回転管入口助走部の流動*
(軸レイノルズ数の小さな場合)今尾茂樹^{*1}, 張 棄名^{*2}, 山田 豊^{*1}

The Laminar Flow in the Developing Region of a Rotating Pipe

Shigeki IMAO, Qiming ZHANG, and Yutaka YAMADA

In this paper, velocity profiles of the laminar flow in the developing region of an axially rotating pipe are analyzed numerically and are compared with the experimental results when an uniform axial flow is introduced into it. It is found that the axial velocity in the rotating pipe exceeds the value of the Poiseuille flow at the center, and a backward flow appears near the wall as the swirl ratio becomes large. The greater the swirl ratio N becomes, the more remarkable it tends to become; but at about $N=3$ experiments show that the rotation of the pipe causes the flow to become unstable and the development of the flow is delayed.

Key Words: Fluid Mechanics, Laminar Swirling Flow, Rotating Pipe, Inlet Flow, Numerical Analysis, Velocity Distribution

1. 結 言

旋回成分を持たない流れが軸まわりに回転している管内に入った場合、管壁の回転によって管内の圧力分布、速度分布は静止管の場合と相当異なったものとなる。こうした流れは、回転機器の軸冷却や流体機械の流入部などにおいて実際に見られるものであり、この流動の解明は工業上重要な役割を果たす。また遠心力場の流れに関連して工学的にも興味深い。

著者ら⁽¹⁾⁽²⁾を含め従来までの研究^{(3)~(5)}の多くは主として発達した回転管内の旋回流れに注目してきた。しかしながら、工業的には管入口部を含めた未発達域での流動様式の解明が重要であり、それによって回転の影響がどのように進展するのかを明らかにすることができる。この助走域については、静止管層流の場合、境界層内の速度分布を4次式で仮定した菱田⁽⁶⁾、数値計算により解を求めた菱田ら⁽⁷⁾の研究があるが、回転管については、わずかに Lavan ら⁽⁸⁾の軸レイノルズ数が極めて小さい場合の理論解析があるにすぎない。ところが Pedley⁽⁹⁾の解析、Nagib ら⁽¹⁰⁾の実験では、剛体

回転する層流は静止管の場合よりかなり小さな軸レイノルズ数で不安定となると報告されている。また、軸レイノルズ数の大きい場合について Kikuyama ら⁽¹¹⁾は入口境界層内の速度と乱れを調べているが、旋回比が1以下の範囲であった。さらに水谷ら⁽¹²⁾は、実験値に基づいて回転管における助走距離を計算しているが、これも小さな旋回比に限られている。

本研究は、旋回成分を持たない一様流が回転管に流入する場合について、特に管入口部で逆流も発生する旋回比の大きな状況までナビエ・ストークスの式を直接数値計算して解を求め、また実験的に乱れの少ない一様流を回転管に導いて入口助走部の流動を調べ、両者を比較検討した。

2. 記 号

 D : 管内径 = 30.0 mm N : 旋回比 = V_w/U_m p : 無次元圧力 = $p/\rho U_m^2$ R : 管半径 = $D/2$ Re_z : 軸レイノルズ数 = DU_m/ν Re_w : 回転レイノルズ数 = DV_w/ν r : 無次元半径 = r'/R U : 無次元軸速度 = U'/U_m

* 昭和62年11月4日 第947回講演会において講演、原稿受付 昭和62年5月1日。

^{*1} 正員、名古屋工業大学 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)。

^{*2} 学生員、名古屋工業大学大学院。

U_m : 断面内平均軸速度

V : 無次元周速度 $= V'/V_w$

V_w : 管壁の周速度

W : 無次元半径方向速度 $= W'/U_m$

z : 回転管入口からの無次元距離 $= z'/R$

ν : 動粘度

ρ : 密度

ϕ : 流れ関数

ω : 渦度

' : 有次元値を示す

3. 理 論

3.1 基礎方程式 角速度一定で回転している円管に、速度 U_m の非圧縮性流体が流入する場合の速度場を解析する。図1のように円筒座標系をとり、軸対称流を考える。

無次元変数を

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{V_w}{U_m} & U &= \frac{U'}{U_m} & V &= \frac{V'}{V_w} & W &= \frac{W'}{U_m} \\ r &= \frac{r'}{R} & z &= \frac{z'}{R} & p &= \frac{p'}{\rho U_m^2} & Re_z &= \frac{2RU_m}{\nu} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

と定義し、さらに流れ関数 ϕ および渦度 ω を

$$W = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad U = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\omega = \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial r} \quad \dots\dots\dots (3)$$

と定義する、軸方向の z 座標を

$$x = 1 - \frac{1}{1 + (cz)^m} \quad \dots\dots\dots (4)$$

と変換して得られる渦度の式および運動方程式は以下のようなになる。

$$\omega = -\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{d^2 x}{dz^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{dx}{dz} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial x} \omega - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial x} - 2N^2 V \frac{\partial V}{\partial x} \right) \\ &= \frac{2}{Re_z} \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{d^2 x}{dz^2} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (6) \\ & - \frac{1}{r} \frac{dx}{dz} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial x} V \right) \end{aligned}$$

図1 座標と記号

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{Re_z} \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{d^2 x}{dz^2} \frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここで図2に示す以下の境界条件を与える。

$$\left. \begin{aligned} x=0, 0 \leq r < 1: & \phi = \frac{r^2}{2}, \omega = 0, V = 0, W = 0 \\ x=1, 0 \leq r < 1: & \phi = r^2 - \frac{r^4}{2}, \omega = 4r, V = r \\ 0 < x < 1, r=0: & \phi = 0, \omega = 0, V = 0, W = 0 \\ 0 \leq x \leq 1, r=1: & \phi = \frac{1}{2}, \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, V = 1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

3.2 計算結果およびその考察 数値計算は格子間隔 $\Delta x, \Delta r$ の格子点 (i, j) の ϕ, ω, V の値を $\phi_{ij}, \omega_{ij}, V_{ij}$ として式(5)~(7)を x の微分項と r の微分項とに分けて、直接これらを中心差分で置き換えて差分方程式に変換し、SOR法によって解を求めた。格子間隔は $\Delta x = \Delta r = 0.02$ であり、式(4)の定数は $c = 0.171, m = 0.452$ とした。最終繰返し数 k における反復計算の結果は ϕ と V について

$$|\phi_i^{(k)} - \phi_i^{(k-1)}| < 10^{-5}, |V_i^{(k)} - V_i^{(k-1)}| < 10^{-4} \dots\dots (9)$$

となっている。

3.3 速度分布 高速回転している管の流入部では、管壁近くで逆流を生じることが考えられる⁽⁸⁾。本計算では、境界条件として流入する流れは一様としているため、管入口断面上では逆流が起こり得ず、わずかに下流にて逆流する。そこで本計算の合理性を調べるために、回転管の上流に短い静止管を仮定し、この上流の静止管入口に旋回成分を持たない一様流が流入する場合についても計算し、両者を比較した。その結果、本計算の旋回比 N が6以下の場合においては、回転管入口流れに本質的な差異は見られなかった。そして回転管入口のごく近くを除いた下流位置では、全く同じ結果が得られた。したがって本計算の範囲内では上記の仮定は妥当と判断したが、さらに旋回比の大きな場合に対してはこのような仮定は適当ではない。

回転管内の層流は、軸レイノルズ数が82.9を超えると不安定となることがPedley⁽⁹⁾によって報告されている。そこで以下に示す数値計算結果は、まず Re_z

図2 境界条件

$Re_z=50$ の場合について述べ、後に Re_z の違いによる差について述べることにする。図 3 は $Re_z=50$ の場合の回転管流入後の各断面における速度成分 U, V, W の分布である。 $z=0.0452$ の断面を図 3 (a) に示す。軸速度 U は管壁での摩擦によって壁面近くで減速され、管中心部では加速される。この効果は旋回比 N が大きいほど顕著に現れる。これは管の回転によって壁近くの流体に旋回成分が与えられ、遠心力によって圧力が上昇するが、下流になるほどその旋回は強まり、したがって遠心力による圧力上昇も下流のほうが大きいため、無回転時よりも壁近くの流体が減速されるためである。また、回転管のみならず静止管においても管中心部は凹んだ分布形になって加速が遅れており、排除

効果は管壁近くで急激に起っている。これは入口近くでは圧力 p の半径方向の変化が無視できないことを表している。一方、周速度 V は入口に近いこともあってその成分はわずかで、旋回比による違いもほとんどないが、旋回比が大きいほどわずかに旋回も強い。半径方向速度 W は静止管でもかなり大きな値を示し、回転管ではさらに大きな値となっている。

図 3 (b) は $z=0.272$ の断面の速度分布である。軸速度 U は管中心部でかなり大きくなり、管中心部が凹んだ分布形もはっきり現れている。 $N=5, 6$ の場合、軸方向の大きい圧力こう配の作用で軸速度は管壁近傍で極端に減速され、逆流が発生している。周速度 V は、

 (a) $z=0.0452$

 (c) $z=1.10$

 (b) $z=0.272$

 (d) $z=4.10$

 図 3 速度分布 ($Re_z=50$)

管中心部までは及ばないがかなり広い領域まで旋回成分を有している。そしてこのとき、旋回比 N による差は助走区間内で最も著しい。これは逆流によって下流の旋回の強い流体が上流へ流れ込むためであり、助走区間内でこの逆流の速度が最も大きいからである。一方、半径方向速度 W は $z=0.0452$ の断面より小さくなって、そのピークも管中心のほうへ移動しているが、依然として管中心部へ向かう流れが存在している。

図 3 (c) は $z=1.10$ の断面の速度分布である。軸速度 U の旋回比による違いは管中心部においてさらに顕著になっている。特に $N=5, 6$ では発達流の放物線分布の中心速度 ($U=2.0$) をかなり上まわったオーバーシュート現象が見られる。管壁近傍では、逆流が消え ($N=5$) または小さくなっている ($N=6$)。図中には Lavan ら⁽⁸⁾ が行った回転管に静止管で発達した層流が流入する場合の結果を併記してあるが、同じ条件で比較した場合、このオーバーシュート現象ならびに逆流の発生は発達した流れが流入する場合のほうが顕著である。なお、彼らの解析は Re_z が 40 以下であって、半径方向速度は示されていない。一方、周速度を有する領域は管中心まで広がっているが、旋回比 N による旋回強さの差は再び小さくなっている。半径方向速度 W は上流の図 3 (a) に比べかなり小さくなっている。 $N=0, 3$ では、管断面全体において W の値が負となり、半径の外側の流体が管中心へ移動しているが、 $N=5, 6$ では管中心から離れた領域において W が正の値となり、流体が管壁へ向かって移動している。したがって軸速度は増加し、逆流は小さくなっている。

図 3 (d) は $z=4.10$ の断面の速度分布である。軸速

度 U は図 3 (c) と同様に、中心で放物線分布より大きくオーバーシュートし管中心の速度はさらに大きくなっているが、 r が $0.2 \sim 0.5$ 付近の値は $z=1.10$ の上流断面よりやや小さくなっている。管壁近傍では逆流が完全に消え、軸速度分布は層流の放物線分布に近づく傾向にある。これは半径方向速度 W が回転管内においてすべて正の値を示し、流体が管中心から管壁へ向かって移動していることと対応する。また、この断面では発達した層流が流入する Lavan らの結果⁽⁸⁾ との差は見られない。周速度分布はかなり剛体回転に近づいているが、管中心部の周速度の低い流体が半径方向外側に移動するため、図 3 (a) ~ (c) の上流断面とは逆に旋回比が小さいほど旋回が強い。

図 4 は $N=3$ の場合の $Re_z=50$ と 500 における回転管の各断面の速度分布を示す。助走域の流れを比較するため z/Re_z を同一の条件とした。まず流れの発達過程としては、いずれの場合も軸速度は管中心部が加速されて大きくなり、いったんオーバーシュートしたのち放物線分布に近づく。軸レイノルズ数の違いによる差は入口近くにおいて顕著で、 Re_z が大きいほうが中心部の速度が大きくなっているが、下流において逆転し、さらに下流ではほぼ同一となっている。これは、 Re_z が小さな場合、入口近くでは半径方向速度がかなり大きく排除効果も断面全体に及ぶのに対し、 Re_z が大きな場合には半径方向速度が小さく、特に管壁近くで排除効果が急激に起こるためである。

3.4 セン断応力 図 5 はせん断応力 $\tau_{r\theta}$ の軸方向変化を $N=1$ と 5 について示す。入口近くの壁近傍 ($r=0.9$) および壁面上では、旋回のない流体に旋回成分を与えるため、速度こう配が大きく大きなせん断力

図 4 速度分布 ($N=3$)

図 5 周方向のせん断応力 $\tau_{r\theta}$

値が零に近づくが、旋回比が大きいほど零になるまでの距離が長くなっている。つまり、旋回比が大きいほど剛体回転となるまでの助走距離は長くなる。この結果は、境界層の仮定を用いて N が 2 以下について行った近似計算結果⁽¹²⁾でも同様であった。

図 6 はせん断応力 τ_{rz} を示す。 $N=1$ では管壁 ($r=1.0$) の値は常に正であるが、 $N=5$ では負になる区間が現れ、逆流が発生していることがわかる。また、いずれの旋回比においても管壁以外の半径位置で負になる区間が存在している。これは、前述の軸速度に現れる凹んだ分布形に対応したものである。ここで、図 5 と図 6 とを比べて、軸速度と周速度の両者に関する助走距離を比較してみると、軸速度のほうがわずかに早く発達していることがわかる。

4. 実験装置および実験方法

軸レイノルズ数が小さな場合の静止管では、流れは層流で、しかもその層流にかく乱を与えても下流で減衰し乱流へ遷移することはない。ところが管を回転させると、 Re_z が 2000 以下であっても層流は維持されない⁽¹¹⁾⁽¹⁰⁾。これについて、これまでの研究はいずれも発達域についての考察であり、助走域は不明のままであった。そこで、実際の回転管入口助走部の流動を調べ、前記の計算結果とも比較するため、図 7 に示す装置を用いて実験を行った。管路は循環方式で、回転管

図 6 軸方向のせん断応力 τ_{rz}

図 7 実験装置の概略

にはホーニング加工した内径 30.0 mm のステンレス管、配管には 2 インチの黄銅管を使用した。ポンプから送られた流体は 180° ベンド、整流部を通して回転管に流入する。整流部には 50 メッシュの金網 6 枚を設け、面積比 11:1 の縮流部を通して旋回成分を持たない均一流が回転管に流入するようにした。その結果、回転管入口直前における流れは、縮流部で生じた境界層部分 ($Re_z=1000$ のとき境界層厚さ $\delta \approx 0.08R$) を除き均一で、乱れ強さは約 0.5% であった。

速度分布の測定は、長さ 6 mm の内径の等しい静止管を回転管の途中にはさみこみ、この静止管部から外径 1.5 mm の 2 孔式円筒ピトー管を挿入して測定した。管が高速回転する場合には、回転管出口部分における逆流が無視できなくなるが、本実験では回転管の全長を常時 300D としているためその影響はない。なお使用流体は 50% グリセリン水溶液である。

5. 計算結果と実験結果との比較

実験は旋回比が $0 \leq N \leq 6$ の範囲を、 $Re_z=500$ および 1000 の場合について行ったが、 Re_z の違いによる結果の定性的な変化は見られなかった。

図 8 (a), (b) は $Re_z=1000$, $z=12$ および 30 の断面の速度分布である。図中には数値解析結果も併記したが、旋回比の大きな場合は解の収束が悪く、 $N \leq 3$ の範囲にとどまった。 $z=12$ の断面 [図 8 (a)] では、静止管 ($N=0$) ならびに $N=1$ の実験値は理論値とほぼ一致している。ところが $N=3$ の場合、理論では中央凸形の分布形が強まるのに対し、実験値は上記の $N=0, 1$ の場合とあまり変わらず、両者の間に顕著な差が見られる。これは $Re_z=500$ でも同様であり、今回測定した助走区間内 ($z \leq 60$) 全域で認められた。さらに、熱膜流速計により速度変動を調べたところ、 $N=3$ において管の回転周期とは明らかに異なった周期的な変動が管壁近くで検知された。回転管内の層流境界層の不安定化現象については菊山ら⁽¹³⁾がらせん渦の発生を確認しており、したがって本実験においても回転によって流れが不安定となり、そのため理論値と実験値がくい違ったものと思われる。一方、 $N=5, 6$ では、数値解析で予測したオーバシュート現象が現れ、しかも管中心部では、図 3 (b) で見られた入口直後の排除効果による凹みと同様な分布形状が現れている。これは $N=3$ においていったん不安定になった流れが、さらに管の回転数が増加したことによって安定化され、再び理論で予測されたように中央凸形の軸速度分布になったものと考えられる。周速度分布は、いずれの旋回比においても直線で示した剛体回転の分布形とはまだ

図 8 速度分布 ($Re_s=1000$)

かなり離れている。詳しく見ると、 $N=3$ を除き旋回比が大きいほど周速度分布が剛体回転に近づいている。 $N=3$ の場合の周速度が低いのは、流れが不安定となっているためと考えられる。 $z=30$ の断面[図8(b)]では、軸速度は上流の $z=12$ に比べ管中心でさらに増大し、管壁近くで減少している。また、周速度は下流になるほど剛体回転の分布形に近づいている。

以上より管の回転数が低い場合には管の回転が流れに不安定性を与え、理論値ほど軸速度、周速度とも発達しないが、高速回転する $N=5, 6$ になると、今度は遠心力作用による流れの安定化が生まれ、両者が相殺される形で理論で予測したオーバシュートする軸速度分布形となる。

6. 結 論

旋回成分を持たない一様流が回転管に流入する場合の回転管入口助走部の流れについて、軸レイノルズ数の小さな場合を理論および実験の両面から詳しく調べた。理論では層流に限りナビエ・ストークスの方程式を直接差分方程式に書き換え、その数値解を求め、実験値と比較して、以下の結論を得た。

(1) 回転管では、発達した軸速度分布より中央凸形の分布となるオーバシュート現象を生ずる。逆に管壁付近では大きく減速され、大きな旋回比においては回転管入口近くで逆流が発生する。ただし、旋回比が3付近では回転による流れの不安定化を生じ、軸速度、

周速度とも発達が遅れる。

(2) 入口直後では管壁近くで排除効果が急激に起こり、管中央が凹んだ軸速度分布形となる。これは軸レイノルズ数が大きいほど、また旋回比が大きいほど顕著になる。

(3) 回転管入口近くでは旋回比が大きいほど周速度分布が剛体回転に近づくが、ある程度下流においてその傾向が逆転する。

(4) 軸速度が放物分布、周速度が剛体回転分布の発達状態に達するまでの助走距離は旋回比の増大に伴って長くなる。

終わりに、有益な助言をいただいた名古屋工業大学長野靖尚教授に感謝の意を表す。

文 献

- (1) 山田・今尾, 機論, 46-409, B (1980), 1662.
- (2) 山田・今尾, 機論, 51-461, B (1985), 34.
- (3) White, A., *J. Mech. Eng. Sci.*, 6-1 (1964), 47.
- (4) 村上・ほか4名, 機論, 42-358 (1976), 1784.
- (5) 菊山・ほか3名, 機論, 48-432, B (1982), 1431.
- (6) 菱田, 機論, 30-216 (1964), 941.
- (7) 菱田・ほか2名, 機講論, No. 753-3 (1975-3), 61.
- (8) Lavan, Z., ほか2名, *Phys. Fluids*, 12-9 (1969), 1747.
- (9) Pedley, T. J., *J. Fluid Mech.*, 35-1 (1969), 97.
- (10) Nagib, H. M., ほか3名, *ARL Rep.*, 69-9176 (1969).
- (11) Kikuyama, K., ほか2名, *Trans. ASME, Ser. I*, 105 (1983), 154.
- (12) 水谷・ほか3名, ターボ機械, 15-3 (1987), 33.
- (13) 菊山・ほか3名, 機論, 50-460, B (1984), 2918.