翼端間げきを有する振動翼列の非定常空力特性*
(第2報, 理論解析, 定常負荷がない場合)渡 辺 紀 徳^{*1}, 梶 昭 次 郎^{*2}Unsteady Aerodynamic Characteristics of Oscillating Cascades
With Tip Clearance
(2nd Report, Theoretical Analysis for Non-Loaded Cascade)

Toshinori WATANABE and Shojiro KAJI

Following the experimental study reported in the previous paper, this report describes a theoretical analysis based on the potential flow. By use of the vortex lattice method, calculations were performed to obtain unsteady aerodynamic forces acting on oscillating blades with tip clearances. Calculated damping forces in the case of large tip clearances show good agreement with experimental data. When the clearance is small, however, there can be found a discrepancy between experimental and analytical results. This discrepancy was thought to be ascribable to the viscous effect of the flow near the blade tips. To explain the experimental data it was necessary to apply a model such that each blade should retain finite circulation at the extremity of its tip. From the calculated results for various reduced frequencies it was confirmed that aerodynamic characteristics found in the experimental study should be accepted in the wide range of reduced frequencies.

Key Words: Unsteady Flow, Blade Oscillation, Unsteady Aerodynamic Force, Cascade Flutter, Tip Clearance, Vortex Lattice Method

1. 緒 言

第1報⁽¹⁾では翼端間げきを有する振動翼および翼列に働く非定常空気力の性質を実験的に調べた。その結果、非定常空力特性に及ぼす翼端間げきの影響は甚大であることがわかった。翼に定常負荷が働かない場合には、翼端間げきの増大につれて翼端近傍の空力減衰力は大幅に減少し、すき間が大きいとこの影響は翼幅中央部にまで及んだ。また翼列については、隣接翼間位相差が0°の場合、非定常空気力は翼端間げきの影響をほとんど受けないが、180°のときは空力減衰力が最も強く間げきの影響を受けることもわかった。本報ではこのような実験結果を踏まえて、翼端間げきを有する翼列を対象とした三次元非定常翼列問題を、定常負荷がない場合について理論解析し、翼列翼に働く非定常空気力を求めて実験結果と比較考察する。

従来、翼端間げきを考慮した解析としては、単独翼の定常問題を扱ったものがある⁽²⁾⁽³⁾。これらは揚力線理論に基づいて、平行壁間に翼のある流れの場を取扱ったものである。揚力線理論をそのままこのような問

題に適用すると、すき間が大きい場合は実験結果とよく一致する解が得られるが、すき間が小さいと実験と合わない。これには翼端における境界条件の与え方が関与している。文献(3)ではすき間が小さいと翼端で循環が消失せず、ある有限な循環が保持されるという実験事実を考慮して、翼端における循環保存量に実験結果を用いた計算を行い、実験とよく一致する結果を得ている。

一方、非定常翼列の三次元理論解析は従来かなり進んできており、加速度ポテンシャルを用いた環状翼列の解析⁽⁴⁾、直線翼列の解析⁽⁵⁾、平行せん断流中の翼列フラッタの解析⁽⁶⁾等が行われている。しかしながら、翼端間げきを考慮した非定常翼列理論はまだ存在しない。

本解析では Söhngen⁽⁷⁾、塩入⁽⁸⁾、Whitehead⁽⁹⁾、花村⁽¹⁰⁾らによって二次元翼列について確立された、翼列を渦分布で表現する分布特異点法を三次元に拡張し、直線平板翼列を揚力面解析する。計算には翼端間げきの部分の境界条件を満足させるため渦格子法⁽¹¹⁾⁽¹²⁾を用い、壁面の境界条件は壁によって生じる鏡像を使って満足させた。

* 昭和62年11月5日 第947回講演会において講演、原稿受付 昭和62年4月28日。

^{*1} 正員、東京農工大学工学部 (〒184 小金井市中町2-24-16)。

^{*2} 正員、東京大学工学部 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)。

2. 理 論

2・1 モデル 図1のように x 方向の一様流速 U なる流れの中に、迎角 0° の無負荷の状態で置かれた無限平板翼列を考える。 $z=h$ が翼端であり、 $z=h$ の壁との間にすき間 δ がある。流れは非圧縮非粘性のポテンシャル流とする。各翼は平均位置まわりに角振動数 ω で微小な調和振動を行っており、その隣接翼間位相差は τ である。翼の微小振動によって場には微小擾乱ポテンシャル $\phi \cdot e^{i\omega t}$ が誘起される。 ϕ はラプラス方程式

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

を満たす。境界条件は (i) 翼面で垂直方向の相対速度が零 (不透条件), (ii) 翼後縁で上下面の圧力差が零 (Kutta の条件), (iii) 両側壁面上で $\partial\phi/\partial z=0$ (壁の不透条件), (iv) 翼端で上下面の圧力差が零, である。

翼端における境界条件には微妙な問題が含まれている。本モデルでは主流が翼弦方向を向いているので、翼端線は主流に平行である [図2(a)]。主流と翼端線が平行でなく、図2(b)のような関係であれば、翼端は前縁と同様の特性を有する。また図2(c)のようであれば翼端は後縁と同様になり、Kutta の条件が適用されるものと思われる。したがって図2(a)の場合には前縁としての状態と、後縁としての状態の中間的な状況になっていることが予想される。

従来、三次元翼理論では静止翼についても振動翼についても翼端の循環が零という条件が用いられてきた。本理論でもこれにならって上記(iv)のような条件を設けた。しかしこの条件は常に妥当とは限らず、本解析でも後述のように、すき間の小さい場合には別の条件が必要であった。条件(iv)が妥当でないとき、いかなる条件を課すべきかは、まだ明らかにされていない。

2・2 特異点による誘起速度の表示 ラプラス方程式の基本解である渦をすべての翼面上と後流面上に分布させ、これらによって誘起される速度を求める。これが前節の境界条件を満たすことから渦の分布関数

図1 座標系と渦

図2 翼端の状況

が決定され、この分布関数から翼に働く非定常空気が求まる。

図1には場に存在する非定常渦を示した。翼面上には z 方向に軸を持つ束縛渦 $\gamma_z^b(\xi, \zeta) \cdot e^{i\omega t}$ と x 方向に軸を持つ渦 $\gamma_x^b(\xi, \zeta) \cdot e^{i\omega t}$ が存在する。後流面上には z 方向および x 方向に軸を持つ自由渦が存在する。これらを $\gamma_z^w(\xi, \zeta) \cdot e^{i\omega t}$, $\gamma_x^w(\xi, \zeta) \cdot e^{i\omega t}$ と表す。

中央0番翼上の点 $(x, 0, z)$ に束縛渦と自由渦によって誘起される y 方向速度 v_s は、翼列のすべての翼からの寄与と、壁によって生じる鏡像からの寄与を重ね合わせるにより、次のように表される。

$$v_s(x, 0, z, t) = \bar{v}_s(x, 0, z) \cdot e^{i\omega t},$$

$$\bar{v}_s(x, 0, z) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pm \frac{1}{r_{mn}^3} [(x-\xi-ms \sin \theta) \cdot \gamma_z^b(\xi, \zeta) + (z \mp \zeta - 2nh) \cdot \gamma_x^b(\xi, \zeta)] e^{im\tau} d\xi d\zeta - \frac{1}{4\pi} \iint_W \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pm \frac{1}{r_{mn}^3} [(x-\xi-ms \sin \theta) \cdot \gamma_z^w(\xi, \zeta) + (z \mp \zeta - 2nh) \cdot \gamma_x^w(\xi, \zeta)] e^{im\tau} d\xi d\zeta \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$r_{mn}^2 = (x-\xi-ms \sin \theta)^2 + (ms \cos \theta)^2 + (z \mp \zeta - 2nh)^2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

S は翼面上, W は後流面上を示す. $\sum_n^{\pm}$ は複号の各々の場合をすべて加え合わせることを意味している. m による総和は翼列の重ね合わせ, n による総和は鏡像の重ね合わせを示す. τ は隣接翼間位相差である.

式(2)の m, n による総和を次のように表示する.

$$E_1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x - \xi - ms \sin \theta) \cdot e^{im\tau} / [(x - \xi - ms \sin \theta)^2 + (y - ms \cos \theta)^2 + (z - \zeta - 2nh)^2]^{3/2} \dots (4)$$

$$E_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x - \xi - ms \sin \theta) \cdot e^{im\tau} / [(x - \xi - ms \sin \theta)^2 + (y - ms \cos \theta)^2 + (z + \zeta - 2nh)^2]^{3/2} \dots (5)$$

$$E_3 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z - \zeta - 2nh) \cdot e^{im\tau} / [(x - \xi - ms \sin \theta)^2 + (y - ms \cos \theta)^2 + (z - \zeta - 2nh)^2]^{3/2} \dots (6)$$

$$E_4 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z + \zeta - 2nh) \cdot e^{im\tau} / [(x - \xi - ms \sin \theta)^2 + (y - ms \cos \theta)^2 + (z + \zeta - 2nh)^2]^{3/2} \dots (7)$$

$E_1 \sim E_4$ を以後影響係数と呼ぶ.

式(4)から式(7)で $y=0$ と置いたものを $E_1^0, E_2^0, E_3^0, E_4^0$ とすれば, 式(2)は

$$\begin{aligned} \bar{v}_s(x, 0, z) = & -\frac{1}{4\pi} \iint_S [(E_1^0 + E_2^0) \gamma_z^b(\xi, \zeta) + (E_3^0 - E_4^0) \gamma_z^b(\xi, \zeta)] d\xi d\zeta \\ & -\frac{1}{4\pi} \iint_W [(E_1^0 + E_2^0) \gamma_z^w(\xi, \zeta) + (E_3^0 - E_4^0) \gamma_z^w(\xi, \zeta)] d\xi d\zeta \dots (8) \end{aligned}$$

と書くことができる.

次に非定常渦相互の関係を導き, 式(8)の右辺を束縛渦 γ_z^b のみで記述する. まず x 方向のオイラー方程式を後縁より下流に適用すると,

$$\gamma_z^w(x, \zeta) = -\frac{i\omega}{U} e^{i\omega/U(c/2-x)} \int_{-c/2}^{c/2} \gamma_z^b(\xi, \zeta) d\xi; x \geq c/2 \dots (9)$$

これはある翼幅位置で束縛渦のまわりの循環が時間的に変化するのに応じて後縁から自由渦が放出されることを示しており, 循環保存則に対応している.

次に x 方向に軸を持つ γ_x と, z 方向に軸を持つ γ_z との間には次の関係がある (付録1参照).

$$\frac{\partial \gamma_z}{\partial \zeta} = \frac{\partial \gamma_x}{\partial \xi} \dots (10)$$

式(10)より

$$\gamma_z^b(\xi, \zeta) = \int_{-c/2}^{\xi} \frac{\partial \gamma_z^b}{\partial \zeta} d\xi \dots (11)$$

$$\gamma_z^w(\xi, \zeta) = \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\partial \gamma_z^b}{\partial \zeta} d\xi + \int_{c/2}^{\xi} \frac{\partial \gamma_z^w}{\partial \zeta} d\xi \dots (12)$$

が導かれる. 式(11)では翼前縁で γ_z^b が零であるという条件を用いている. 式(12)に式(9)を代入すると,

$$\gamma_z^w(\xi, \zeta) = e^{-i\omega/U(\xi-c/2)} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\partial \gamma_z^b}{\partial \zeta} d\xi \dots (13)$$

となる.

式(9), 式(11)および式(13)を式(8)に代入すると,

$$\begin{aligned} \bar{v}_s(x, 0, z) = & -\frac{1}{4\pi} \iint_S [(E_1^0 + E_2^0) \gamma_z^b(\xi, \zeta) + (E_3^0 - E_4^0) \int_{-c/2}^{\xi} \frac{\partial \gamma_z^b}{\partial \zeta} d\xi'] d\xi d\zeta \\ & -\frac{1}{4\pi} \iint_W [(E_1^0 + E_2^0) \left\{ -\frac{i\omega}{U} e^{-i\omega/U(\xi-c/2)} \int_{-c/2}^{c/2} \gamma_z^b(\xi', \zeta) d\xi' \right\} \\ & + (E_3^0 - E_4^0) e^{-i\omega/U(\xi-c/2)} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\partial \gamma_z^b}{\partial \zeta} d\xi'] d\xi d\zeta \dots (14) \end{aligned}$$

と $\bar{v}_s$ が γ_z^b のみで表示される.

式(14)の $\bar{v}_s$ に点 $(x, 0, z)$ における翼の振動速度振幅を用いて翼面の不透透条件を満足させると γ_z^b が求まる.

2.3 翼に働く非定常空気力 翼面上の束縛渦 $\gamma_z^b(\xi, \zeta)$ が求まると, 翼幅方向位置 z における非定常空気力 $F(z)$ が次のように得られる.

$$F(z) = -\rho U \int_{-c/2}^{c/2} \gamma_z^b(x, z) dx \dots (15)$$

これを無次元空気力係数 C_F の形に直す.

$$C_F(z) = \frac{F(z)}{\rho c U q} = C_r(z) + i \cdot C_i(z) \dots (16)$$

C_r は C_F の実部, C_i は虚部, q は翼の振動速度振幅, i は虚数単位である. C_r は翼の振動速度と同位相の成

分であり、空力励振力を表す。ある z で C_r が正ならば、振動はその位置で局所的に不安定である。 C_i は C_r より 90° 位相の進んだ成分であり、付加質量に比例する力などを含んでいる。

3. 計 算 方 法

積分方程式(14)を解くには渦格子法を用いる。この方法では図3に示すように翼面を四辺形の格子に分割し、各格子の前縁から $1/4$ 弦長点に渦を置く。また格子の中央スパン、 $3/4$ 弦長の点を標点とし、ここで境界条件を満足させる。これによって第 (i, j) 格子の渦の強さ $\gamma_{zij}^b (i=1, \dots, I; j=1, \dots, J)$ を未知数とする連立1次方程式が得られ、 $\gamma_z^b(\xi, \zeta)$ が離散的に求まる。

この方法を適用すると、翼面上の積分は各格子ごとに行うことになる。このときは前節で述べたような循環保存則に基づく後縁からの渦放出は、格子ごとの束縛渦と放出渦との関係に置き換えられる。各格子の γ_z^b が時間的に変化するのに伴い、各渦線の位置から渦保存則に従って渦放出が行われる。また $\partial \gamma_z^b / \partial \zeta$ の項は z 方向の各位置におけるこの値が渦線位置から x 方向に連続的に放出される。すべての格子でのこのような事象を重ね合わせることによって式(14)の右辺が構成されていると考える。

また、この方法では後縁における Kutta の条件 [境界条件(ii)] が陽的には課されない。しかし図3に示した位置に格子渦と標点を置くことにより、単独翼の場合には後縁で圧力差が零となることが知られている。

本計算では第 (i, j) 要素の束縛渦 $\gamma_{zij}^b(\zeta)$ を ζ の2次関数で近似する。即ち

$$\gamma_{zij}^b(\zeta) = \gamma_{ij} + \gamma'_{ij}(\zeta - \zeta_j^*) + \frac{1}{2} \gamma''_{ij}(\zeta - \zeta_j^*)^2 \quad \dots\dots\dots (17)$$

図3 パネル

ここで $\zeta_j^* = (\zeta_j + \zeta_{j+1})/2$

したがって一つの要素渦について γ_{ij} , γ'_{ij} , γ''_{ij} の三つが未知数となる。

式(17)を式(14)に代入すると第 (i, j) 要素の格子渦が第 (k, l) 要素の標点 $(x_k, 0, z_l)$ に誘起する y 方向速度が次のように離散化表示される。

$$\bar{v}_{sij}(x_k, 0, z_l) = (I_1 - I_2) \gamma_{ij} + (I_{11} - I_{21} + I_{31}) \times \gamma'_{ij} + (I_{12} - I_{22} + I_{32}) \gamma''_{ij} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで I_1 等は以下のような積分を表している。

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} (E_1^0 + E_2^0) d\xi d\zeta \\ I_{11} &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} (\zeta - \zeta_j^*) (E_1^0 + E_2^0) d\xi d\zeta \\ I_{12} &= -\frac{1}{8\pi} \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} (\zeta - \zeta_j^*)^2 (E_1^0 + E_2^0) d\xi d\zeta \\ I_2 &= -\frac{1}{4\pi} \frac{i\omega c_{ij}}{U} \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} (E_1^0 + E_2^0) \times e^{-i\omega/U(\xi - \xi_l^v)} d\xi d\zeta \\ I_{21} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{i\omega c_{ij}}{U} \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} (\zeta - \zeta_j^*) (E_1^0 + E_2^0) \times e^{-i\omega/U(\xi - \xi_l^v)} d\xi d\zeta \\ I_{22} &= -\frac{1}{8\pi} \frac{i\omega c_{ij}}{U} \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} (\zeta - \zeta_j^*)^2 (E_1^0 + E_2^0) \times e^{-i\omega/U(\xi - \xi_l^v)} d\xi d\zeta \\ I_{31} &= -\frac{1}{4\pi} c_{ij} \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} (\zeta - \zeta_j^*) (E_3^0 - E_4^0) \times e^{-i\omega/U(\xi - \xi_l^v)} d\xi d\zeta \\ I_{32} &= -\frac{1}{8\pi} c_{ij} \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} (\zeta - \zeta_j^*)^2 (E_3^0 - E_4^0) \times e^{-i\omega/U(\xi - \xi_l^v)} d\xi d\zeta \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

ここで ξ_l^v は第 (i, j) 要素渦線の ξ 座標である。積分 $I_1 \sim I_{32}$ の計算については付録2に示す。式(18)を使って第 (k, l) 要素の標点にすべての渦から誘起される y 方向速度は次のように表示される。

$$\bar{v}_s(x_k, 0, z_l) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \bar{v}_{sij}(x_k, 0, z_l) \quad \dots\dots\dots (20)$$

式(20)に翼面の境界条件

$$\bar{v}_s(x_k, 0, z_l) = q_{kl} \quad \dots\dots\dots (21)$$

q_{kl} : 第 (k, l) 要素標点の振動速度振幅

を用いると $I \times J$ 個の連立方程式が得られる。その他に以下のような境界条件を課す。

(1) 各パネルの z 方向境界で $\gamma_z^b(\xi, \zeta)$ が連続 (翼端と翼根を除く)

$$\gamma_{zi, j-1}^b(\zeta_j) = \gamma_{zij}^b(\zeta_j); 2 \leq j \leq J \quad \dots\dots\dots (22)$$

(2) 同様に1階微分 $\partial \gamma_z^b(\xi, \zeta) / \partial \zeta$ が連続

$$\frac{\partial \gamma_{zi, j-1}^b(\zeta_j)}{\partial \zeta} = \frac{\partial \gamma_{zij}^b(\zeta_j)}{\partial \zeta}; 2 \leq j \leq J \quad \dots\dots\dots (23)$$

(3) 翼根(壁面)で γ_z^b の ξ 微分が零 [2.1 節の条件(iii)]

$$\frac{\partial \gamma_{zi}^b(0)}{\partial \xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

(4) 翼端で $\gamma_z^b = 0$ [2.1 節の条件(iv)]

$$\gamma_{zi}^b(h_T) = 0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

以上の条件で $2 \cdot I \times J$ 個の連立方程式が得られ、式(21)と合わせて $3 \cdot I \times J$ 個の閉じた連立方程式系が得られる。

各要素の格子渦が決定されれば式(15)から各翼幅位置における非定常空気が算出される。式(15)の積分は各格子内で核関数が一定とし、数値的に行った。

なお、無次元化に際しては速度の基準として一様流速 U , x 方向の長さの基準として翼弦長 c , z 方向の長さの基準として平行壁間距離 h を用いた。以下では無次元振動数を k と表示する。パネル分割数は翼弦方向に 6, 翼幅方向に 4 で、いずれも等分割である。

4. 結果および考察

4.1 予備計算 作成したプログラムで既存の計算と同一のケースを計算し、結果を比較した。図4は翼端間げき δ が零で翼の振動速度が一様という二次元のケースを計算し、Whitehead の計算結果⁽⁹⁾と比較したもので、両者は完全に一致する。

4.2 実験結果との比較 (二次元および δ が大きい場合) まず実験と同一条件で $\delta=0$ (二次元) および 5 mm の計算を行い、結果を比較した。翼幅は 180 mm, アスペクト比は 3 である ($\delta=0$ のとき)。計算の結果を図5に、実験の結果を図6に示す。各図は非定常空気力係数の実部 C_r と虚部 C_i の翼幅方向分布を示しており、実線が $\delta=0$ mm, 破線が $\delta=5$ mm の結果である。隣接翼間位相差 τ をパラメータにとってある。計算では翼端間げきがあると翼端で循環が零という境界条件を課すので、図5のように C_r も C_i も常に零となっている。 $\delta=5$ mm の場合、例えば $\tau=180^\circ$ では δ による空気の差が翼端近傍のみならず、翼幅中心を越える辺りにまで生じているが、これは図6の実験結果とよく一致している。また τ による変化を見ると、 $\tau=0^\circ$ では δ による差が小さく、 C_r は $\tau=180^\circ$, C_i は 270° で δ による差が大きい。これも実験と一致した傾向である。以上から計算結果は定性的には実験結果をよく表現し得ている。

次に量的な比較を行うため、 $\delta=0$ mm の二次元の計算結果を、実験結果に重ねて図6にプロットした。実験値は主流動圧と翼弦長で無次元化するとともに振幅に関する規格化を行っており、計算値の $4q/U$ 倍に

対応する。一点鎖線が計算値で、実験結果の実線 ($\delta=0.1$ mm) と比較する。図6からわかるように C_r は実験と計算とでほぼ合っている。一方 C_i は、 τ による変化の傾向は類似しているが値はかなり違っており、実験値のほうが大きく出ている。

このような C_i の不一致の原因としてまず考えられるのは、実験で測定翼を3枚に限ったことによる誤差である。第1報で述べたように、実験では9枚の翼列翼のうち中央の翼1枚を加振し、この翼とその両隣の翼の計3枚で圧力を測定し、それらを合成して全翼振動時の非定常空気を推定した。しかし食違い角の大きな翼列の場合に良好な推定精度を得るには、必要な測定翼の枚数は多くなる⁽¹⁰⁾。本研究では食違い角が 45° と大きいため、3枚の計測翼では不足している可能性がある。そこで中央加振翼から数えて背側の2枚

図4 非定常空気力 (既存結果⁽⁹⁾との比較)

図5 非定常空気力翼幅方向分布

図6 非定常空気力翼幅方向分布(実験および理論)
(図5と同じ条件)

めと3枚め、腹側の2枚めの静止翼でも圧力を測定してみた。その結果 C_r は振動翼から離れるとすぐに減衰するが、 C_i はほとんど減衰しないことがわかった。9枚の直線翼列の端から2枚めの翼でも減衰していないので、推定精度はこれ以上よくならない。したがって C_i が理論と実験とで一致しない理由の一部は、この実験精度の限界にあると思われる。

次に単独翼の場合について実験値と理論値とを比較してみる。理論の方はピッチコード比 s/c を無限大にすれば単独翼の場合に漸近する。実際の計算においては $s/c=20$ 程度で翼列効果が無視できるようになる。単独翼の実験と同じ条件で行った二次元計算の結果を実験結果に重ねてプロットし、図7に示す。単独翼でも C_r は実験値と理論値がほぼ一致するのに C_i は一致せず、実験値のほうが理論値の2倍程度の大きい値を示している。 C_i には付加質量に比例する成分や後流渦による成分が含まれている。このうち付加質量に比例する成分については、実験値とポテンシャル理論値が一致しないということが、静止流体中で振動する物体に働く流体反力に関する研究から知られている⁽¹³⁾。ここでもこのような要因の関与している可能性が考えられる。

以上、実験値と理論値を比較した結果、空力減衰力は両者でよく一致するが、減衰力より 90° 位相が進んだ成分はあまり合わないことがわかった。

4.3 翼端間げきによる非定常空力の変化 翼端間げき δ を5mmから4, 3, 2, 1mmと小さくして計算を行い、実験結果に追従するような結果が得られるかを調べた。結果を図8に示す。 δ 以外の計算条件は図5の場合と同じである。図8を見ると、 δ を1mmまで変えて行っても非定常空力分布はほとんど変化しない。翼端で空力が零という条件だけでこの分布曲線の形状は決定してしまい、 δ の変化はその条件を課す境界の位置が変化することにしか影響していない。一方実験結果では δ が3mmくらいまでは空力の分布曲線が連続的に変化し、3mmより大きいとほとんど変化しなかった。また δ が0.1mmから1mmまでの間の変化が最大で、1mmから2mm, 2mmから3mmと次第に変化が小さくなっていった。この様子は図7の実験結果に現れており、翼列の場合でもこの傾向は同じである。したがって計算と実験を比較すると、 δ が大きい場合に両者の結果は一致するが、小さい δ の範囲では合わないということがわかった。

これは1章で述べたように、翼端間げきを考慮した定常揚力線理論にも見られたことである。そこで、本解析でも文献(3)と同様の考え方に立ち、すき間が小

さい場合には有限な非定常循環が翼端に保持されるという条件を導入する。

単独翼の状態では翼端側の壁面境界層を排除し、種々の δ について C_r, C_i の翼幅方向分布を測定した結果(第1報の図17)を用い、翼端における「非定常循環保持率」を次のように算出した。まず各々の δ におけるデータを翼端方向に外挿し、翼端位置での C_r, C_i を推定する。次に $\delta=0.1$ mm のデータはほぼ二次元的であるとみなせるので、これを基準値 C_r^*, C_i^* とし、各 δ における翼端の C_r, C_i を無次元化して非定常循環保持率とした。結果を図9に示す。二次元計算で得られた翼弦方向各格子における束縛渦値の実数部に C_r の保持率を乗じ、虚数部に C_i の保持率を乗じてそれぞれを翼端における境界条件として課した。実数部、

図7 非定常空力翼幅方向分布 (単独翼)
(実験と理論との比較, $k=0.27$)

図8 非定常空力分布の δ による変化
($\tau=180^\circ$, その他の条件は図5と同じ)

図9 翼端における非定常循環保持率

虚数部を別々に与えているので、非定常循環の振幅、位相の双方を与えたことになる。

計算の結果を図10に示す。 δ を零(二次元), 1, 2, 3, 4, 5 mmと変化させて計算した。実験の結果と比較すると、今度は δ が3 mm程度より小さい範囲で実験値をよく表現している。しかしこれより大きい δ の領域では、図8の翼端で循環を零としたときのほうが実験とよく合っている。これは図9の循環保持率が $\delta=5$ mmでも約40%という大きなものになっているのに対し、実際にはこの程度まで δ が大きくなると、翼端の循環がほとんどなくなっているためと思われる。実験では真の翼端位置の圧力は測定し得ず、いかに外挿をしたといっても翼端付近での循環の急激な変化は表現し得ていないのであろう。

以上のことから δ が翼幅の1.7% (本研究では3 mm) 程度より大きい場合には、翼端で非定常循環を零とするポテンシャル理論モデルで実験結果が表されることがわかった。またこれよりも δ が小さい場合には粘性効果が強くなり、同じモデルでは実験と合致しないが、翼端で有限な非定常循環が保持されるというモデルを用い、保持量を実験結果から推定することによって、よく実験結果を表現できた。

4.4 無次元振動数の影響 非定常空力に対して、無次元振動数 k は重要な影響を及ぼす因子である。これを種々変化させたケースを計算し、非定常空力の変化の様子を調べた。

図11は二次元の計算結果で、 C_r , C_i を k に対してプロットしたものである。翼間位相差 τ は 0° , 90° , 180° , 270° とした。本論文で扱っている定常負荷がない場合には、図のようにすべての k について C_r は安定側である。この範囲の k の中からいくつかを選び、 $\delta=5$ mmの場合の計算を行って二次元の場合と比較した。 $k=0.05$ の結果を図12に、 $k=1.0$ の結果を図13に示す。翼端の循環は零とおいた。この結果から、 k を変化させても本質的な傾向の変化はなく、非定常空力の分布は δ の変化に対して $k=0.27$ の場合と同様の变化を示すことがわかる。

5. 結 論

翼端間げきを有する振動翼列の非定常特性を三次元的に把握するための基礎的研究として、前報の実験に続き振動する直線平板翼列に働く空気を理論解析によって調べた。計算はポテンシャル理論に基づく渦格子法を用いて行い、種々の大きさの翼端間げきについて、定常負荷が働かない場合の非定常空力の性質を明らかにした。主な結論は次のようにまとめられる。

(1) 翼端間げきが翼幅の1.7%程度より大きい範囲では、ポテンシャル理論により実験で得られた翼端間げきの影響が定性的によく表現される。

(2) このように大きな翼端間げきにおいては、空力減衰力は定量的にも理論と実験とでよく一致する。しかし空力減衰力より位相が 90° 進んだ成分はあまりよく合わない。

(3) 翼端間げきが翼幅の1.7%程度より小さいと理論値が実験と合わなくなる。この場合には翼端の非定常循環が零にならないというモデルを用い、翼端の循環量を実験結果から推定して境界条件に使うと、実

図10 非定常空力分布の δ による変化
(翼端に有限な非定常循環を保持させた場合)

図11 非定常空力の k による変化

図12 非定常空力翼幅方向分布
($k=0.05$, その他の条件は図5と同じ)

図13 非定常空力翼幅方向分布 ($k=1.0$)

験と一致する空力減衰力分布が得られる。しかし翼端の循環量を理論的に定めることはできない。

(4) 無次元振動数を0.05から1.0の間で変化させても、翼端間げきが非定常空気に及ぼす影響は本質的に同じである。したがって第1報で得られた定常負荷がない場合についての知見は、広範囲の無次元振動数について当てはまる。

付録1. γ_x と γ_z との関係⁽¹⁴⁾

翼面および後流面はポテンシャルの不連続面である。この面上側の擾乱速度ポテンシャルを ϕ_U 、下側のそれを ϕ_L とおく。また上側の擾乱速度の x, z 方向成分をそれぞれ u_U, w_U 、下側のそれらを u_L, w_L とおく。渦と擾乱速度との関係は $\gamma_z = u_U - u_L$, $\gamma_x = w_U - w_L$ と表される。したがって

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma_z}{\partial \xi} &= \frac{\partial(u_U - u_L)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \phi_U}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi_L}{\partial \xi} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \phi_U}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi_L}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial(w_U - w_L)}{\partial \xi} = \frac{\partial \gamma_x}{\partial \xi}\end{aligned}$$

と式(10)が導かれる。

付録2. 影響係数とその積分

式(19)の積分を計算するにあたり、核関数に含まれる影響係数は式(4)~(7)に示した形のままで収束が遅いので、まずこれらを急速に収束する指数関数の級数和に変換する。鏡像からの寄与を表す n に関する級数和は、ポアソンの和公式を用いて指数関数の級数和と第2種変形ベッセル関数の級数和に変換される。さらに翼列効果を表す m に関する級数和に対し、変形ベッセル関数のフーリエ変換とポアソンの和公式を用いると、すべての級数を指数関数の級数和に変換することができる⁽¹⁵⁾。以下に結果を記す。

$$\begin{aligned}E_1 + E_2 &= \frac{e^{-ip\delta}}{hw} [(-i \sin \theta + \operatorname{sgn}(\eta) \cos \theta) \\ &\times \sum_{l=0}^{\infty} \exp\{-(l+\delta)\eta_a - ilp\} + (i \sin \theta \\ &+ \operatorname{sgn}(\eta) \cos \theta) \sum_{l=1}^{\infty} \exp\{-(l-\delta)\eta_a \\ &+ ilp\}] + \frac{\pi}{h^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \left(\cos \frac{\nu\pi|z_1|}{h} + \cos \frac{\nu\pi|z_2|}{h} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\times \frac{e^{-ip\delta}}{\tilde{w}} \{ \operatorname{sgn}(\eta) \cos \theta \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \exp(i\mu p) \\ &\times \exp(-\eta_a \sqrt{(\delta-\mu)^2 + \tilde{w}^2}) - i \sin \theta \\ &\times \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{(\delta-\mu) \exp(i\mu p - \eta_a \sqrt{(\delta-\mu)^2 + \tilde{w}^2})}{\sqrt{(\delta-\mu)^2 + \tilde{w}^2}} \}\end{aligned}$$

ただし、 $p = -2\pi\{(x-\xi)\sin\theta + y\cos\theta\}/s$, $\eta = 2\pi\{(x-\xi)\cos\theta - y\sin\theta\}/s$, $\eta_a = |\eta|$, $w = s/2\pi$, $\tilde{w} = \nu\pi w/h$, $\delta = \tau/2\pi$, $z_1 = -z + \zeta$, $z_2 = -z - \zeta$ なる変数変換を行った。同様に

$$\begin{aligned}E_3 - E_4 &= -\frac{\pi}{h^2} e^{-ip\delta} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \nu \left(\sin \frac{\nu\pi z_1}{h} \right. \right. \\ &\left. \left. - \sin \frac{\nu\pi z_2}{h} \right) \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\mu p - \eta_a \sqrt{(\delta-\mu)^2 + \tilde{w}^2})}{\sqrt{(\delta-\mu)^2 + \tilde{w}^2}} \right\}\end{aligned}$$

また、式(19)に現れる積分の中で、 $\int_{\varepsilon\nu}^{\infty} d\xi$ という積分には $\xi\nu < x_k$ の時、 $1/x$ の特異性が含まれる。これは標点よりも上流から放出された渦が標点を通るときに、核関数が特異となるためである。このときは、まず積分区間を次のように二つに分割する。

$$\int_{\varepsilon\nu}^{\infty} d\xi = \int_{\varepsilon\nu}^{x_k+\varepsilon} d\xi + \int_{x_k+\varepsilon}^{\infty} d\xi \quad (0 < \varepsilon \ll 1)$$

上式の右辺第2項は特異性を持たない。第1項は特異核の部分であらかじめ差し引いて積分を行い、引いた分を後から加えておくという操作を行って特異性を回避する⁽¹⁰⁾。

文 献

- (1) 渡辺・梶, 機論, 53-495, B (昭62), 3158.
- (2) 大塚・ほか3名, 機論, 32-243 (昭41), 1691.
- (3) 西山・高木, 機論, 35-273 (昭44), 1003.
- (4) 難波, 機論, 42-360 (昭51), 2431.
- (5) 西山・小林, 機論, 43-370 (昭52), 2175, 2188.
- (6) 梶・ほか2名, 機論, 47-419, B (昭56), 1177.
- (7) Söhngen, H., Z. AMP, 4 (1953), 267.
- (8) Shioiri, J., Bull. of the Government Mechanical Laboratory, Tokyo, Japan No. 3 (1954).
- (9) Whitehead, D. S., ARC R&M 3254, (1960).
- (10) 花村・田中, 機論, 32-244 (昭41), 1823.
- (11) Hedman, S. G., The Aeronautical Research Institute of Sweden, Rept. 105 (1966).
- (12) Albano, E. and Rodden, W. P., AIAA J., 7-2 (1969), 279.
- (13) 大橋・梶, 機誌, 82-728 (昭54), 702.
- (14) Bisplinghoff, R. L., ほか2名, Aeroelasticity, Addison-Wesley, (1955).
- (15) 梶・岡崎, 機論, 35-273 (昭44), 1008.