有限ピッチアクチュエータダクト法による
軸流動翼の三次元逆問題の解法*三宅 裕^{*1}, 板東 潔^{*1}, 黒河通広^{*2}A Three-Dimensional Inverse Calculation of an Axial-Flow Rotor
by the Finite-Pitch Actuator Duct Method

Yutaka MIYAKE, Kiyoshi BANDO, and Michihiro KUROKAWA

A fully three-dimensional inverse solution to the axial-flow rotor of a constant hub to tip ratio by means of the finite-pitch actuator duct method for inviscid and incompressible flow is presented. The blade is expressed by a vortex sheet and a source sheet superposed on the mean surface, and the blade shape is determined to satisfy the specified thickness and loading distributions for free-vortex type flow. Two-dimensional numerical calculations are performed by modifying the present method in order to show the difference between the blade shape obtained by the two-dimensional inverse method and that obtained by the three-dimensional inverse method. Three-dimensional numerical calculations show the influences of the stacking position and the blade spanwise pressure distributions. The direct solutions for the designed two-dimensional and three-dimensional rotors are calculated in order to examine the numerical accuracy of the present inverse calculation.

Key Words: Fluid Machine, Axial Impeller, Three-Dimensional Inverse Method, Finite-Pitch Actuator Duct Method

1. ま え が き

ポンプやコンプレッサ、タービンなどターボ形流体機械において、最適な速度あるいは圧力分布を得るような羽根車を設計することは、性能の改善に対して極めて重要な課題である。羽根形状の決定のために通常用いられる方法は、仮定した形状に対する流れ解析を所望の速度分布が得られるまで反復するという方法である。この場合解析法としては完全三次元解析法が精度的に最良であるが、計算時間、容量は多大となり実用的ではない。そこで速度分布を満足する羽根形状を三次元的に計算できれば非常に有益である。この逆問題に対する解法として準三次元解法^{(1)~(5)}、および揚力面理論^{(6)~(8)}がある。準三次元解法は三次元流れをハブ、シュラウド間流れと翼間流れの組合せによって表す解法である。揚力面理論は、完全三次元解法であるが、軸流羽根車内の微小じょう乱流れしか扱えない。

最近この揚力面理論を発展させ、有限の転向が扱える逆解法がHawthorneらによって発表された⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。この解法は環状流路内の翼列を完全三次元設計する方

法であるが、翼を面うずで置き換えているため薄翼しか扱えず、十分に実用的でない面がある。そこで本報では翼をその中心面上のうずと吹出しによって表し、Hawthorneらの理論を拡張適用して翼を完全三次元設計する方法を示す。計算に対する基本設定は文献(10)と同じであり、流れは非粘性、非圧縮性の定常流れであるとして、ハブ比一定の軸流羽根車の動翼形状を決定する。ただし翼厚は十分に薄いものとする。そして翼表面上速度は中心面上速度から近似計算によって求める。

負荷分布の与え方については、翼両面の速度を指定する方法⁽¹⁾⁽²⁾、圧力差と翼厚を指定する方法⁽³⁾⁽⁵⁾、旋回強さと翼厚を指定する方法⁽⁴⁾などがある。逆問題としては翼両面で指定を行うのが普通であるが、その速度分布により構造的に不適切な翼形状が得られる場合があるので⁽²⁾、本計算では翼厚分布は与えるものとする。負荷分布については翼幅方向にヘッドを一定とし、ある一つの半径位置の翼素について圧力差の分布を与える。したがって他の任意の半径位置での翼素の圧力差は指定することはできない。

計算例では、まず本解法を二次元翼列に適用し、その場合に得られる翼形を示す。そしてその翼列に対して、特異点法を用いて得られる順問題の解と比較して

* 昭和62年11月4日 第947回講演会において講演、原稿受付 昭和62年5月6日。

^{*1} 正員、大阪大学工学部 (〒565 吹田市山田丘2-1)。

^{*2} 准員、三洋電機(株) (〒573 枚方市走谷)。

本計算法の精度を調べる。次に本解法による三次元翼形の設計例を示し、二次元設計との差、Stacking position の影響、翼幅方向の翼面圧力分布について述べる。ただし Stacking position とは翼のひねりの中心で、各半径位置での翼素を半径方向に積み重ねて三次元翼とするときの積重ねの位置である。また設計翼列に対してパネル法を適用して順問題を解き、翼面圧力分布について設計で得たそれと比較して解の精度を検討する。

2. 基礎関係式

環状流路内の非粘性、非圧縮性で翼中心面上にうず、吹出しのある流れは Clebsch の表示法を用いれば次のように表される⁽¹⁰⁾。

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}} + \mathbf{v} \quad (1)$$

$$\bar{\mathbf{V}} = \nabla \bar{\phi} + r \bar{\mathbf{V}}_\theta \nabla \alpha \quad (2)$$

$$\mathbf{v} = \nabla \phi - S(\alpha) \nabla r \bar{\mathbf{V}}_\theta \quad (3)$$

ここに $\bar{\mathbf{V}}$, $\mathbf{v}$ はそれぞれ周方向平均流および周期的変動流を示す。また $\bar{\phi}$, ϕ は一般化した速度ポテンシャル、 α は翼中心面を示す次の関数である。

$$\alpha = \theta - f(r, z) = m2\pi/B \quad (4)$$

上式で m は整数、 B は翼枚数である。式(3)の $S(\alpha)$ は次式で表される周期的のこぎり関数である。

$$S(\alpha) = 2Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inB\alpha}}{inB} \quad (5)$$

式(2), (3)より平均うず度 $\bar{\Gamma}$, 変動うず度 γ はそれぞれ次のようになる。

$$\bar{\Gamma} = \nabla r \bar{\mathbf{V}}_\theta \times \nabla \alpha \quad (6)$$

$$\gamma = \nabla r \bar{\mathbf{V}}_\theta \times \nabla S(\alpha) \quad (7)$$

流路内の平均吹出しの強さを $\bar{Q}$ とすると、変動吹出しの強さ q は

$$q = \bar{Q} \{ \delta_p(\alpha) - 1 \} = 2\bar{Q}Re \sum_{n=1}^{\infty} e^{inB\alpha} \quad (8)$$

となる。ここに δ_p は δ を Dirac のデルタ関数として次式で表される。

$$\delta_p(\alpha) = \frac{2\pi}{B} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - m2\pi/B) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imB\alpha} \quad (9)$$

式(2), (3)に $\nabla \cdot \bar{\mathbf{V}} = \bar{Q}$, $\nabla \cdot \mathbf{v} = q$ を適用すると次式が得られる。

$$\nabla^2 \bar{\phi} = -\nabla \cdot (r \bar{\mathbf{V}}_\theta \nabla \alpha) + \bar{Q} \quad (10)$$

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot [S(\alpha) \nabla r \bar{\mathbf{V}}_\theta] + q \quad (11)$$

式(10), (11)を次のように分解して表す。

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}_r + \bar{\phi}_\theta \quad (12)$$

$$\nabla^2 \bar{\phi}_r = -\nabla \cdot (r \bar{\mathbf{V}}_\theta \nabla \alpha) \quad (13)$$

$$\nabla^2 \bar{\phi}_\theta = \bar{Q} \quad (14)$$

$$\phi = \phi_r + \phi_q \quad (15)$$

$$\nabla^2 \phi_r = \nabla \cdot [S(\alpha) \nabla r \bar{\mathbf{V}}_\theta] \quad (16)$$

$$\nabla^2 \phi_q = q \quad (17)$$

いま予旋回はなく、フローパターンは $r \bar{\mathbf{V}}_\theta = r \bar{\mathbf{V}}_\theta(z)$ となる自由うず形とすれば、翼前方、後方で式(13), (16)の右辺は零となる。また翼前方、後方で式(14), (17)の右辺は零となる。

ここでは式(13)は解かず、それと等価な結果を導く次式を解く。

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial r^2} - \frac{\partial \bar{\psi}}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2} = -r(\bar{\Gamma} \cdot \mathbf{e}_\theta) \quad (18)$$

ただし $\bar{\psi}$ はストークスの流れ関数である。

式(14), (16)~(18)をハブ、シュラウド、無限上下流の境界条件および翼前縁、後縁における解の接続条件を満足するように解く。翼中心面上の条件は後に考慮するものとする。

翼前方、内部、後方をそれぞれ 1, 2, 3 として、計算領域の子午面形状を図 1 に示す。図 1 中の c はコード長、 h はハブ比、 ω は羽根車の回転角速度である。

式(18), (14), (16), (17)に対する解はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{cases} \bar{\psi}_1 \\ \bar{\psi}_2 \\ \bar{\psi}_3 \end{cases} = \frac{r^2}{2} \bar{V}_{z-\infty} + \sum_{p=1}^{\infty} r R_p(r) \begin{cases} Z_p(0) e^{\lambda_p z} \\ Z_p(z) \\ Z_p(c) e^{\lambda_p(c-z)} \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \bar{\phi}_{\theta 1} \\ \bar{\phi}_{\theta 2} \\ \bar{\phi}_{\theta 3} \end{cases} = \sum_{p=1}^{\infty} R_p(r) \begin{cases} K_p(0) e^{\lambda_p z} \\ K_p(z) \\ K_p(c) e^{\lambda_p(c-z)} \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \phi_{r1} \\ \phi_{r2} \\ \phi_{r3} \end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{inB\theta} R_{np}(r) \begin{cases} Z_{np}(0) e^{\lambda_{np} z} \\ Z_{np}(z) \\ Z_{np}(c) e^{\lambda_{np}(c-z)} \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \phi_{q1} \\ \phi_{q2} \\ \phi_{q3} \end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{inB\theta} R_{np}(r) \begin{cases} K_{np}(0) e^{\lambda_{np} z} \\ K_{np}(z) \\ K_{np}(c) e^{\lambda_{np}(c-z)} \end{cases} \quad (22)$$

ここに $\bar{V}_{z-\infty}$ は翼無限前方の軸方向一様速度である。上式右辺の中に用いられる関数のうち R_p , R_{np} , Z_p , Z_{np} は Hawthorne らが用いた関数⁽¹⁰⁾と同じである。

図 1 羽根車の子午面形状

ただしここでは $\bar{g}(z) = dr\bar{V}_0(z)/dz$ とおく。また K_p , K_{np} は次のようになる。

$$K_p(z) = \frac{-1}{2\lambda_p} \int_0^c e^{-\lambda_p|z-t|} \int_h^1 r R_p(r) \bar{Q}(r, t) dr dt \quad (23)$$

$$K_{np}(z) = \frac{-1}{\lambda_{np}} \int_0^c e^{-\lambda_{np}|z-t|} \int_h^1 r R_{np}(r) \times \bar{Q}(r, t) e^{-inBf(r, t)} dr dt \quad (24)$$

以上より絶対速度は次式により求められる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{r} \left(-e_r \frac{\partial}{\partial z} + e_z \frac{\partial}{\partial r} \right) \begin{Bmatrix} \bar{\psi}_1 \\ \bar{\psi}_2 \\ \bar{\psi}_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ r\bar{V}_0(z)/r \\ r\bar{V}_0(c)/r \end{Bmatrix} e_\theta \\ &+ \nabla \left\{ \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_{01} + \phi_{r1} + \phi_{q1} \\ \bar{\phi}_{02} + \phi_{r2} + \phi_{q2} \\ \bar{\phi}_{03} + \phi_{r3} + \phi_{q3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -S(\alpha)g(z)e_z \\ 0 \end{Bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

翼中心面上の速度 (V^*) を求めるときは, $\theta=f$, $S(0)=0$ とする必要がある。

翼中心面の圧力側, 負圧側の相対速度をそれぞれ W_{+0} , W_{-0} とすると, これらは翼中心面上の相対速度 ($W^* = V^* - \omega r e_\theta$) より次式で求められる。

$$W_{\pm 0} = W^* \pm \Delta V_r / 2 \pm \Delta V_\theta / 2 \quad (26)$$

$$\Delta V_r = 2\pi(\nabla r \bar{V}_0 \times \nabla \alpha) \times \nabla \alpha / B |\nabla \alpha|^2 \quad (27)$$

$$\Delta V_\theta = 2\pi \bar{Q} \nabla \alpha / B |\nabla \alpha|^2 \quad (28)$$

翼表面上の相対速度 ($W_{\pm K}$) は, 薄翼であるということから近似的に次式で求められる。

$$W_{\pm K} = \frac{\{W_{\pm 0} \pm 2\omega t_n(e_\pm \times n) \cdot e_\pm\} W_{\pm 0}}{\sqrt{1 + (dt_n/dl_\pm)^2}} \quad (29)$$

$$W_{\pm} = |W_{\pm}| = |W^* \pm \Delta V_r / 2| \quad (30)$$

$$e_\pm = W_{\pm} / |W_{\pm}| \quad (31)$$

$$n = \nabla \alpha / |\nabla \alpha| \quad (32)$$

ここに t_n は翼厚の半値, n は翼中心面に対する単位法線ベクトル, $l_\pm$ は $e_\pm$ 方向長さである。

翼表面上の圧力を $p_{\pm K}$ とすると, 回転座標系のベルヌーイ式および式(29), (30)より圧力差 $\Delta p = p_{+K} - p_{-K}$ は次式で表される。

$$\Delta p = \{(R_+ - R_-) [F]^2 \bar{g}^2 - 2(R_+ + R_-) W^* \cdot F \bar{g} + (T_- R_+ - T_+ R_-) \} \rho / 2 R_+ R_- \quad (33)$$

$$R_\pm = 1 + (dt_n/dl_\pm)^2 \quad (34)$$

$$T_\pm = W^{*2} + 4\omega t_n e_z \cdot (e_\pm \times n) \times \{\pm W_{\pm} + \omega t_n e_z \cdot (e_\pm \times n)\} \quad (35)$$

$$F = \frac{\pi}{B |\nabla \alpha|^2} \left[\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial z}, -\frac{\partial f}{r \partial z}, -\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \right] \quad (36)$$

ここに ρ は流体の密度である。

平均吹出しの強さ $\bar{Q}$ は, 薄翼であるということから次式で求められる。

$$\bar{Q} = \frac{B}{\pi r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (V_r^* t_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (V_z^* t_\theta) \right\} \quad (37)$$

ここに t_θ は翼の周方向厚みの半値であり, 次式より求められる。

$$t_\theta = t_n \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + r^2 \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2} \quad (38)$$

翼中心面形状関数 $f(r, z)$ は次の条件を満足する必要がある。

(1) 翼中心面上において $W^* \cdot n = 0$ すなわち

$$\bar{V}_{z-\infty} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{V_\theta^*}{r} - \omega - (V_z^* - \bar{V}_{z-\infty}) \frac{\partial f}{\partial z} - V_r^* \frac{\partial f}{\partial r} \quad (39)$$

(2) ハブ, シュラウド上で, 翼上のうず, 吹出しからの誘起速度を有限とするために

$$\frac{\partial f(h, z)}{\partial r} = \frac{\partial f(1, z)}{\partial r} = 0 \quad (40)$$

(3) Stacking position の指定を行う式

$$f(r, z_{st}) = 0, \quad z_{st} = \text{const.} \quad (41)$$

3. 計算手順

(1) 翼前方一様速度 $\bar{V}_{z-\infty}$, 翼枚数 B , 回転角速度 ω , ハブ比 h , 子午面内コード長 c , 翼厚分布 t_n , Stacking position z_{st} , 圧力差分布 Δp およびそれを与える半径 r_{dp} を指定する。ただし計算において長さはシュラウド半径, 速度は $\bar{V}_{z-\infty}$, 圧力は $\rho \bar{V}_{z-\infty}^2$ でそれぞれ無次元化した。

(r, z) 面内の翼部分 ($h \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq c$) を r 方向に M 行, z 方向に N 列をもつ直交格子に分割する。

まず $V^*, f, \bar{g}$ の初期値を与える。ここでは翼が無負荷となるように与えた。

(2) $\bar{Q}$ を次式におく。

$$\bar{Q} = \frac{2}{c} \sum_{m=0}^M \left(Q_{m0} \cot \frac{\zeta}{2} + \sum_{n=1}^{N-2} Q_{mn} \sin n\zeta \right) \cos m\eta \quad (42)$$

ただし ζ, η はそれぞれ次式で示される r, z の関数である。

$$z = \frac{c}{2} (1 - \cos \zeta), \quad 0 \leq \zeta \leq \pi \quad (43)$$

$$r = \frac{1-h}{2} (1 - \cos \eta) + h, \quad 0 \leq \eta \leq \pi \quad (44)$$

式(42)を式(37)に代入して得られる式を, $(M-1)(N-1)$ 個の面素内およびハブ, シュラウド上の $2(N-1)$ 個の線素内で積分すると $(M+1)(N-1)$ 個の Q_{mn} ($m=0, \dots, M; n=0, \dots, N-2$) に関する線形連立方程式が得られる。これを解き $\bar{Q}$ の分布を計算する。

(3) 翼前縁で無衝突, 翼後縁でクッタの条件を満足するように $\bar{g} = dr\bar{V}_0/dz$ を次式におく。

$$\bar{g} = \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{N-2} g_n \sin n\zeta \quad \dots\dots\dots (45)$$

このとき翼前縁、後縁において $\bar{g}=0$ となるが、同時にこれらの位置で $\Delta p=0$ と指定しておく必要がある。このように仮定すれば式(27)、(30)より $\Delta V_r=0$ すなわち $W_+=W_-$ となるので、式(33)の右辺第3項は翼前縁、後縁で零になることがわかる。

定まっている $f, \bar{g}$ および手順(2)で求めた $\bar{Q}$ を用いて $W^*, W_\pm$ を計算すると、式(33)は指定半径 r_{dp} において $\bar{g}$ に関する二次方程式となるので、この式を翼前縁、後縁を除く $N-2$ 個の格子点において解く。このとき式(45)より $g_n (n=1, \dots, N-2)$ に関する線形連立方程式が得られるので、これを解き新たな $\bar{g}$ の分布を計算する。そしてこの $\bar{g}$ を用いて、 f と $\bar{Q}$ は固定したまま $W^*, W_\pm$ より $\bar{g}$ を再計算する。この操作を $\bar{g}$ が十分収束するまで反復する。

(4) 式(40)の条件を満足するように f を次式におく。

$$f = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^N f_{mn} \cos \frac{m\pi(r-h)}{1-h} \cos n\zeta \quad \dots\dots\dots (46)$$

このとき次式が成り立つ。

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{\pi}{1-h} \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=0}^N m f_{mn} \sin \frac{m\pi(r-h)}{1-h} \cos n\zeta \quad \dots\dots\dots (47)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{2}{c} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_{mn}^{(1)} \cos \frac{m\pi(r-h)}{1-h} \cos n\zeta \quad \dots\dots\dots (48)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{m1} &= f_{m0}^{(1)} - \frac{1}{2} f_{m2}^{(1)} \\ f_{mn} &= \frac{1}{2n} (f_{m,n-1}^{(1)} - f_{m,n+1}^{(1)}); \quad n=2, \dots, N-2 \\ f_{mN} &= \frac{1}{2n} f_{m,n-1}^{(1)}; \quad n=N-1, N \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (49)$$

式(41)の条件は次式で表される。

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^N f_{mn} \cos \frac{m\pi(r-h)}{1-h} \cos n\zeta (z_{st}) = 0 \quad \dots\dots\dots (50)$$

定まっている $\partial f/\partial r, \partial f/\partial z$ と手順(3)で求めた V^* を用いて式(39)の右辺を求め、新たな $\partial f/\partial z$ を計算する。そして式(48)を MN 個の格子点に適用して得られる線形連立方程式の解 $f_{mn}^{(1)}$ と式(49)より f_{mn} ($m=0, \dots, M-1; n=1, \dots, N$) を求める。次に式(50)を $z=z_{st}$ に対応する格子列上の M 個の点に適用して得られる線形連立方程式の解より f_{m0} ($m=0, \dots, M-1$) を求める。これらの f_{mn} と式(46)より f の分布を計算する。

以上の手順(2)～(4)を f が十分収束するまで反復すれば翼中心面形状が求まる。そしてそれに翼厚を

付加すれば翼形が決定する。

なお式(42)の右辺第1項は、翼前縁に丸みをつけるためであり、丸みをつけないならこの項を取り除き、同時に格子の列数を1列少なくすれば、同様の手順により翼形が決定できる。

4. 二次元翼列に対する適用例

本解法は容易に二次元翼列に修正適用することができる。薄翼については文献(9)に示されており、その解法に翼厚を考慮するための吹出しを2章と同様な方法で加えればよい。

二次元翼列に対する計算に対し、設計条件を次のように与えた。翼列前方一様速度 $\bar{V}_{z=\infty}=1$ 、軸方向コード長 $c=0.2$ 、翼間ピッチ $s=2\pi r/B$ および周速 $u=\omega r$ は $B=7, \omega=\sqrt{3}$ から決まる値とする。圧力差分布 Δp は

$$\Delta p = 8z(c-z)/c^2 \quad \dots\dots\dots (51)$$

とした。翼厚分布は翼前縁に丸みがある場合とない場合について、最大翼厚 ($t_{n\text{MAX}}$) が $c=0.1$ の位置で、翼厚比 $\varepsilon=2t_{n\text{MAX}}/c$ が 0.02 と 0.06 となるように与えた。

計算によって得られた $r=0.4$ における翼形および翼表面上圧力分布を図2から図6に示す。図中の c_p は次式で定義する圧力係数である。

$$c_p = (p - p_{z=\infty})/\rho \bar{V}_{z=\infty}^2 \quad \dots\dots\dots (52)$$

図2は翼前縁に丸みをつけない場合、図3は丸みを

図2 翼形状 (2D, $r=0.4$)

図3 翼形状 (2D, $r=0.4$)

つけた場合である。図2で $\varepsilon=0.02, 0.06$ の翼形に対する圧力分布および図3の翼形($\varepsilon=0.06$)に対する圧力分布をそれぞれ図4~6の◇◆で示す。

一方得られた翼形に対して二次元特異点法を適用し、圧力分布を計算した結果を図4~6の実線で示す。実線はほぼ厳密と考えられる解である。両者の一致は良好であり、本解法を二次元翼列に適用した場合、精度の高い解が得られることがわかる。ただし本解法は薄翼に対する解法であるから、図4, 5から明らかなように、翼厚が大になると計算精度が低下する。

5. 三次元環状翼列に対する適用例

設計条件は次のように指定した。 $\bar{V}_{z-\infty}=1$, $B=7$, $\omega=\sqrt{3}$, $h=0.4$, $c=0.2$, $z_{st}=0$ または c , $r_{dp}=0.4$, Δp と t_n は二次元計算と同じ分布を与え、また t_n は z 方向のみの関数で $\varepsilon=0.06$ とした。

図4 翼表面上圧力分布 (2D, $\varepsilon=2\%$)

図5 翼表面上圧力分布 (2D, $\varepsilon=6\%$)

図6 翼表面上圧力分布 (2D, $\varepsilon=6\%$)

計算によって得られたハブおよびシュラウドにおける翼形と翼表面上圧力分布を図7から図12に示す。翼形を示す図7, 9中には、三次元計算と同一の設計条件に対し、4章の二次元解法を適用することによって得られた翼形を合わせて示す。ただし翼形は便宜上前縁を $\theta=0$ として描いている。圧力分布を示す図8, 10中には、本解法によって得られた三次元翼形に対してパネル法⁽¹¹⁾を適用し、圧力分布を計算した結果を合わせて示す。この圧力分布はほぼ厳密と考えられる解である。

図7, 8は Stacking position $z_{st}=c$ で翼厚分布の前縁に丸みがない場合、図9, 10は $z_{st}=c$ で前縁に丸みがある場合である。図7, 9より二次元計算と三次元計算によって得られる翼形はハブ側で大きな差が生じており、したがって三次元設計が不可欠であることがわかる。図8, 10より本解法とパネル法によって得られる圧力分布は、二次元計算の場合のようなよい一致を示していない。この原因については次のことが考えられる。固有値 λ_{np} を反復法によって求めるときに、 nB が大きくなると収束精度が悪くなること。 Z_{np} , K_{np} の被積分関数は nB が大きくなると激しく振動し、積分

(a) Shroud

(b) Hub

図7 翼形状

(a) Shroud

(b) Hub

図 8 翼表面上圧力分布 (3D)

(a) Shroud

(b) Hub

図 10 翼表面上圧力分布 (3D)

(a) Shroud

(b) Hub

図 9 翼形状

(a) Shroud

(b) Hub

図 11 翼形状 (3D)

値が精度よく求まらないこと。さらに式(19)から式(22)の無限級数の計算に打ち切り誤差が生じることである。一方二次元計算では、無限級数が一つの関数として表現可能であり⁽⁹⁾、したがってこれらの問題は生じない。

図 11, 12 は Stacking position の影響を示す図であ

り、 $z_{st}=0$ と $z_{st}=c$ の場合を比較している。なお翼前縁には丸みがある。これらの図より Stacking position の影響はハブ側で大きいことがわかる。Stacking は二次元翼では考慮することができず、したがって三次元設計の必要性が確認できる。

図 13 は以上三つの計算例に対する翼表面上の等圧

(a) Shroud

(b) Hub

図 12 翼表面上圧力分布 (3D)

圧力面

圧力面

圧力面

負圧面

負圧面

負圧面

(a)

(b)

(c)

図 13 翼表面上等圧力係数線 (3D)

(a)

(b)

(c)

図 14 翼表面上圧力分布 (3D)

力係数線である。図 13(a)は $z_{st}=c$ で前縁に丸みなし、図 13(b)は $z_{st}=c$ で前縁に丸みあり、図 13(c)は $z_{st}=0$ で前縁に丸みありの場合である。図 14(a)～(c)はそれぞれ図 13(a)～(c)に対応する翼表面上圧力分布で、ハブ、翼幅中央、シュラウドにおけるものを重ねて示す。ここではハブ面での圧力差分布のみを指定したが、図 13, 14 から明らかなように翼幅方向に圧力はほぼ一定になっている。このことは翼の軸方向長さとは翼幅方向に一定にしたことの結果である。

6. 結 言

翼厚を考慮した環状翼列を完全三次元設計するための逆問題の解法とその適用例を示した。適用例では、二次元設計法と三次元設計法を用いた場合の翼形の差、Stacking position の翼形に及ぼす影響、翼幅方向の圧力分布を示し、三次元設計の必要性を明らかにした。次に得られた翼形に対して三次元パネル法を適用して順問題を解き、翼表面上圧力分布を計算した。そ

の結果、設計時のそれと若干の差があり、数値計算の精度が十分でないなどの課題が残された。しかし本解法は実機の翼形を三次元設計することが可能な方法であり、実用的には有効であると考えられる。

文 献

- (1) 柏原, 機論, 38-310 (昭 47), 1394.
- (2) 村田・ほか 3 名, 機論, 48-429, B (昭 57), 844.
- (3) Novak, R. A. and Haymann-Haber, G., *Trans. ASME, J. Eng. Power*, 105-2 (1983), 231.
- (4) Zhao, X. I., Sun, C. I. and Wu, C. H., *Trans. ASME, J. Eng. Power*, 107-2 (1985), 293.
- (5) 古川・井上, ターボ機械, 15-3 (昭 62), 129.
- (6) Okurounmu, O. and McCune, J. E., *AIAA J.*, 12-10 (1974), 1363.
- (7) Namba, M., *ARC R&M*, No. 3740 (1972).
- (8) Homicz, G. F. and Lordi, J. A., *AIAA J.*, 19-4 (1981), 492.
- (9) Hawthorne, W. R., ほか 3 名, *Trans. ASME, J. Eng. Power*, 106-2 (1984), 346.
- (10) Tan, C. S., ほか 3 名, *Trans. ASME, J. Eng. Power*, 106-2 (1984), 354.
- (11) 三宅・ほか 3 名, 機論, 52-484, B (昭 61), 3993.