傾斜平行平板間の層流助走区間における 自然・強制複合対流熱伝達* (第 1 報, 上昇流における流動と熱伝達)

内 藤 悦 郎^{*1}, 長 野 靖 尚^{*2}

Combined Forced and Free Convection in the Entrance Region between Inclined Parallel Plates (1st Report, The Developing Velocity and Heat Transfer for Upward Flow)

Etsuro NAITO and Yasutaka NAGANO

The effects of buoyancy on upward-flow laminar convection in the entrance region of inclined parallel plates are studied by a numerical method. Solutions are given for three thermal conditions of parallel plates: lower wall heated and upper wall insulated; upper wall heated and lower wall insulated; and both walls heated in the same uniform states. Results are presented to show how the developing upward flow and thermal field in the entry region are affected by buoyancy for various inclination angles of parallel plates. Correlation equations applicable in practice are also developed for the friction factor and the local Nusselt number.

Key Words: Convective Heat Transfer, Mixed Laminar Convection, Inclined Parallel Plates Channel, Entrance Region, Uniform Wall Temperature, Numerical Analysis

1. 緒 言

今日、伝熱の課題はエネルギーの有効利用技術に関連するものから発熱密度の増大する電子機器の冷却で見られるように先端領域の諸技術に関連するものへと拡大している。平行平板間の入口助走区間の熱伝達現象は、これらの熱機器あるいは電子機器に基本要素として多く見られ、工業上の重要性からこれに関する研究はこれまでに多数報告されている。それらは Shah ら⁽¹⁾によってまとめられているが、大半が境界層理論に基づくものであり、前縁効果、二次流れによる伝熱促進あるいは複合流れによる促進など境界層理論では得られない知見の集積と充実が望まれている⁽²⁾。前報⁽³⁾では、平行平板列の前縁に注目して解析を行い、熱と運動量の拡散が前縁端から上流に及ぶ影響をレイノルズ数に対して調べた。

一般に、低レイノルズ数の強制対流熱伝達においては、浮力の影響は無視できない。浮力の影響を考慮した平行平板間流れの解析は、著者ら以外に、平板が垂直な場合については、木枝⁽⁴⁾、Yao⁽⁵⁾、Aung ら⁽⁶⁾が、

また水平時については、木谷ら⁽⁷⁾、Nguyen ら⁽⁸⁾が行っている。しかし平行平板が任意の角度で傾斜した場合についての解析はまだない。また前述のこれらの解析は、すべて両板が加熱された場合に限定されているため、一方が断熱されたときに流動と伝熱がいかに関わるかは明らかでない。

平行平板間の伝熱問題には、両板をともに加熱するか、あるいはどちらか一方のみを加熱するかによって基本的には三つの加熱様式が考えられる。既報⁽⁹⁾では、一様な速度と温度の空気が水平平行平板間に流入する場合、壁温一定と熱流束一定のそれぞれの条件下でこれら 3 加熱様式について数値計算を行い、浮力が流れと熱伝達に及ぼす影響を調べた。その結果、浮力は加熱上板側の流体に減速をもたらす、排除作用が助長されて熱伝達を低下させることが見いだされた。

平行平板を傾斜させると、浮力が速度場と温度場に及ぼす影響は、重力場に対する傾斜角と流れ方向によって異なる。そこで既報⁽³⁾⁽⁹⁾の結果を踏まえて、傾斜平行平板間の層流入口助走区間で浮力を考慮した二次元伝熱問題の数値計算を行い、浮力が傾斜角によって流れと熱伝達にどのように異なった影響を及ぼすかを系統的に調べた。さらに、得られた結果を基にして、壁面摩擦係数と局所ヌセルト数については、技術的に有

* 昭和 62 年 10 月 2 日 北陸信越支部信越地方新潟講演会において講演、原稿受付 昭和 62 年 2 月 16 日。

^{*1} 正員、滋賀県立短期大学 (〒522 彦根市八坂町 1900)。

^{*2} 正員、名古屋工業大学 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)。

用性のある近似式を求めた。

2. 記 号

- a, b : 流れ方向および流れに垂直方向のきざみ幅
 C_f : 壁面摩擦係数, 式(19), (20)
 c_p : 定圧比熱
 g : 重力の加速度
 h : 熱伝達率
 L : 助走区間長さ
 Nu : ヌッセルト数, 式(21), (22)
 Pe : ペクレ数 $= Pr \cdot Re$
 Pr : プラントル数
 p : 圧力
 Ra : レイリー数, 式(5)
 Re : レイノルズ数, 式(5)
 s : 流路の半幅
 t : 温度
 u, v : x, y 方向の速度成分
 x, y : 流れ方向および流れに垂直の方向の座標
 β : 体膨張係数
 θ : 無次元流体温度, 式(5)
 λ : 熱伝導率
 ν : 動粘性係数
 ξ : x の座標変換に伴う変数
 $= (0.8x)^{0.8} / \{1 + (0.8x)^{0.8}\}$
 ρ : 密度
 ϕ : 流路の傾斜角
 ψ : 流れ関数, 式(6)
 ω : 渦度, 式(7)
- 添 字
 $'$: 有次元の変数
 $*$: 等温流あるいは純強制対流の値
 $0, 1$: 入口または下板, 上板での値
 b : 混合平均値
 c, w : 中心軸上と平板上の値
 h, t : 速度場と温度場の値

3. 基礎方程式

図1に示すように傾斜角 ϕ の平行平板間へ一様な速度と温度の非圧縮性流体が、重力に逆って流入し、壁温一定下で加熱される場合の二次元流を考える。加熱形式は、上板を断熱し、下板のみから流体を加熱する場合、下板を断熱し、上板のみから加熱する場合、両板から同じ条件で加熱する場合の3種類（以後、これらをそれぞれ下板加熱、上板加熱、両板加熱と呼ぶ）を扱う。体積力の密度のみ温度依存性を考慮する通常

の Boussinesq 近似を用いると、連続の式、運動方程式およびエネルギー式は次のように与えられる。

$$\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$u(\partial u / \partial x) + v(\partial u / \partial y) = -(\partial p / \partial x) / 2 + 2\nabla^2 u / Re + 4Ra(1 - \theta) \cdot \sin \phi / (Pe \cdot Re) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$u(\partial v / \partial x) + v(\partial v / \partial y) = -(\partial p / \partial y) / 2 + 2\nabla^2 v / Re + 4Ra(1 - \theta) \cdot \cos \phi / (Pe \cdot Re) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$u(\partial \theta / \partial x) + v(\partial \theta / \partial y) = 2\nabla^2 \theta / Pe \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、諸量は次のように無次元化されている。

$$\left. \begin{aligned} x &= x' / (2s'), & y &= y' / (2s') \\ u &= u' / u_0', & v &= v' / u_0' \\ p &= 2(p' + \rho_0 g' y' \cdot \cos \phi + \rho_0 g' x' \cdot \sin \phi) / (\rho_0 u_0'^2) \\ \theta &= (t_w' - t') / (t_w' - t_0') \\ Re &= 4s' u_0' / \nu', & Pe &= Pr \cdot Re \\ Ra &= 8c_p \rho_0 g' \beta' (t_w' - t_0') s'^3 / (\lambda' \nu') \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

入口近傍を拡大し、かつ解析領域を有限にするために、 x 座標は $\xi = (0.8x)^{0.8} / \{1 + (0.8x)^{0.8}\}$ で座標変換する。このとき、流れ関数 ψ と渦度 ω は次式で定義される。

$$u = \partial \psi / \partial y, \quad v = -(\partial \xi / \partial x) \cdot \partial \psi / \partial \xi \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\omega = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y = -\nabla^2 \psi \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、

$$\nabla^2 = (\partial \xi / \partial x)^2 \partial^2 / \partial \xi^2 + (d^2 \xi / dx^2) \partial / \partial \xi + \partial^2 / \partial y^2$$

式(2), (3)から圧力 p を消去して式(6), (7)を用いると、次の渦度輸送方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & (d\xi/dx) \cdot \{ \partial(\omega \partial \psi / \partial y) / \partial \xi - \partial(\omega \partial \psi / \partial \xi) / \partial y \} \\ & = 2\nabla^2 \omega / Re + 4Ra \{ (\partial \theta / \partial y) \sin \phi - (d\xi/dx) \cdot (\partial \theta / \partial \xi) \cos \phi \} / (Pe \cdot Re) \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

同様にエネルギー式(4)は、

$$\begin{aligned} & (d\xi/dx) \cdot \{ \partial(\theta \partial \psi / \partial y) / \partial \xi \\ & - \partial(\theta \partial \psi / \partial \xi) / \partial y \} = 2\nabla^2 \theta / Pe \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

となる。

速度場と温度場の境界条件は平行平板入口、壁面および下流方向の無限遠点でそれぞれ次のように与えられる。

$$x=0(\xi=0): 0 < y < 1 \text{ で、}$$

図1 座標と記号

$$u=1, \omega=0, \phi=y, \theta=1 \dots\dots\dots (10)$$

$$0 \leq x < \infty (0 \leq \xi < 1) : y=0 \text{ と } 1 \text{ で,}$$

$$\left. \begin{aligned} u=0, v=0, \phi_0=0, \phi_1=1 \\ \partial\phi/\partial\xi=\partial\phi/\partial y=0, \\ \theta=0 \text{ (加熱面)}, \partial\theta/\partial y=0 \text{ (断熱面)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

$$x \rightarrow \infty (\xi=1) : 0 \leq y \leq 1 \text{ では,}$$

$$\left. \begin{aligned} u=6(y-y^2), v=0, \phi=6y^2(1/2-y/3) \\ \omega=-6(1-2y), \theta=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

4. 数値計算法

支配方程式(7), (8)および(9)は中心差分で離散化した。ただし境界に最も近い内側の格子点での ϕ と θ に関しては文献(3)と同様の離散化を行って、解析精度の向上を計った。壁面上の渦度は Taylor 展開から導き、打ち切り誤差が三次の精度の次式を用いた。

下板加熱の場合, $y=0(j=1)$ で,

$$\begin{aligned} \omega_{i,1} &= 3(\phi_{i,1} - \phi_{i,2})/b^2 - \omega_{i,2}/2 \\ &\quad - b \cdot Ra(108\theta_{i,1} - 27\theta_{i,2} + 4\theta_{i,3}) \\ &\quad \times \sin \phi / (264 \cdot Pe) \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

$y=1(j=n+1)$ では,

$$\begin{aligned} \omega_{i,n+1} &= 3(\phi_{i,n+1} - \phi_{i,n})/b^2 - \omega_{i,n}/2 \\ &\quad + b^2 \cdot Ra(d\xi/dx) \cdot (\theta_{i+1,n+1} \\ &\quad - \theta_{i-1,n+1}) \cos \phi / (8a \cdot Pe) \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

上板加熱の場合, $y=0(j=1)$ で,

$$\begin{aligned} \omega_{i,1} &= 3(\phi_{i,1} - \phi_{i,2})/b^2 - \omega_{i,2}/2 \\ &\quad + b^2 \cdot Ra(d\xi/dx)(\theta_{i+1,1} - \theta_{i-1,1}) \\ &\quad \times \cos \phi / (8a \cdot Pe) \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$y=1(j=n+1)$ では,

$$\begin{aligned} \omega_{i,n+1} &= 3(\phi_{i,n+1} - \phi_{i,n})/b^2 - \omega_{i,n}/2 \\ &\quad + b \cdot Ra(108\theta_{i,n+1} - 27\theta_{i,n} \\ &\quad + 4\theta_{i,i-1}) \sin \phi / (264 \cdot Pe) \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

両板加熱の場合, $y=0(j=1)$ で,

$$\begin{aligned} \omega_{i,1} &= 3(\phi_{i,1} - \phi_{i,2})/b^2 - \omega_{i,2}/2 \\ &\quad - b \cdot Ra(108\theta_{i,1} - 27\theta_{i,2} \\ &\quad + 4\theta_{i,3}) \sin \phi / (264 \cdot Pe) \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$y=1(j=n+1)$ では,

$$\begin{aligned} \omega_{i,n+1} &= 3(\phi_{i,n+1} - \phi_{i,n})/b^2 - \omega_{i,n}/2 \\ &\quad + b \cdot Ra(108\theta_{i,n+1} - 27\theta_{i,n} \\ &\quad + 4\theta_{i,n-1}) \sin \phi / (264 \cdot Pe) \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

ここで i, j は ξ, y 方向の格子点の位置, n は y 方向のきざみの数を表す。式(13)~(18)から明らかなように、壁面の滑度は純強制対流と異なり浮力の影響を受けている。格子は等間隔格子を用い、格子点数はともに50とした。ただし熱伝達の計算の精度を上げるために、平板近傍の $y=0 \sim 0.1$ と $y=0.9 \sim 1$ の区間ではきざみ幅をさらに4分の1に細かくした。数値計算の収束判定の条件は $|\phi_{i,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^k|_{\max} < 10^{-6}$ および $|\theta_{i,j}^{k+1} - \theta_{i,j}^k|_{\max} < 10^{-6}$ とし、両条件を同時に満たしたときの解を求める数値解とした。ここに k は繰返し回数、

(a) 下板加熱

(b) 上板加熱

(c) 両板加熱

($Re=100, Ra=1500$)

図2 傾斜角と速度分布

表1

ϕ	Re	Ra				
		500	1000	1500	2000	3000
0°	50					
	100	○	○	○	○	
15°	100					
	100			○	○	
30°	100					
	100			○	○	
45°	50					
	100	○	○	○	○	
60°	100					
	100			○	○	
75°	100					
	100			○	○	
90°	50					
	100	○	○	○	○	○
	300			○		

表2

	$x^*/(2s)$
A	0.08019
B	0.22097
C	0.60892
D	1.25
E	1.87162
F	2.305
G	6.08134
H	19.4855
I	∞

max は全格子点のうちで最大値のものを意味する。

5. 計算結果と考察

ここでは空気($Pr=0.71$)流を取扱い、表1に示す諸条件に対して数値計算を行った。速度と温度の各分布に関する図中のA~Iの記号は、表2に示した代表的位置のものである。

5.1 速度分布と速度助走区間長さ 一様な速度で流入した空気流は境界層の排除作用に加えて、浮力の変形を受ける。その結果速度分布は非対称となるが、十分下流では浮力の影響は消滅し、対称な放物線形分布(ポアズユ流れ)となる。この間の速度場の発達過程を図2に示し、浮力の影響の傾斜角によ

る差異を調べた。図2から明らかなように加熱条件に関係なく、いずれの場合も水平流路の発達過程では浮力のために流路の中心軸より下方側が加速されてひずみ、速度分布は上下非対称となる。傾斜角 ϕ を増すに伴って、下板加熱では浮力の影響はより強くなり、断面内最大速度 u_{max} は下板側にいっそう接近している。それに反して上板加熱の場合には、最大速度 u_{max} の位置は平板が水平時($\phi=0^\circ$)に下板側にあったものが、傾斜角の増加とともに上板側に移行していることがEとGの分布からわかる。一方、両板加熱の場合には、傾斜角が増加すると u_{max} の位置は流路の中心軸へ移動して、速度分布は対称な形に近づいている。またこのとき流路中心部の加速の割合は他よりも小さくなり、速度分布もより偏平になる。このような非対称速度分布が発生する原因については付録に記した。

図3(a), (b)は、垂直な平行平板間の上昇流に及ぼす浮力の影響を、片板加熱と両板加熱のそれぞれについて調べたものである。ここでレイノルズ数は $Re=100$ に保ち、レイリー数は $Ra=0, 1500, 3000$ と変化させてある。片板加熱の速度分布形は Ra の増加とともに加熱板側に引き寄せられて非対称性を増している。一方、両板加熱の場合では両加熱板近傍の流体が浮力による加速作用を受けるので、純強制対流($Ra=0$)に比べて排除作用の後退が見られる。特に、 $Ra=3000$ の場合には凹形の分布形が相当下流まで持続されている。

図4(a), (b)は、 $Ra=1500$ に固定した垂直上昇流の $Re=50, 100, 300$ の場合の速度分布を比較したものである。浮力の影響は、片板加熱の場合にはレイノルズ数の減少とともに著しく増している。しかし両板加熱の場合には、 Re が小さくなると、浮力の影響が特に際立つというようなことはない。

次に、速度助走区間長さに及ぼす浮力の影響を調べ

(a) 片板加熱 (b) 両板加熱
図3 垂直時の速度分布 (Ra の影響)

(a) 片板加熱 (b) 両板加熱
図4 垂直時の速度分布 (Re の影響)

($Re=100, Ra=1500$)
図5 傾斜角と速度助走区間長さ

る。速度助走区間長さは中心速度の値がポアズユ流れのその99%に達する位置までの入口からの距離で定義した。図5は $Re=100$, $Ra=1500$ のときの種々の傾斜角における速度助走区間長さを、等温流のそれとの比で示したものである。流路が水平の場合、等温流の $L^*=1.99$ に対して浮力を考慮すると下板加熱では長く($L=2.22$)、上板加熱では短くなる($L=1.7$)。両板加熱の場合は $L=1.96$ で、等温流とほとんど変わっていない。ただし下板加熱と上板加熱ともにこのように定義した助走区間長さの位置では、まだ速度分布のひずみが若干残っており、速度の最大値は流路中心より下側にある。流路が垂直($\phi=90^\circ$)になると、当然のことながら下板加熱と上板加熱の L の値は一致し、 $L/L^*=10.8$ となる。垂直時の両板加熱の助走区間長さは片板加熱よりかなり短くなり、 $L/L^*=6.8$ になっている。しかしいずれの加熱条件でも非加熱流に比べると、助走区間長さは非常に長くなる。

5.2 温度分布 図6は $Re=100$, $Ra=1500$ のときの助走区間の代表的な位置での温度分布を傾斜角 $\phi=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ の3種類について比較したものである。浮力が温度分布に与える影響の傾斜角による差異は、図2との比較から速度分布ほど著しくないことが

図6 傾斜角と温度分布 ($Re=100$, $Ra=1500$)

図7 壁面摩擦係数と局所ヌッセルト数

わかる。図3, 4に対応する垂直時の温度分布の図は省略したが、レイノルズ数の違いによる垂直上昇流の温度分布の差異は大きく、レイリー数の違いによるその差異は小さいことなどがわかった。

5.3 壁面摩擦係数と局所ヌッセルト数 伝熱の実際面では、流動抵抗と熱伝達が重要となるので、次にそれを調べてみる。浮力を考慮したときの壁面摩擦係数と局所ヌッセルト数は、等温流の壁面摩擦係数および純強制対流の局所ヌッセルト数とのそれぞれの比

(a) 下板加熱

(b) 上板加熱

(c) 両板加熱

($Re=100$, $Ra=1500$)

図8 壁面摩擦係数に及ぼす浮力と傾斜角

でもって評価するため、まず等温流の壁面摩擦係数 C_f^* と片面加熱および両面加熱の場合の純強制対流の局所ヌッセルト数 Nu^* の分布を求め図7に示した。ここで壁面摩擦係数 C_f と局所ヌッセルト数 Nu は次のように定義した。

$$C_{f0} = 4(\partial u / \partial y)_0 / Re \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$C_{f1} = -4(\partial u / \partial y)_1 / Re \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$Nu_0 = 4s'h_0/\lambda = 2(\partial \theta / \partial y)_0 / \theta_b \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$Nu_1 = 4s'h_1/\lambda = -2(\partial \theta / \partial y)_1 / \theta_b \quad \dots\dots\dots (22)$$

式(21), (22)中の無次元混合平均温度 θ_b は次式で与えられる。

$$\theta_b = (t_w' - t_b') / (t_w' - t_0') \\ = \int_0^1 \theta u \cdot dy \quad \dots\dots\dots (23)$$

図8は、加熱様式と平行平板の傾斜角の違いにより壁面摩擦係数の値がいかに変わるかを、 $Re=100$, $Ra=1500$ について明らかにしたものである。浮力の影響は入口から下流に行くに従って増大し、 $x=0.3 \sim 5$ でピークに達する。さらに下流に進むと減少してポアズイユ流れの値に漸近している。流路が水平 ($\phi=0^\circ$) の場合、加熱板あるいは断熱板などに関係なく、下板側の壁面摩擦係数は等温流のそれよりも常に大きく、上板側では逆に小さくなるのがわかる。これは前述の壁面近傍の速度分布のこう配の大小に対応している。傾斜角 ϕ の増加とともに加熱壁上の C_f/C_f^* は水平時より大きな値に、断熱壁上のそれは反対に小さな値になる。これは加熱壁近傍の流体が加速される自然対流の影響によるものである。傾斜角が $\phi=15^\circ$ の場合の入口付近では、水平時の場合と同様に、上板加熱と両板加熱においては $C_f/C_f^* < 1$ となる部分が存在している。

図9は、 $Re=100$, $Ra=1500$ の場合の局所ヌッセルト数の分布を代表的傾斜角に対して示したものである。浮力の影響は壁面摩擦係数より1けた小さいが、

傾向はよく類似している。すなわち流路が水平 ($\phi=0^\circ$) の場合には、上流加熱と両板加熱のいずれにおいても上板側で常に $Nu_1/Nu^* \leq 1$ になっているが、流路を傾けると自然対流の効果が現れて Nu/Nu^* は水平時の値よりも大きくなる。傾斜角を $\phi=15^\circ$ 以上にするれば、局所ヌッセルト数はいずれの壁面でも純強制対流のそれよりも大きくなるのがわかる。

これらの壁面摩擦と熱伝達の結果を機器の開発・設計において有効に利用できるよう、次のような関係式を導いた。任意の傾斜角の壁面摩擦係数 $|1 - C_f/C_f^*|$ と位置 x をこのときの最大値 $|1 - C_f/C_f^*|_{\max}$ とその位置 $(x_h)_{\max}$ でそれぞれの値を正規化し、さらに x については $X = x/(x_h)_{\max}$ を $\xi = X/(1+X)$ で変換すると、その分布形は全く同様にして正規化した局所ヌッセルト数の分布形と非常によく一致が得られた。この分布形を基にして求めた関係式をまとめると次のようになる。

(1) 片板加熱の場合

$$C_f = C_f^*[1 + A\{F + (B + 0.101)f\}] \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$Nu = Nu^*[1 + 0.21A\{F + (B + 0.101)f\}] \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$F = 4\xi(1-\xi) \quad 0 \leq \xi \leq 1 \\ f = 89\xi(0.212 - \xi) \quad 0 \leq \xi \leq 0.106 \\ = (0.5 - \xi)/(0.796 - \xi(6.581 - 26.32\xi)) \quad 0.106 \leq \xi \leq 0.5 \\ = 0 \quad 0.5 \leq \xi \leq 1$$

ここで A, B は次式で与えられる。

下板加熱で、

$$\left. \begin{aligned} A &= (0.0438 \sin \phi + 0.0022) Ra / Re \\ B &= \chi(0.772 - 5.156\chi + 19.69\chi^2 \\ &\quad - 31.91\chi^3 + 18.66\chi^4) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

上板加熱では、

(a) 片板加熱

(b) 両板加熱

図9 局所ヌッセルト数に及ぼす浮力と傾斜角 ($Re=100$, $Ra=1500$)

$$\left. \begin{aligned} A &= \{0.046 \sin \phi - 0.0028 \sqrt{(1 - \sin^2 \phi)}\} \\ Ra/Re \\ B &= -\chi(0.627 - 3.803\chi + 14.36\chi^2 \\ &\quad - 23.36\chi^3 + 14.34\chi^4) \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

また $|1 - C_f/C_f^*|$ および $|1 - Nu/Nu^*|$ が最大値となる位置は次式で与えられる。

$$(x_h)_{\max} = 0.0432 Re^{0.9} \dots (28)$$

$$(x_t)_{\max} = 0.0479 Re^{0.9} \dots (29)$$

(2) 両板加熱の場合

$$C_f = C_f^* \{1 + A(F + Bf)\} \dots (30)$$

$$Nu = Nu^* \{1 + 0.15A(F + Bf)\} \dots (31)$$

$$\begin{aligned} F &= \zeta / \{0.286 - \zeta(0.145 - 1.145\zeta)\} \\ &\quad 0 \leq \zeta \leq 0.5 \\ &= (1 - \zeta) / \{1.566 - \zeta(3.266 - 2.266\zeta)\} \\ &\quad 0.5 \leq \zeta \leq 1 \end{aligned}$$

下板側, $0 \leq \phi < 90$ で,

$$\left. \begin{aligned} f &= 40.57\zeta(0.314 - \zeta), \quad 0 \leq \zeta \leq 0.157 \\ &= (0.5 - \zeta) / \{0.621 - \zeta(2.546 \\ &\quad - 4.924\zeta)\}, \quad 0.157 \leq \zeta \leq 0.5 \\ &= 0, \quad 0.5 \leq \zeta \leq 1 \\ A &= (0.0194 \sin \phi + 0.0072) Ra/Re \\ B &= \chi(0.784 - 3.513\chi + 9.134\chi^2 \\ &\quad - 10.44\chi^3 + 4.543\chi^4) \end{aligned} \right\} \dots (32)$$

上板側, $0 \leq \phi \leq 90$ では,

$$\left. \begin{aligned} f &= 25.77\zeta(0.394 - \zeta), \quad 0 \leq \zeta \leq 0.197 \\ &= (0.5 - \zeta) / \{0.782 - \zeta(3.863 \\ &\quad - 7.268\zeta)\}, \quad 0.197 \leq \zeta \leq 0.5 \\ &= 0, \quad 0.5 \leq \zeta \leq 1 \\ A &= (0.0322 \sin \phi - 0.0072) Ra/Re \\ B &= -\chi(0.9083 - 3.168\chi + 7.911\chi^2 \\ &\quad - 5.207\chi^3) \end{aligned} \right\} \dots (33)$$

また両板加熱の場合の $(x_h)_{\max}$ と $(x_t)_{\max}$ は次式で表される。

$$(x_h)_{\max} = 0.027 Re^{0.854} \dots (34)$$

$$(x_t)_{\max} = 0.0222 Re^{0.854} \dots (35)$$

これらの式において $\chi = 1 - \sin \phi$, 式の適用範囲は $0.05 \leq x \leq 10$, また上板加熱ならびに両板加熱の上板側において, 係数 A の値が負になったら, 係数 B の符号を反転させる。 $(x_h)_{\max}$ と $(x_t)_{\max}$ の値については垂直時の値で代表させた。

得られた関係式から算出される値を, 一例として, 図8と図9の $\phi = 0^\circ$ と 45° に対して細線で示した。片板加熱 $\phi = 45^\circ$ の場合, C_f が1.7%以内, Nu は1%以下で近似されて極めてよい一致が得られている。図7

から $Ra = 0$ の場合の C_f^* および Nu^* を求め, 片板加熱か両板加熱かにより式(24)~(35)を使い分ければ, 流路の傾きに応じた C_f と Nu が本解析条件内の任意のレイノルズ数とレイリー数について算出できる。

6. 結 言

空気が傾斜平行平板間を層流で上昇する助走区間の複合対流二次元伝熱問題を, 壁温一定の下で解析した。その結果は次のように要約される。

(1) 助走域の速度分布は浮力の影響を受けてひずむ。流路が水平時には加熱条件とは無関係に常に中心軸より下側が加速される。流路の傾斜角が増加すると下板加熱では下板側が加速され, 上板加熱では逆に加速領域は上板側に移行する。両板加熱の場合には傾斜角の増加とともに速度分布は対称な分布形へ近づく。

(2) 助走区間長さは浮力と傾斜角の増加に伴って長くなる。

(3) 温度分布に与える浮力の影響の傾斜角による差異は速度分布ほど著しくない。またレイリー数の違いに対する温度分布の差異も速度分布に比して小さい。

(4) 壁面摩擦係数 C_f は, 流路が水平なときは常に下板側の C_f が等温流のそれよりも大きく, 上板側では逆に小さくなる。流路の傾斜角が増加すると, 加熱壁の C_f は水平時より大きな値に, また断熱壁のそれは反対により小さな値になる。

(5) 浮力が局所ヌッセルト数に及ぼす効果は傾斜角の増加とともに増す。水平流路の場合に上板側に生じる熱伝達の低下は, 自然対流の効果によって傾斜角を 15° 以上にすると消滅する。

(6) 加熱板の壁面摩擦係数と局所ヌッセルト数の値を算出するための, 技術的に有用性のある近似式(24)~(35)を求めた。

付 録

両板加熱の水平流路で下方側が加速されることはよく知られているので⁽⁷⁾⁽⁸⁾, ここでは片板加熱の場合の非対象速度分布の発生について考察する。

図2からわかるように, 下方が加速されることは,

$$(\partial u / \partial y)_0 > -(\partial u / \partial y)_1 \dots (36)$$

となることに対応する。

(1) 下板加熱の場合

式(13), (14)より

$$\begin{aligned} (\partial u / \partial y)_0 &= 3(\psi_{i,2} - \psi_{i,1}) / b^2 + \omega_{i,2} / 2 + \Delta_0 \\ &\dots (37) \end{aligned}$$

$$-(\partial u / \partial y)_1 = 3(\psi_{i,n+1} - \psi_{i,n}) / b^2$$

$$-\omega_{i,n}/2 + \Delta_1 \dots\dots\dots (38)$$

ここで純強制対流の場合には,

$$\left. \begin{aligned} \psi_{i,2} - \psi_{i,1} &= \psi_{i,n+1} - \psi_{i,n} \\ \omega_{i,2} &= -\omega_{i,n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

となる。式(37), (38)の右辺最終項 Δ_0, Δ_1 は自然対流の影響を表し, 下板加熱の場合は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0 &= b^2 \cdot Ra \{ (\partial\theta/\partial y)_0 \cdot \sin \phi \} / (4Pe) \\ \Delta_1 &= b^2 \cdot Ra \{ (\partial\theta/\partial x)_1 \cdot \cos \phi \} / (4Pe) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

ここで上板 (断熱面) では $(\partial\theta/\partial x)_1 \leq 0$, 下板では $(\partial\theta/\partial y)_0 > 0$ である。すなわち式(37)~(40)から明らかに純強制対流に対して浮力を考慮すると, $(\partial u/\partial y)_0 > -(\partial u/\partial y)_1$ となる。この傾向は傾斜角 ϕ の増加とともに増大する。言いかえれば, ϕ の増加とともに下側が加速される度合は増大する。

(2) 上板加熱の場合

このときは式(37), (38)において,

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0 &= -b^2 \cdot Ra \{ (\partial\theta/\partial x)_0 \cdot \cos \phi \} / (4Pe) \\ \Delta_1 &= -b^2 \cdot Ra \{ (\partial\theta/\partial y)_1 \cdot \sin \phi \} / (4Pe) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

となる。ここで下板 (断熱面) では $(\partial\theta/\partial x)_0 \leq 0$, 上板では $(\partial\theta/\partial y)_1 < 0$ となる。すなわち(1)と同様に, 水平時は $(\partial u/\partial y)_0 > -(\partial u/\partial y)_1$ となる。ただし傾斜角 ϕ の増加とともに $(\partial u/\partial y)_0$ と $-(\partial u/\partial y)_1$ の大小関係は逆転する。これは ϕ の増加とともに本文に記したように最大速度の位置が上板側に移行することを意味する。

文 献

- (1) Shah, R. K. and London, A. K., *Advances in Heat Transfer*, Supplement 1 (1978), Academic Press.
- (2) 森, 機械の研究, 39-1 (昭62), 99.
- (3) 内藤, 機論, 51-472, B (昭60), 4021.
- (4) 木枝, 京都大学学位論文, (昭56).
- (5) Yao, L. S., *Int. J. Heat Mass Transf.*, 26-1 (1983), 65.
- (6) Aung, W. and Worku, G., *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, 108-2 (1986), 299.
- (7) 木谷・ほか2名, 機論, 37-102 (昭46), 1947.
- (8) Nguyen, T. V., ほか2名 (Lewis, R. W. ほか2名 ed.), *Numerical Method in Heat Transfer*, (1981), 349, John Wiley & Sons.
- (9) 内藤, 化学工学論文集, 9-6 (昭58), 635.

討 論

〔質問〕 能 登 勝 久 (神戸大学工学部)

(1) 支配方程式系を離散化された中心差分は二次の精度であるが, 壁面渦度は三次の精度をもつ式を用いられた。これらの精度が異なることについて, ご見解をお示しいただきたい。

(2) SOR法で解かれたと思われるが, ポイントのSOR法かライン上のSOR法のいずれか。加速または緩和パラメータを用いられたなら, その値はいくらか。繰返し計算回数は何回ぐらいだったか。

(3) 傾斜角度が小さい場合に二次流れの影響はどうか。森ら(付1)は水平活路で $Ra > 1708$ で二次流れが発生すると報告している(付1)。

(4) 自然・強制複合対流で重要なパラメータである Gr''/Re''^2 の熱流動分布に与える影響を論じていただきたい。ここに $Gr'' = 8s'^3 g \beta (t_w' - t_0') / \nu'^2$, $Re'' = 2s' u_0' / \nu_0'$

〔回答〕 (1) 壁面渦度の式は二次精度としても, 全体としては十分満足のいく解は得られる。しかし, 本研究は熱伝達問題を扱っているので, 壁面ならびに温度こう配の急激な壁面近傍の計算には, さらに精度の向上を図るため, 三次精度以上の式を用いた。

なお, 三次精度の式を用いることによって付録に記した考察が可能となる。

(2) 本数値計算はポイントSOR法を採用した。緩和パラメータ Ω は, 流れ関数 ψ と渦度 ω の計算では $\Omega_\psi = \Omega_\omega = 0.9$, また温度 θ については $\Omega_\theta = 1 \sim 1.2$ とした。繰返し計算回数は6000~9000回である。

(3) 本解析は二次元流に限定しているため, 水平流路の二次流れ発生臨界値 $Ra = 1708$ を当然考慮する必要がある。したがって本研究では, 垂直時を除いた傾斜角の小さい場合は, この臨界レイリー数以下の $Ra = 1500$ を中心に考察した。

(4) 助走域では支配方程式はだ円形であるために, 共存対流の影響はよく知られているようなパラメータ Gr''/Re''^2 のみでは表せない。したがって, 本研究では Ra と Re のそれぞれについての影響を明らかにすることとした。すなわちご質問の件については図3, 4を基にして本文で論ぜられている。なお, 温度分布については159ページ左欄下4行め~下1行めに記した。

(付1) 森・内田, 機論, 31-230 (昭40), 1511.