重要になっている。長鎖状高分子の希薄溶液流れもわずかながら粘弾性的性質を示し, 乱流域では抵抗減少を生ずることが知られている。この流体の直管内の流動に関してはこれまで理論的および実験的に多くの研究が行われているが, 曲がり管内の流動, 特に乱流域における研究は非常に少ない。著者らは第1報⁽¹⁾において曲がり管内の十分発達した流れ領域における管摩擦損失におよぼす粘弾性的性質の影響を実験的に明らかにし, 第2報⁽²⁾において360°曲がり管の入口部および出口部を含む流れ領域全体の損失および圧力分布を明らかに

している。しかしさらに進んで曲がり管内部の詳細な流動状態を実験的に明らかにすることは, 曲がり管内流動の三次元性および粘弾性流体の流動に伴う計測上の困難さのため非常にむずかしい問題となっている。このような状況から解析的研究が必要となるが, 乱流現象本来の複雑さと粘弾性流体の流動の特異性とは複雑にからみ合って解析的研究をいっそう困難なものにしている。このため希薄高分子溶液の曲がり管内の乱流域における解析的研究はほとんど行われていない。

本研究ではニュートン流体に対して伊藤⁽³⁾が, べき乗則流体に対して Mashelker ら⁽⁴⁾が用いたのと同じく, 運動量積分法を希薄高分子溶液の曲がり管内流れに適用してトムズ効果発生領域における管摩擦損失を求め, 実験と比較するとともに流体の粘弾性的性質が曲がり管内流動に与える影響を明らかにする。

2. 記 号

a : 曲がり管の半径

B : 式(24)

$B^{(1)ij}, B^{(2)ij}$: それぞれ第1, 2種の Rivlin-Ericksen 加速度テンソル

$C = \partial p / (R \partial \varphi)$

c_1, c_2 : 式(37)

* 昭和62年7月14日 東海支部三重地方講演会において講演, 原稿受付 昭和61年12月23日。

^{*1} 正員, 東京理科大学理工学部 (〒278 野田市山崎2641)。

c_3 : 式(39) d : 曲がり管の直径 D' : 式(29) g_{ij} : 基本計量テンソル $h = R + r \cos \psi$ K : 式(56) k, λ', n, s : 物質定数 $k_1 \sim k_6$: 式(51) N : 式(33) N_w : ワイゼンベルグ数, 式(33) N_{WR} : 式(41) N'_{WR} : 式(44) $n_1 = 8^n N$ n_2 : 式(39) p : 圧力 p_0 : 曲がり管の外側壁面圧力 p_i : 曲がり管の内側壁面圧力 Q'_s : 式(60) R : 曲がり管の曲率半径 r, ϕ, φ : 円環座標 (図1) Re^* : レイノルズ数, 式(33) T^{ψ} : 偏差応力テンソル $T_{(\psi)}$: T^{ψ} の物理成分 $T_{rr}, T_{r\phi}, \dots$: 偏差応力テンソルの物理成分 U, V, W : 主流の r, ϕ, φ 方向速度成分 u_m : 管軸方向の平均流速 v^i : 速度ベクトル v_r, v_ϕ, v_φ : それぞれ, 境界層内の r, ϕ, φ 方向流速 $(v_\phi)_m, (v_\varphi)_m$: それぞれ, 境界層内の ϕ, φ 方向平均流速 W'_s : 式(28) $Z_n = N_w / Re^*$ α : 式(53) β, γ : 式(52) δ : 境界層厚さ ρ : 流体の密度 $\xi = a - r$ τ_c : 曲がり管の壁面せん断応力 τ_s : 直管の壁面せん断応力 τ_ϕ, τ_φ : 曲がり管の壁面せん断応力の成分 λ_c : 曲がり管の管摩擦係数 λ_s : 直管の管摩擦係数 II : $B^{(1)\psi}$ の第2不変量

3. 解 析

図1に示すような座標系をとると, 曲がり管内定常

流の十分発達した領域における r, ϕ, φ 方向の運動方程式はそれぞれ,

$$\begin{aligned} & \rho \left[v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{v_\phi^2 \cos \phi}{h} \right] \\ &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{rr}}{r} \\ &+ \frac{T_{rr} \cos \phi}{h} - \frac{T_{r\phi} \sin \phi}{h} - \frac{T_{\phi\phi}}{r} - \frac{T_{\phi\phi} \cos \phi}{h} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left[v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\phi^2 \sin \phi}{h} \right] \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{2T_{r\phi}}{r} \\ &+ \frac{T_{r\phi} \cos \phi}{h} + \frac{T_{\phi\phi} - T_{\phi\phi} \sin \phi}{h} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left[v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\varphi \cos \phi}{h} \right. \\ & \left. - \frac{v_\phi v_\varphi \sin \phi}{h} \right] = -\frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi\varphi}}{\partial \phi} \\ &+ \frac{T_{r\varphi}}{r} + \frac{2T_{r\varphi} \cos \phi}{h} - \frac{2T_{\phi\varphi} \sin \phi}{h} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

であり, 連続の方程式は

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} - \frac{v_\phi \sin \phi}{h} + \frac{v_r \cos \phi}{h} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

である。ただし, $h = R + r \cos \phi$ とした。次に,

$$\left. \begin{aligned} R' &= R/a, r' = r/a, \phi' = \phi, \varphi' = \varphi, \\ h' &= h/a, v'_r = v_r/u_m, v'_\phi = v_\phi/u_m, \\ v'_\varphi &= v_\varphi/u_m, p' = p/\rho u_m^2, \\ T'_{rr} &= T_{rr}/\rho u_m^2, T'_{r\phi} = T_{r\phi}/\rho u_m^2, \dots \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

とにおいて式(5)を方程式(2)~(4)に代入して無次元化すると ϕ, φ 方向の運動方程式と連続の方程式はそれぞれ,

$$\begin{aligned} & v'_r \frac{\partial v'_r}{\partial r'} + \frac{v'_\phi}{r'} \frac{\partial v'_r}{\partial \phi'} + \frac{v'_r v'_\phi}{r'} + \frac{v_\phi'^2 \sin \phi'}{h'} \\ &= -\frac{1}{r'} \frac{\partial p'}{\partial \phi'} + \frac{\partial T'_{r\phi}}{\partial r'} + \frac{1}{r'} \frac{\partial T'_{\phi\phi}}{\partial \phi'} + \frac{2T'_{r\phi}}{r'} \\ &+ \frac{T'_{r\phi} \cos \phi'}{h'} + \frac{T'_{\phi\phi} - T'_{\phi\phi} \sin \phi'}{h'} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$v'_r \frac{\partial v'_\phi}{\partial r'} + \frac{v'_\phi}{r'} \frac{\partial v'_\phi}{\partial \phi'} + \frac{v'_r v'_\phi \cos \phi'}{h'} - \frac{v'_\phi v'_\phi \sin \phi'}{h'}$$

図1 座標系

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{h'} \frac{\partial p'}{\partial \phi'} + \frac{\partial T'_{r\phi}}{\partial r'} + \frac{1}{r'} \frac{\partial T'_{\phi\phi}}{\partial \phi'} \\
&+ \frac{T'_{r\phi}}{r'} + \frac{2T'_{r\phi} \cos \phi'}{h'} - \frac{2T'_{\phi\phi} \sin \phi'}{h'} \dots\dots\dots (7) \\
&\frac{\partial v'_r}{\partial r'} + \frac{1}{r'} \frac{\partial v'_\phi}{\partial \phi'} + \frac{v'_r}{r'} - \frac{v'_\phi \sin \phi'}{h'} + \frac{v'_\phi \cos \phi'}{h'} = 0 \\
&\dots\dots\dots (8)
\end{aligned}$$

となる。レオロジー方程式として粘弾性流体のレオロジー的挙動をよく表すと考えられる Denn モデル⁽⁵⁾を使用する。その偏差応力テンソルは

$$T^{ij} = k \left[\frac{1}{2} \Pi \right]^{(n-1)/2} B^{(1)ij} - \lambda' k \left[\frac{1}{2} \Pi \right]^{(s-2)/2} B^{(2)ij} \dots\dots\dots (9)$$

である。 $B^{(1)ij}$, $B^{(2)ij}$ はそれぞれ第 1, 2 種の Rivlin-Ericksen 加速度テンソルで非圧縮性流体に対しては,

$$B^{(1)ij} = g^{kj} v^i_{,k} + g^{ik} v^j_{,k} \dots\dots\dots (10)$$

である。ここで(,)は共変微分である。定常流動に対する $B^{(2)ij}$ は

$$B^{(2)ij} = v^k B^{(1)ij}_{,k} - v^i_{,k} B^{(1)kj} - v^j_{,k} B^{(1)ik} \dots\dots\dots (11)$$

である。さらに Π はテンソル $B^{(1)ij}$ の第 2 不変量で,

$$\Pi = g_{im} g_{jn} B^{(1)in} B^{(1)jm} \dots\dots\dots (12)$$

である。 T^{ij} の物理成分を $T_{(ij)}$, その無次元量を $T'_{(ij)}$ とすれば,

$$\begin{aligned}
T'_{(ij)} &= \frac{T_{(ij)}}{\rho u_m^2} = \left[\frac{1}{2} \Pi' \right]^{(n-1)/2} \frac{B'_{(ij)}}{Re^{*n}} \\
&- \left[\frac{1}{2} \Pi' \right]^{(s-2)/2} \frac{B'_{(ij)}}{Re^{*n}} \dots\dots\dots (13)
\end{aligned}$$

となる。ここで Π' は Π の無次元量, $B'_{(ij)}$, $B'_{(ij)}$ はそれぞれ $B^{(1)ij}$, $B^{(2)ij}$ の物理成分の無次元量で, 以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned}
\Pi' &= \frac{\Pi}{(u_m/a)^2}, B'_{(ij)} = \frac{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} B^{(1)ij}}{(u_m/a)} \\
B'_{(ij)} &= \frac{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} B^{(2)ij}}{(u_m/a)^2} \dots\dots\dots (14)
\end{aligned} \right\}$$

また,

$$Re^{*n} = \frac{\rho u_m^{2-n} a^n}{k}, N'_w = \lambda' \left(\frac{u_m}{a} \right)^{s-n} \dots\dots\dots (15)$$

である。境界層の厚さを δ とし, その無次元量を $\delta' = \delta/a$ とすると, $\delta' \ll 1$ であり, 境界層内では

$$\left. \begin{aligned}
v'_r &\sim O(\delta'), v'_\phi, v'_\phi \sim O(1), \\
\partial/\partial r' &\sim O(1/\delta'), \partial/\partial \phi' \sim O(1) \dots\dots\dots (16)
\end{aligned} \right\}$$

かつ,

$$r' \sim 1, h' \sim R' \gg 1 \dots\dots\dots (17)$$

とみなせる。式(16), (17)を式(13)に代入しその大きさの程度を調べると,

$$\left. \begin{aligned}
T'_{rr} &\sim O\{1/(\delta'^{n-1} Re^{*n}) - N'_w/(\delta'^{s-2} Re^{*n})\} \\
T'_{\phi\phi} &\sim O\{1/(\delta'^{n-1} Re^{*n}) - N'_w/(\delta'^s Re^{*n})\} \\
T'_{r\phi} &\sim O\{1/(\delta'^{n-1} R' Re^{*n}) - N'_w/(\delta'^s Re^{*n})\} \\
T'_{r\phi} &\sim O\{1/(\delta'^n Re^{*n}) - N'_w/(\delta'^{s-1} Re^{*n})\} \\
T'_{r\phi} &\sim O\{1/(\delta'^n Re^{*n}) - N'_w/(\delta'^{s-1} Re^{*n})\} \\
T'_{\phi\phi} &\sim O\{1/(\delta'^{n-1} Re^{*n}) - N'_w/(\delta'^s Re^{*n})\}
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

となる。ただし, T'_{rr} , $T'_{\phi\phi}$, ...などは偏差応力テンソルの無次元物理成分である。また乱流域では $N'_w/Re^{*n} \ll 1$ とみなせる。式(16)~(18)を用いて方程式(6)~(8)の各項の大きさの程度を比較し, $\xi' = 1 - r'$ とおいて整理すれば境界層の運動方程式および連続の方程式はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned}
&-v'_r \frac{\partial v'_\phi}{\partial \xi'} + v'_\phi \frac{\partial v'_\phi}{\partial \phi'} + v'_r v'_\phi + \frac{v'^2_\phi}{R'} \sin \phi' \\
&= -\frac{\partial p'}{\partial \phi'} - \frac{\partial T'_{r\phi}}{\partial \xi'} + \frac{\partial T'_{\phi\phi}}{\partial \phi'} + \frac{T'_{\phi\phi} - T'_{r\phi}}{R'} \sin \phi' \dots\dots\dots (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-v'_r \frac{\partial v'_\phi}{\partial \xi'} + v'_\phi \frac{\partial v'_\phi}{\partial \phi'} + \frac{v'_r v'_\phi \cos \phi'}{R'} - \frac{v'_\phi v'_\phi \sin \phi'}{R'} \\
&= -\frac{1}{R'} \frac{\partial p'}{\partial \phi'} - \frac{\partial T'_{r\phi}}{\partial \xi'} + \frac{\partial T'_{\phi\phi}}{\partial \phi'} - \frac{2T'_{r\phi} \sin \phi'}{R'} \dots\dots\dots (20)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v'_r}{\partial \xi'} - \frac{\partial v'_\phi}{\partial \phi'} = 0 \dots\dots\dots (21)$$

また, 主流に対する運動方程式は

$$\left. \begin{aligned}
\frac{W'^2 \cos \phi'}{R'} &= \frac{\partial p'}{\partial r'} \\
\frac{W'^2 \sin \phi'}{R'} &= -\frac{1}{r'} \frac{\partial p'}{\partial \phi'} \\
U' \frac{\partial W'}{\partial r'} + \frac{V'}{r'} \frac{\partial W'}{\partial \phi'} &= -\frac{1}{R'} \frac{\partial p'}{\partial \phi'}
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

であり, 連続の方程式は

$$\frac{\partial U'}{\partial r'} + \frac{1}{r'} \frac{\partial V'}{\partial \phi'} + \frac{U'}{r'} = 0 \dots\dots\dots (23)$$

である。ただし, $U' = U/u_m$, $V' = V/u_m$, $W' = W/u_m$ である。管軸方向の速度成分 W を

$$W = A + Br \cos \phi \dots\dots\dots (24)$$

とおく。境界層の厚さ δ が a に比べて小さいとして無視すれば $A = u_m$ である。ゆえに,

$$W' = 1 + B' r' \cos \phi' \dots\dots\dots (25)$$

となる。ただし, $B' = Ba/u_m$ である。運動方程式(19), (20)を $\xi' = 0$ から δ' まで積分し, 式(21)~(23)を考慮して整理すると ϕ, ϕ 方向の運動量方程式はそれぞれ,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\phi'} \int_0^{\delta'} v'^2_\phi d\xi' + \int_0^{\delta'} \frac{v'^2_\phi \sin \phi'}{R'} d\xi' \\
&= \int_0^{\delta'} \frac{W'^2 \sin \phi'}{R'} d\xi' - \tau'_\phi + \frac{d}{d\phi'} \int_0^{\delta'} T'_{\phi\phi} d\xi'
\end{aligned}$$

$$+ \int_0^s \frac{T'_{\phi\phi} - T'_{\phi\psi}}{R'} \sin \psi' d\xi' \dots\dots\dots (26)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\psi'} \int_0^s v'_\phi v'_\psi d\xi' - W'_s \frac{d}{d\psi'} \int_0^s v'_\psi d\xi' \\ &= - \int_0^s \frac{1}{R'} \frac{\partial v'_\phi}{\partial \psi'} d\xi' - \tau'_\phi + \frac{d}{d\psi'} \int_0^s T'_{\phi\psi} d\xi' \\ & - \int_0^s \frac{2T'_{\phi\psi} \sin \psi'}{R'} d\xi' \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\left. \begin{aligned} \tau'_\phi &= -[T'_{\phi\psi}]_{\xi'=0} \\ \tau'_\psi &= -[T'_{\psi\phi}]_{\xi'=0} \\ W'_s &= [W']_{\xi'=s} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

とおいた。次に境界層内速度 v'_ϕ, v'_ψ を

$$v'_\phi = D'(\xi'/\delta')^{1/7}(1 - \xi'/\delta') \dots\dots\dots (29)$$

$$v'_\psi = W'_s(\xi'/\delta')^{1/7} \dots\dots\dots (30)$$

のようにおく。また、境界層内の ϕ, ψ 方向の無次元平均流速を $(v'_\phi)_m, (v'_\psi)_m$ とし $(\partial v'_\phi / \partial \xi') \approx (v'_\phi)_m / \delta', (\partial v'_\psi / \partial \xi') \approx (v'_\psi)_m / \delta'$ とすると式(26), (27)における無次元応力成分 $T'_{\phi\phi}, T'_{\phi\psi}, T'_{\psi\phi}$ は以下のように近似的に表すことができる。

$$\begin{aligned} T'_{\phi\phi} &= \frac{2k\lambda'}{\rho u_m^2} \left\{ \left(\frac{\partial v'_\phi}{\partial \xi'} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'_\psi}{\partial \xi'} \right)^2 \right\}^{(s-2)/2} \left(\frac{\partial v'_\phi}{\partial \xi'} \right)^2 \\ &= \frac{N_w}{Re^*} 8^n N \left(\frac{7}{15} \frac{D'}{W'_s} \right)^2 \left\{ 1 + 0.218 \left(\frac{s-2}{2} \right) \right. \\ & \quad \times \left. \left(\frac{D'}{W'_s} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

ここで式(16)より $(D'/W'_s) \sim 0(1)$ であり、一般的に $0 < s \leq 2$ であり、希薄溶液では $s \approx 2$ であるから、式(31)は

$$T'_{\phi\phi} = \frac{49}{225} Z_n n_1 \left(\frac{D'}{W'_s} \right)^2 \dots\dots\dots (32)$$

と表せる。ただし、 $Z_n = N_w / Re^*, n_1 = 8^n N$ であり、 Re^*, N_w, N はそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} Re^* &= \frac{\rho u_m^{2-n} d^n}{k} N \\ N_w &= 2\lambda' \left(\frac{8u_m}{d} \right)^{s-n} \\ N &= \frac{1}{8^{n-1} \{(3n+1)/4n\}^n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

である。同様にして $T'_{\phi\psi}, T'_{\psi\phi}$ を近似的に表すと、

$$T'_{\phi\psi} = Z_n n_1 \dots\dots\dots (34)$$

$$T'_{\psi\phi} = \frac{7}{15} Z_n n_1 \frac{D'}{W'_s} \dots\dots\dots (35)$$

となる。

一方、直円管に対する管摩擦係数 λ_s を著者らの実験に基づいて、

$$\lambda_s (1 + N_w^{0.05})^{-0.15} = c_1 Re^{*c_2} (1 + N_w^{0.1})^{-0.9} \dots\dots\dots (36)$$

とおく。ここで、

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= 15.9(2-s)^{1.06} + 0.316 \\ c_2 &= -0.25 - 0.523(2-s)^{0.616} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

である。式(36), (37)の適用範囲は本実験の範囲であり、 $2000 \leq Re^* \leq 30000$ かつ $0 \leq N_w \leq 23$ である。図2に式(36)と実験値との比較を示す。直管の壁面せん断応力 τ_s は $\tau_s = (1/8)\lambda_s \rho u_m^2$ であるから式(36)を代入すると、

$$\begin{aligned} \tau_s &= c_3 \rho u_m^{n_2} (1 + N_w^{0.1})^{-0.9} (1 + N_w^{0.05})^{0.15} \\ & \quad \times \left(\frac{\rho d^n N}{k} \right)^{c_2} \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

となる。ただし、 u_0 は管中心の流速であり、 c_3, n_2 は

$$\left. \begin{aligned} c_3 &= (1/8)c_1(0.8)^{n_2} \\ n_2 &= 2 + c_2(2-n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

である。これらの結果を考慮して曲がり管の壁面せん断応力 τ_c を次のようにおく。

$$\begin{aligned} \tau_c &= c_3 \rho W_s^{n_2} (1 + N_{WR}^{0.1})^{-0.9} (1 + N_{WR}^{0.05})^{0.15} \\ & \quad \times \left(\frac{\rho (2\delta)^n N}{k} \right)^{c_2} \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

ここで、

$$N_{WR} = \sqrt{a/R} N_w \dots\dots\dots (41)$$

とおいた。また、

$$\tau_\phi = \frac{W'_s}{\sqrt{W_s'^2 + D'^2}} \tau_c, \tau_\psi = \frac{D'}{\sqrt{W_s'^2 + D'^2}} \tau_c$$

であるが、 $W'_s \gg D'$ より、

$$\tau_\phi \approx \tau_c, \tau_\psi \approx (D'/W'_s) \tau_c \dots\dots\dots (42)$$

となる。よって τ'_ϕ, τ'_ψ は

$$\left. \begin{aligned} \tau'_\phi &= \frac{\tau_\phi}{\rho u_m^2} = c_3 Re^{*c_2} N_{WR}'^{n_2} \delta'^{c_2 n} \\ \tau'_\psi &= \frac{\tau_\psi}{\rho u_m^2} = c_3 Re^{*c_2} N_{WR}'^{n_2-1} \delta'^{c_2 n} D' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

ただし、

$$N_{WR}' = (1 + N_{WR}^{0.1})^{-0.9} (1 + N_{WR}^{0.05})^{0.15} \dots\dots\dots (44)$$

である。式(29), (30), (32), (34), (35), (43)を方程式(26), (27)に代入して整理すればそれぞれ、

$$\frac{d}{d\psi'} \left(\frac{343}{1656} D'^2 \delta' \right) = \frac{2}{9} \frac{W_s'^2 \delta' \sin \psi'}{R'}$$

図2 直管の管摩擦係数

$$-c_3 Re^{*c_2} N'_{WR} W_s'^{n_2-1} \delta'^{c_2 n} D' \\ + \frac{d}{d\psi'} \left\{ \frac{49}{225} Z_n n_1 (D'/W_s')^2 \delta' \right\} \\ + \frac{1}{R'} Z_n n_1 \delta' \sin \psi' \dots\dots\dots (45)$$

$$\frac{d}{d\psi'} \left(\frac{49}{144} W_s' D' \delta' \right) - W_s' \frac{d}{d\psi'} \left(\frac{49}{120} D' \delta' \right) \\ = -C' \delta' - c_3 Re^{*c_2} N'_{WR} W_s'^{n_2} \delta'^{c_2 n} \\ + \frac{d}{d\psi'} \left(\frac{7}{15} Z_n n_1 \frac{D'}{W_s'} \delta' \right) \dots\dots\dots (46)$$

となる。ここで、 $C' = \partial p' / (R' \partial \varphi')$ とおいた。管軸方向の圧力こう配は

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = -\frac{2R}{\pi a} \int_0^\pi \tau_\varphi d\psi$$

であるから、これより、

$$\int_0^\pi \tau_\varphi d\psi' = -\frac{\pi}{2} C' \dots\dots\dots (47)$$

式(43), (47)より

$$\int_0^\pi W_s'^{n_2} \delta'^{c_2 n} d\psi' = -\frac{\pi}{2 c_3} C' Re^{*c_2} N'_{WR} \dots\dots\dots (48)$$

次に二次流れの連続条件から

$$-\frac{C}{\rho B} (a - \delta) \sin \psi = \int_0^s v_\varphi d\xi \dots\dots\dots (49)$$

ただし、 $C = \partial p / (R \partial \varphi)$ 。これを無次元化し、式(29)を代入し ψ についての平均値をとれば、

$$B' = -\frac{120}{49} \frac{C'}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \delta'}{D' \delta'} \sin \psi' d\psi' \dots\dots\dots (50)$$

方程式(45), (46)は式(48), (50)の条件のもとに直接数値的に解くことができる。しかし、実用的な形で解を求めるため以下のような方法で解く。次元解析を行えば、境界層内の流速 v_φ および境界層厚さ δ はレイノルズ数、ワイゼンベルグ数、曲率半径比および n, s に依存していることがわかる。また、 $v_\varphi \sim u_m$ と見なせる。ゆえに、 $v'_\varphi, v'_\varphi, \delta'$ を

$$\left. \begin{aligned} v'_\varphi &\sim R'^{k_1} Re^{*k_2} N'^{k_3}_{WR} \\ v'_\varphi &\sim 1 \\ \delta' &\sim R'^{k_4} Re^{*k_5} N'^{k_6}_{WR} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

とおく。これを式(26)に代入し指数 $k_1 \sim k_6$ を決定すると、 $k_1 = -0.5, k_2 = k_3 = 0, k_4 = 0.5/(1 - c_2 n), k_5 = c_2/(1 - c_2 n), k_6 = 1/(1 - c_2 n)$ となる。そこで、 D', δ' を次式のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} D' &= \gamma R'^{-0.5} \\ \delta' &= \beta R'^{0.5/(1 - c_2 n)} Re^{*(c_2/(1 - c_2 n))} N'^{1/(1 - c_2 n)}_{WR} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

また、式(47)より

$$C' = \alpha R'^{0.5 c_2 n / (1 - c_2 n)} Re^{*c_2 / (1 - c_2 n)} N'^{1 / (1 - c_2 n)}_{WR} \dots\dots\dots (53)$$

とおける。式(52), (53)を式(45), (46)に代入するとそれぞれ、

$$\frac{343}{1656} \frac{d}{d\psi'} (\gamma^2 \beta) = \frac{2}{9} W_s'^2 \beta \sin \psi' \\ - c_3 \beta^{c_2 n} \gamma W_s'^{n_2-1} + \frac{49}{225} Z_n n_1 \frac{d}{d\psi'} (W_s'^{-2} \gamma^2 \beta) \\ + Z_n n_1 \beta \sin \psi' \dots\dots\dots (54)$$

$$\frac{49}{144} \frac{d}{d\psi'} (W_s' \gamma \beta) - \frac{49}{120} W_s' \frac{d}{d\psi'} (\gamma \beta) \\ = -\alpha \beta \left(\frac{1}{K} \right)^{c_2 / (c_2 n - 1)} - c_3 \beta^{c_2 n} W_s'^{n_2} \\ + \frac{7}{15} Z_n n_1 \frac{d}{d\psi'} (W_s'^{-1} \gamma \beta) \dots\dots\dots (55)$$

ただし、

$$K = R'^{0.5/c_2} Re^{*} N'^{1/c_2}_{WR} \dots\dots\dots (56)$$

であり、ニュートン流体の場合には伊藤が導入した無次元数⁽³⁾ $K = (a/R)^2 Re^{*}$ となる。 K の大なる場合には式(55)は

$$\frac{49}{144} \frac{d}{d\psi'} (W_s' \gamma \beta) - \frac{49}{120} W_s' \frac{d}{d\psi'} (\gamma \beta) \\ = -c_3 \beta^{c_2 n} W_s'^{n_2} + \frac{7}{15} Z_n n_1 \frac{d}{d\psi'} (W_s'^{-1} \gamma \beta) \dots\dots\dots (57)$$

となる。また式(48)より、

$$\int_0^\pi W_s'^{n_2} \beta^{c_2 n} d\psi' = -\frac{\pi}{2} \frac{\alpha}{c_3} \dots\dots\dots (58)$$

式(50)より

$$B' = -\frac{120}{49} \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \psi'}{\gamma \beta} d\psi' \dots\dots\dots (59)$$

をえる。物質定数 k, λ', n, s が与えられると、式(54), (57)~(59)より $Ba/u_m, \alpha, \beta, \gamma$ の値が求められる。

4. 結果および考察

4.1 基礎式の解 図3は方程式(54), (57)~(59)を数値的に解いて得られた結果を示している。 α は $Z_n = 1 \times 10^{-3}$ 以上でほぼ一定になっており、 (Ba/u_m) も同様の傾向を示している。図4は β の計算結果の例であり、図5は γ の例である。図6~8は境界層厚さにおよぼす濃度、レイノルズ数、曲率半径の影響を示したものの一例である。これによれば境界層厚さはレイノルズ数の増大とともに減少し、曲率半径の増大とともに増加しているが、濃度の影響については ψ の小さい領域では水のほうが大きい、 ψ の大きい領域では溶液のほうが大きくなっている。また、無次元の二次流れ流量 Q'_v は

$$Q'_v = \int_0^\pi v'_\varphi d\xi' \\ = \frac{49}{120} \gamma \beta R'^{0.5 c_2 n / (1 - c_2 n)} Re^{*c_2 / (1 - c_2 n)} N'^{1 / (1 - c_2 n)}_{WR} \dots\dots\dots (60)$$

であり、これより求めた計算結果の例を図9に示す。

二次流れの流量は水に比べて溶液のほうがやや小さくなっている。

4.2 管摩擦係数 曲がり管の管摩擦係数 λ_c を

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \lambda_c \frac{1}{d} \frac{1}{2} \rho u_m^2$$

とすれば,

$$\begin{aligned} \lambda_c &= -4C' \\ &= -4aR^{0.5c_2n/(1-c_2n)} Re^{*c_2/(1-c_2n)} NW_R^{1/(1-c_2n)} \end{aligned} \quad (61)$$

で与えられる。図10は1 ppm および 100 ppm の場合の λ_c の計算値と実験値とを比較したもので、どちらの場合も Re^* の大なる領域でよく一致している。また式(61)を変形すると,

$$\begin{aligned} \lambda_c \left(\frac{R}{a} \right)^{0.5} (1 + NW_R^{0.05})^{-0.15/(1-c_2n)} &= -4a \\ &\times (1 + NW_R^{0.1})^{-0.9/(1-c_2n)} \left\{ Re^* \left(\frac{a}{R} \right)^{-0.5/c_2} \right\}^{c_2/(1-c_2n)} \end{aligned} \quad (62)$$

となる。式(62)は著者らがすでに報告した実験式⁽¹⁾と同形となっている。なお実用のため図3から α と Z_n の関係式を近似的に求めると,

$$\alpha = \frac{7.03 \times 10^{-4}}{Z_n + 6.93 \times 10^{-4}} - 1.084 \quad (63)$$

となる。また、式(62)はニュートン流体の場合 ($N_w =$

$Z_n = 0$) には伊藤の実験式⁽³⁾に一致する。

4.3 内外壁面の圧力差 曲がり管の内外壁面の圧力差に関しては曲がり管を流量計として利用しようとする立場からニュートン流体については若干の研究が行われているが⁽⁶⁾⁻⁽⁸⁾、希薄高分子溶液の場合については行われていない。そこで実験および計算からこの圧力差を求め溶液の粘弾性的性質の与える影響を明らかにする。内外壁面の圧力差 ($p_o - p_i$) は式(22), (24)より,

$$\frac{p_o - p_i}{(1/2)\rho u_m^2} = \frac{4a}{R} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{Ba}{A} \right)^2 \right\} \left(\frac{A}{u_m} \right)^2 \quad (64)$$

となり、 u_m/A は

$$\frac{u_m}{A} = 1 - \frac{1}{4\pi A} \int_0^\pi W_s \delta' d\psi \quad (65)$$

となる。式(65)に式(52)を代入すれば

$$\begin{aligned} \frac{u_m}{A} &= 1 - R^{0.5/(1-c_2n)} Re^{*c_2/(1-c_2n)} N'_{WR}^{1/(1-c_2n)} \\ &\times \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \beta \left(1 + \frac{Ba}{A} \cos \psi \right) d\psi \end{aligned} \quad (66)$$

となる。

実験には前報⁽²⁾と同じ装置を用いた。供試テストセクションは内径 14 mm の銅管を用いて作製された曲がり管で、その中心軸の曲率半径比 $R/a = 14.4, 28.8,$

図3 α と Z_n , Ba/u_m と Z_n の関係

図5 γ と ϕ の関係

図4 β と ϕ の関係

図6 無次元境界層厚さ (濃度の影響)

43.3の3種類であり、その巻数はいずれも2である。圧力孔は内径0.6 mmで、十分発達した流れ領域の内外壁面上に数箇所あけられている。圧力測定はマンメータおよび差圧変換器で行った。使用した流体は水およびポリエチレンオキサイド (PEO, #8) の1~100 ppm水溶液である。その測定結果を図11に示した。計算ならびに実験結果より溶液の粘弾性が圧力差におよぼす影響は全体的に小さいことがわかる。そして圧力差は水に比べ溶液のほうがやや小さな値となっている。式(64)を用いて圧力差を求めるには式(66)中の積分

図7 無次元境界層厚さ (レイノルズ数の影響)

図8 無次元境界層厚さ (曲率半径比の影響)

図9 二次流れ流量

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \beta \left(1 + \frac{Ba}{A} \cos \psi \right) d\psi = \beta'$$

の値を知ることが必要である。図12はこのβ'の計算の結果を示したもので、これよりβ'とZnとの関係を求める、近似的に

$$\beta' = 1.35 - \frac{7.59 \times 10^{-4}}{Z_n + 6.07 \times 10^{-4}} \quad (67)$$

と表せる。

5. 結 論

希薄高分子溶液が曲がり管内の十分発達した流れ領域を乱流状態で流れている場合、その境界層内の流れを溶液の粘弾性的性質を考慮した運動量積分法を適用して明らかにするとともに、管摩擦係数および内外壁

図10 曲がり管の管摩擦係数 (計算値と実験値の比較)

図11 曲がり管の内外壁面の圧力差

図12 β' と Zn の関係

図 13 直管の管摩擦係数

面の圧力差を求め実験値と比較し両者がそれぞれよく一致していることを確かめた。

〔付 録〕

直管の管摩擦係数 λ_s は流体の密度 ρ , 平均流速 u_m , 管直径 d , 溶液の物質定数 k, λ', n, s に依存していると考えられるので, これらを変数として次元解析を行えば, $\lambda_s = f(Re^*, N_w, n, s)$ となる。したがってこれら

の無次元数を用いて図 13 に示した実験値を整理し本文の式 (36), (37) を得た。ニュートン流体の場合 ($n=1, s=2$) には式 (36), (37) はブラジウスの抵抗公式に帰着する。図 13 から明らかなように式 (36), (37) はトムズ効果の飽和領域には適用できない。しかし, 飽和領域の管摩擦係数については Re^* 数のみに依存するいくつかの実験式が提唱されており⁽⁹⁾, 本解析における λ_s に対してこれらの式を用いれば本解析と同様にして飽和領域における流れを調べることができるものと考えられる。

文 献

- (1) 富田・横山, 機論, 51-463, B (昭 60), 806.
- (2) 横山・富田, 機論, 51-470, B (昭 60), 3348.
- (3) 伊藤, 速研報告, 14-137 (昭 34), 137.
- (4) Mashelker, R. A. and Devarajan, G. V., *Trans. Inst. Chem. Eng.*, 55-1 (1977), 29.
- (5) 富田, レオロジー, (昭 50), 187, コロナ社.
- (6) 伊藤・宮川, 機論, 43-376 (昭 52), 4562.
- (7) 伊藤・ほか 4 名, 速研報告, 50-431 (昭 58), 61.
- (8) 辻・川島, 機論, 31-228 (昭 40), 1209.
- (9) 例えば, White, A. and Hemmings, J. A. G., *Drag Reduction by Additives*, (1976), 12, BHRA Fluid Engineering.