低レイノルズ数域における有限長円柱の液中落下抵抗*
(容器の平面側壁効果)立花 規良*¹, 藤田 克志*²Drag of Finite Length Circular Cylinder in Low Reynolds Number Region
(Effect of Plane Side-Walls)

Motoyoshi TACHIBANA and Katsushi FUJITA

The falling drag test of circular cylinders was carried out in a low Reynolds number region in order to study the effects of cylinder length and plane side-walls on the drag of cylinders. From the data analysis based on the dimensional analysis method, it is shown that the drag coefficient of finite length circular cylinders is expressed by an empirical formula composed of the Tachibana-Iemoto expression in two dimensional theory and the correlation function of three variables (L/D , H/D and B/H). In the useful region of our formula, the drag of cylinders increases with an increase of the ratio of length to diameter (L/D) and a decrease of plane side-wall variables (H/D and B/H).

Key Words: Drag Coefficient, Low Reynolds Number, Circular Cylinder, Length-Diameter Ratio, Plane Side-Walls

1. 緒 言

低レイノルズ数域における円柱まわりの流れと円柱の抵抗については、多くの成果が報告されているが、同じ領域における球の場合と比較すると、無限域における Stokes のパラドックスや円柱の長さ効果など、むずかしい問題点が含まれていることが見いだされる。Stalnaker-Hussey は、低レイノルズ数域における円柱抵抗について、無限域無限長円柱に関する Lamb の解をはじめとして、円柱の有限長効果や平行二平面側壁効果に関する諸理論結果を、小直径 ($D < 1 \text{ mm}$) の長円柱 ($L > 11 \text{ mm}$, $L/D > 20$) の落下抵抗の実験結果により検討し、各理論結果の有効域ないしは限界を明らかにしている⁽¹⁾。近年、立花・家元は、平行二平面間の中央をゆっくり移動する円柱まわりの二次元流れを解析し、Faxen の抵抗式⁽²⁾ の有効域を拡張した⁽³⁾。そこで、著者らは、Stalnaker-Hussey の実験結果を立花・家元の二次元理論で検討したが、円柱抵抗のレイノルズ数依存性が解明されていない、比較的短い円柱 ($L/D < 20$) のデータがない、など、実験の領域の不

十分さが明らかになった。

本研究では、円柱の抵抗への円柱の長さ効果や平面側壁効果を検討するために、諸変数の領域を設定し、低レイノルズ数域における液中落下抵抗実験を行い、実験結果を立花・家元の抵抗式と比較検討し、有限長円柱の有限流体域下の抵抗の算定式を作成する。

2. 実 験

2.1 円柱と液体 供試円柱は、2種類の合成樹脂 (アクリル Ac: 比重 1.18, デュラコン Du: 比重 1.40) から作成し、直径 D は 5~10 mm の 4 種類で、長さ L はそれぞれ、30~90 mm の 6 種類で、合計 48 本である。円柱の主要諸元を表 1 に示した。供試円柱の長径比 L/D は 3~18 である。

供試液体は、市販のシリコン油 (比重 0.98) で、動粘度 ν が、5, 10, 30 cm^2/s のもので、さらに混合により、適当な粘性のものを作成使用した。実験条件下の代表的な物性値を表 2 に示した。

2.2 装置と方法 図 1 のような形状の異なるアクリル製の長方形断面容器を、恒温水槽内に鉛直に設置し、供試液体を満たした。さらに、恒温水槽内に、供試液体を入れたウベローデ粘度計と供試液体と円柱を入れた容器をつり下げ、供試液体、円柱、粘度計が同

* 昭和 62 年 3 月 13 日 関西支部第 62 期定期総会講演会において講演、原稿受付 昭和 62 年 7 月 3 日。

^{*1} 正員、福井大学工学部 (〒910 福井市文京 3-9-1)。

^{*2} 准員、福井工業高等専門学校 (〒916 鯖江市下町町)。

じ温度に保たれるようにした。円柱は、中央部をピンセットではさみ、上方と側方からの目視により位置決めを行い、液面下 2 cm 程度のところから、静かに離し、落下させた。円柱の落下速度は、長方形断面容器の

高さの中央部分の 10~20 cm の標線間の通過時間を視覚とストップウォッチにより測定し、決定した。同一条件下の測定は原則として 4 回を行い、円柱の落下状態が不完全な場合の結果はデータから除外し、3~4

表 1 供試円柱の主要諸元

(a) アクリル円柱

Cylinder Name	Diameter D (cm)	Length L (cm)	Density ρ_c (g/cm ³)	$\frac{L}{D}$
Ac- 5-30	0.4969	3.010	1.180	6.058
Ac- 5-50	0.4970	5.000	1.182	10.06
Ac- 5-60	0.4976	6.018	1.185	12.09
Ac- 5-70	0.4887	7.010	1.185	14.34
Ac- 5-80	0.4906	8.008	1.169	16.32
Ac- 5-90	0.4964	9.000	1.176	18.13
Ac- 6-30	0.6058	3.010	1.181	4.969
Ac- 6-50	0.6071	4.990	1.187	8.219
Ac- 6-60	0.6307	6.000	1.185	9.513
Ac- 6-70	0.6306	7.000	1.187	11.10
Ac- 6-80	0.6080	8.023	1.176	13.20
Ac- 6-90	0.6279	8.997	1.190	14.33
Ac- 8-30	0.8158	3.007	1.180	3.686
Ac- 8-50	0.8178	5.006	1.179	6.121
Ac- 8-60	0.8233	6.003	1.185	7.291
Ac- 8-70	0.8262	7.022	1.189	8.499
Ac- 8-80	0.8172	7.993	1.193	9.781
Ac- 8-90	0.8258	9.000	1.182	10.90
Ac-10-30	1.0188	3.000	1.179	2.945
Ac-10-50	1.0275	5.000	1.190	4.866
Ac-10-60	1.0234	6.000	1.191	5.863
Ac-10-70	1.0210	6.970	1.195	6.827
Ac-10-80	1.0227	7.990	1.191	7.813
Ac-10-90	1.0237	8.993	1.189	8.785

(b) デュラコン円柱

Cylinder Name	Diameter D (cm)	Length L (cm)	Density ρ_c (g/cm ³)	$\frac{L}{D}$
Du- 5-30	0.5355	2.990	1.399	5.584
Du- 5-50	0.5374	5.007	1.391	9.317
Du- 5-60	0.5340	5.997	1.396	11.23
Du- 5-70	0.5344	7.000	1.402	13.10
Du- 5-80	0.5356	7.995	1.399	14.93
Du- 5-90	0.5344	8.995	1.396	16.83
Du- 6-30	0.5978	3.015	1.409	5.043
Du- 6-50	0.5978	5.023	1.409	8.402
Du- 6-60	0.5971	6.010	1.408	10.07
Du- 6-70	0.5975	7.010	1.408	11.73
Du- 6-80	0.5974	8.000	1.409	13.39
Du- 6-90	0.5976	9.005	1.409	15.07
Du- 8-30	0.8409	3.010	1.407	3.579
Du- 8-50	0.8404	4.992	1.407	5.940
Du- 8-60	0.8445	6.002	1.406	7.107
Du- 8-70	0.8434	7.000	1.413	8.300
Du- 8-80	0.8437	8.000	1.408	9.482
Du- 8-90	0.8422	9.005	1.407	10.69
Du-10-30	1.0284	2.997	1.404	2.914
Du-10-50	1.0305	5.002	1.408	4.854
Du-10-60	1.0280	6.010	1.408	5.846
Du-10-70	1.0285	7.013	1.409	6.819
Du-10-80	1.0285	8.018	1.408	7.796
Du-10-90	1.0305	9.010	1.408	8.743

表 2 供試液体の代表的物性値

Liquid Name	Density ρ_f (g/cm ³)	Kinematic viscosity ν (cm ² /s)	Temperature T (°C)
500 cSt	0.977	5.375	20.0
	0.974	4.790	25.0
800 cSt	0.981	8.201	15.0
	0.978	7.835	20.0
1000 cSt	0.974	9.858	25.0
1600 cSt	0.978	16.55	20.0
1700 cSt	0.982	17.78	15.0
2000 cSt	0.981	22.57	15.2
3000 cSt	0.976	31.58	20.0
	0.978	30.70	20.0
	0.974	27.02	25.0

Container Name	B (cm)	H (cm)	S (cm)	$\frac{B}{H}$
10 × 10	10.000	10.000	60.00	1.000
10 × 5	9.985	5.005	60.45	1.995
10 × 3	9.971	2.999	60.75	3.325
10 × 2	9.999	2.021	60.80	4.948

図 1 円柱の落下運動と長方形断面容器の諸元

回のデータの平均値を処理データとした。なお、計測時間データのばらつきは、普通平均値の1%以下で、異常に大きいものは、平均に際し除外した。供試容器の形状パラメータの縦横比 B/H は1~5で、平面側壁パラメータは2~20である。

2.3 抵抗係数 図1のような状態で、液体(粘度 μ , 密度 ρ_f)中を速度 U で落下する円柱(直径 D , 長さ L , 密度 ρ_c)の抵抗係数 C_d は

$$C_d = \frac{\frac{\pi}{4} D^2 L (\rho_c - \rho_f) g}{\frac{1}{2} \rho_f U^2 \cdot DL} = \frac{\pi}{2} \frac{Dg}{U^2} \frac{\rho_c - \rho_f}{\rho_f} \dots (1)$$

で計算される。この抵抗係数は、次元解析によれば

$$C_d = f\left(R_e, \frac{L}{D}, \frac{H}{D}, \frac{B}{H}\right), R_e = \frac{\rho_f U D}{\mu} \dots (2)$$

と関数表示される。これより、抵抗係数はレイノルズ数 Re 以外に、 L/D , H/D , B/H に依存することが推定される。そこで、これらの諸因子の抵抗係数への効果を、低レイノルズ数域 ($Re: 10^{-3} \sim 1$) における実験結果により検討することにする。

3. 実験結果と検討

3.1 抵抗係数 立花・家元の二次元理論によれば、平行二平面間の中央を移動する無限長円柱の抵抗係数 C_d は、ストークス近似下で $H/D \geq 1.5$ において

$$C_d Re = 8\pi \left[\ln \frac{H}{D} - 0.91527 + 1.70673 \left(\frac{D}{H} \right)^2 - 1.52300 \left(\frac{D}{H} \right)^4 + 1.22664 \left(\frac{D}{H} \right)^6 - 0.558339 \left(\frac{D}{H} \right)^8 \right]^{-1} \dots (3)$$

と表される⁽³⁾。そこで、実験結果より $C_d Re$ と Re の関係を図示した。その一例を図2に示した。このような図示から、 $Re < 1$ において $C_d Re$ は Re に独立で、式(2)は

$$C_d Re = f\left(\frac{L}{D}, \frac{H}{D}, \frac{B}{H}\right) \dots (4)$$

図2 円柱の抵抗係数 ($C_d Re \sim Re$)

と表されることがわかった。なお、式(3)は式(4)で $L/D \rightarrow \infty$, $B/H \rightarrow \infty$ に対応する。式(4)を検討すべく H/D と B/H を固定し、 L/D を変化させた場合の $C_d Re$ と Re の関係を図示した。その一例が図3で、図3中には式(3)の二次元理論の結果を一点鎖線で併記した。このような図示から、実験結果の二次元理論からの逸脱は3個のパラメータにより複雑に変化するが、 L/D についていえば、 L/D の減少とともに逸脱が増加する傾向が見いだされる。そこで、 $C_d Re$ の実験値 ($C_d Re$)_e と二次元理論値 ($C_d Re$)_t の比が、3個のパラメータにより、どのように変化するかを検討し、定式化を試行することにする。

3.2 抵抗係数の算定式 H/D と B/H を固定した場合の ($C_d Re$)_e / ($C_d Re$)_t と L/D の関係を図示した

図3 円柱の抵抗係数 (L/D の効果)

図4 ($(C_d Re)_e / (C_d Re)_t \sim L/D$)

一例が図4である。このように本実験域では、直線近似が可能である。すなわち、

$$\frac{(CaRe)_e}{(CaRe)_i} = A_0 + A_1 \frac{L}{D}, \quad A_0 = A_0\left(\frac{H}{D}, \frac{B}{H}\right),$$

$$A_1 = A_1\left(\frac{H}{D}, \frac{B}{H}\right) \dots\dots\dots (5)$$

式(5)の未定関数 A_0 と A_1 を最小二乗法により決定した。次に、 B/H を固定し、 A_0 と A_1 を H/D に対し図示した。その一例が図5である。このような図示から $A_1(I: 0, 1)$ は、

$$A_I = B_{I0} + B_{I1} \frac{H}{D} + B_{I2} \left(\frac{H}{D}\right)^2,$$

$$B_{IJ} = B_{IJ}\left(\frac{B}{H}\right), \quad (J: 0, 1, 2) \dots\dots\dots (6)$$

と近似でき、未定関数 B_{IJ} を最小二乗法により決定した。図5中の実線は、決定された B_{IJ} に基づくものである。さらに、 B_{IJ} と B/H の関係を図示したが、その一部を図6に示した。 B_{IJ} を

$$B_{IJ} = C_{IJ0} + C_{IJ1} \frac{B}{H} + C_{IJ2} \left(\frac{B}{H}\right)^2 \dots\dots\dots (7)$$

と近似し、未定係数 $C_{IJK}(K: 0, 1, 2)$ を最小二乗法により決定し、図6中に記入した。以上のような諸係数の決定から、式(5)は

(a) $A_0 \sim H/D$

(b) $A_1 \sim H/D$

図5 式(6)の未定関数 B_{IJ} の決定

$$\frac{(CaRe)_e}{(CaRe)_i} = 2.262 - 1.363 \frac{B}{H} + 0.151 2 \left(\frac{B}{H}\right)^2$$

$$+ \left\{ -0.232 5 + 0.237 1 \frac{B}{H} - 0.020 92 \left(\frac{B}{H}\right)^2 \right\} \cdot \frac{H}{D}$$

$$+ \left\{ 0.017 63 - 0.016 84 \frac{B}{H} + 0.001 350 \left(\frac{B}{H}\right)^2 \right\}$$

$$\times \left(\frac{H}{D}\right)^2 + \left[-0.111 3 + 0.184 5 \frac{B}{H} - 0.023 44 \right.$$

$$\times \left(\frac{B}{H}\right)^2 + \left\{ 0.033 42 - 0.044 49 \frac{B}{H} + 0.004 068 \right.$$

(a) $B_{00} \sim B/H$

(b) $B_{10} \sim B/H$

図6 式(7)の未定係数 C_{IJK} の決定

(a) $L/D \sim B/H$

(b) $H/D \sim B/H$

図7 算定式(9)の適用範囲

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{B}{H} \right)^2 \frac{H}{D} + \left\{ -0.002573 + 0.002435 \frac{B}{H} \right. \\ & \left. - 0.00005545 \left(\frac{B}{H} \right)^2 \right\} \left(\frac{H}{D} \right)^2 \frac{L}{D} \\ & = f_e \left(\frac{L}{D}, \frac{H}{D}, \frac{B}{H} \right) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

と定式化される。結局、円柱の抵抗係数は、立花・家元の二次元理論式(3)と実験相関関数(8)に基づく算定式

$$CaRe = (CaRe)_e \cdot f_e \left(\frac{L}{D}, \frac{H}{D}, \frac{B}{H} \right) \dots\dots\dots (9)$$

図8 算定式(9)の精度 $(CaRe)_e \sim (CaRe)_c$

により算定しうる。この算定式の適用範囲は、3個のパラメータに依存する。それを図示したのが、図7で図7中の縦線部分が有効域である。 $(CaRe)_e$ と式(9)による計算値 $(CaRe)_c$ の関係を図示したのが、図8である。図8中の実線は、 $(CaRe)_e = (CaRe)_c$ 、一点鎖線は、 $(CaRe)_e = (1 \pm 0.1) \times (CaRe)_c$ を表す。これより、

(b) H/D の効果

(a) L/D の効果

(c) B/H の効果

図9 円柱の抵抗係数 $(C_d \sim Re)$

算定式(9)は±10%の精度で、抵抗係数を予測しうるものであるのがわかる。さらに、 C_d と Re の関係への L/D , H/D , B/H の効果を、算定式(9)により計算し、例示したのが、図9である。図9中には、算定式(9)を実線(適用範囲を逸脱する場合は、一点鎖線)、対応する立花・家元の二次元理論式(3)を破線で示し、さらに、無限域における無限長円柱のLambの解

$$C_d = \frac{8\pi}{Re(2.002 - \ln Re)} \dots\dots\dots (10)$$

を併記した。これより、同一のレイノルズ数において(1)有限域における有限長円柱の抵抗係数は、無限域における無限長円柱の抵抗係数[Lambの解：式(10)]より、大きく、その程度は3個のパラメータに依存する、(2)有限域における有限長円柱の抵抗係数と立花・家元の二次元理論による無限長円柱の抵抗係数[式(3)]の相違は、 L/D の減少、 H/D の増加、 B/H の増加、とともに大きくなる、ことがわかる。

4. 結 言

長方形断面容器に入れられた粘性液体中を水平位置

を保ちながら落下する有限長円柱の抵抗を、低レイノルズ数域($Re < 1$)において観測し、抵抗係数とレイノルズ数の積 $C_d Re$ は一定で、その値は、円柱の長径比 L/D と容器の側壁や形状のパラメータ(H/D , B/H)に依存することを見いだした。さらに、二次元理論と次元解析に基づく抵抗係数の算定式を作成し、有限域における有限長円柱の抵抗は、一般に無限域における無限長円柱より大きく、 L/D の増加や H/D と B/H の減少とともに増大する、ことを明らかにした。

おわりに、実験に協力された黒川昭浩、高村誠三、村上嘉康、矢木浩一、青山慎一、田中 豊の諸氏に謝意を表します。

文 献

- (1) Stalnaker, J. F. and Hussey, R. G., *Phys. Fluids*, 22-4(1979), 603.
- (2) Faxen, O. H., *Proc. R. Swedish Inst. Eng. Res.*, No. 1 (1946), 87.
- (3) 立花・家元, ながれ, 4-1(昭60), 54.