球群の低レイノルズ数での運動*

(第2報, 中心線に沿って運動する等しい2球)

村岡 正 宏*¹, 熊谷 輝 雄*²

On the Motion of Spheres in a Fluid at Low Reynolds Numbers (2nd Report, Two Equal-Sized Spheres Moving along their Center Lines)

Masahiro MURAOKA and Teruo KUMAGAI

The velocities and drag forces experienced by two equal-sized spheres freely-falling along their line of centers are measured using the 'falling-sphere' technique at low Reynolds numbers. The width of the test tank with square cross-section used was 100 times as large as the diameter of the used sphere. The measurements, with an estimated uncertainty of $\pm 1.2\%$, show that the lower sphere experiences the Oseen drag and that the upper sphere experiences the Stokes drag, which is predicted by Stimson & Jeffery. The flow visualization using a naturally occurring phenomenon in glycerol illustrates the difference of the hydrodynamic drag force between the lower sphere and the upper sphere. The numerical calculations of Stimson-Jeffery's solution reveal in detail the occurrence of vortex flows within a closed separating region between the two spheres.

Key Words: Fluid Mechanics, Multiphase Flow, Cluster of Spheres, Two Equal Spheres, Hydrodynamic Drag, Flow Visualization

1. は じ め に

粘性流体中での等しい2球の低速運動は微粒子群を含む流体系の性質, たとえば混相流体の粘度や微粒子群の拡散速度などを求めようとする際の基礎となる重要な問題である⁽¹⁾。またトレーサを用いる流れの可視化の際のトレーサ群の挙動の問題とも密接に関係する。微粒子群の流体中での濃度が希薄な場合にはこの種の問題は従来ストークス近似の仮定の下に reflection method (以下「反映法」と訳す)を用いて扱われてきている場合が多い⁽²⁾。しかし最近単独球⁽³⁾⁽⁴⁾や単一気泡⁽⁵⁾の流体抵抗や周囲の流れが十分小さなレイノルズ数域でもストークス近似でよりもオゼン近似で記述すべきであることが明らかにされてきていることに注意すると, この種の問題にはさらに検討が必要であると考えられる。

本論文では2球問題の中で最も簡単な一つである2球の中心を結ぶ方向に運動する大きさと密度の等しい2球(以下等しい直列2球と呼ぶ)の低レイノルズ数で

の流体抵抗と周囲の流れの問題を対象とする。この問題に対する理論は主としてストークス近似の仮定の下に展開されてきており, Stimson-Jeffery による厳密解⁽⁶⁾(以下 S-J 解と略す)を初めとして以降も反映法を用いた多くの近似解が提案されてきている⁽⁷⁾⁽⁸⁾。これらの解はストークス近似の仮定の下に導かれているため当然であるが, 等しい直列2球の両者に作用する流体抵抗は等しくしたがって自由落下運動の際には2球は中心間距離を一定に保った状態で等速落下運動することを結論している。古典的な実験⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾はいずれもこの結論を支持していたが, Steinberger ら⁽¹¹⁾はストークス域と考えられていた十分小さなレイノルズ数でも静止流体中を自由落下する等しい直列2球の場合に, 2球の中心間距離は一定とならずに後続球が先行球に追いついていく接近運動をすることを報告している。しかし Steinberger らの実験は三つのレイノルズ数領域で行われただけであるうえ, 試験槽も試験球直径の36~45倍と小さく壁の影響が考えられるので, より大きな試験槽を用いたより広範囲の低レイノルズ数での流体抵抗の測定が必要であると考えられる。以上の研究は直列2球の流体抵抗の決定を目的にしたもので流れ場の視点からはほとんど検討されていないが, ストークス流れのはく離の問題と関連して Davis ら⁽¹²⁾が

* 昭和62年11月6日 第947回講演会において講演, 原稿受付 昭和62年4月23日。

*¹ 准員, 東京理科大学大学院。

*² 正員, 東京理科大学理工学部 (〒278 野田市山崎東亀山2641)。

表 1 実験条件

	Test tank	Fluid	Spheres
Exp. by Steinberger et al.	Cylindrical 0.288m dia.	Altavis oil ($\nu=5.39 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$)	Stainless steel 0.635 $\sim$ 0.795 cm Tungsten carbide 0.555 $\sim$ 0.714 cm
Present measurement of drag	Square cross-section 1.0 $\times$ 1.0 $\times$ 1.5m	Glycerol ($\nu=1.3 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$)	Stainless steel 0.600 $\sim$ 1.000 cm
Present flow visualization	0.275 $\times$ 0.275 $\times$ 1.0m		Teflon and nylon 0.600 cm

S-J 解を検討して等しい直列 2 球の中心間距離が球半径の 3.57 倍以下のときに 2 球間に閉じたはく離領域が形成されることを発見し, Taneda⁽¹³⁾が可視化して確認している。さらに O'Neill⁽¹⁴⁾はこのストークス流れを検討してはく離角を決定している。しかしこれらの研究は等しい直列 2 球間におけるはく離流れの形成に関するもので, 等しい直列 2 球周囲の流れ場に関してはほとんど検討されていない。

以上の事情を考慮して本研究ではまず球直径の 100 倍以上の大きな試験槽を用いて低レイノルズ数での等しい直列 2 球の落球実験を行い, 流体抵抗を求める。次いで流線可視化法⁽³⁾⁽¹⁵⁾により等しい直列 2 球周囲の流れを可視化するとともに Collins の方法⁽¹⁶⁾によりはく離域の流れを可視化する。なお, S-J 解に対しては高次の級数項も含めて詳細な数値計算を行う。

2. 記 号

- a : 球の半径
 - d : 球の直径
 - D : 球の流体抵抗
 - L : 等しい直列 2 球の中心間距離
 - Re : d, V を代表値とするレイノルズ数
 - V : 球の速度
 - W : 試験槽の直径または一辺の長さ
 - (x, y) : 軸対称球座標系
 - $\alpha = \cosh^{-1}(L/d)$
 - $\lambda = D/D_0$
 - μ : 流体の粘度
 - ν : 流体の動粘度
 - (ξ, η) : 軸対称双極座標系
 - ρ : 密度
 - ϕ : 軸対称流の流れ関数
- 添 字
- l : 先行球または下側球
 - u : 後続球または上側球
 - S : 単独球に対するストークス解
 - O : 単独球に対するオゼーン解
 - S-J: Stimson and Jeffery 解

3. 実験装置と方法

実験装置の概要を図 1 と図 2 に, 実験条件を表 1 に

図 1 抵抗測定実験装置

図 2 流れの可視化実験装置

示す。この種の落球実験では容器壁の影響が重要となる⁽¹⁷⁾ので, 等しい直列 2 球の自由落下運動と流体抵抗の測定のために一辺の長さ 1.0 m の正方形断面で深さ 1.5 m の試験槽を製作し, 周囲に恒温水槽を設け, 上部にはふたを設けて実験中流体の温度を一定に保つよう注意した。これらの液槽は鋼板で製作し, いずれも 3 側面に観測用の透明アクリル樹脂板の窓を設けている。試験流体としては精製グリセリン D を, 試験球としては真球度と密度のばらつきを考慮して軸受用鋼球を用いた。落球装置は水平に対して 45° 傾斜したアクリル板に 2 mm のピッチで直径 0.7 mm, 長さ 100 mm のピアノ線を張りつけた簡単な構造のもので, 同じピアノ線(ガイドライン)に沿って時間をおいて等しい 2 球を滑落させれば等しい直列 2 球の落球実験を, また水平方向一列に数個の球群を滑落させれば後述する流線可視化のための軌跡線群の準備を行うことができる。球をピアノ線上部で放置するとピアノ線に沿って球は回転せずに滑落していき端部からグリセリン中への自由落下運動に移行する。端部離脱後極めて短い時間で球が非回転の状態である一定の終端速度で自由落下

運動することは単独球の予備実験で確かめてある。また等しい直列2球の実験では直交する2側面からの写真撮影により2球が中心を結ぶ方向に落下していることを確認すると同時に落下した2球が底部で完全に重なることでも確認してある。等しい直列2球の落下運動の観察と流体抵抗の測定は運動に及ぼす上部自由表面と試験槽底部の影響を考慮して試験槽中央部の深さ0.5~1.0mの区間で行った。4・1節で述べるように等しい直列2球は低レイノルズ数でも接近運動するが、その接近運動は大変緩やかなため加速度は非常に小さく運動方程式中の加速度の項は最大でも重力の項の 5×10^{-4} 倍であったので、流体抵抗の算出には定常運動の「落球方式」⁽⁹⁾を用いることにした。球の流体抵抗を D 、単独球のクトークス抵抗を D_s 、レイノルズ数を Re とすると

$$\frac{D}{D_s} = \frac{1}{18} \frac{d^2(\rho_s - \rho_f)g}{\rho_s \nu V} \dots\dots\dots (1)$$

$$Re = Vd/\nu \dots\dots\dots (2)$$

であるから、各式に含まれる実験変数を測定すれば D/D_s と Re が求められる。ここに ρ_s と ρ_f はそれぞれ球と流体の密度である。実験変数の測定方法は第1報⁽³⁾と全く同様であるので、等しい直列2球のそれぞれの球の D/D_s と Re の測定値に含まれる不確かさはともに $\pm 1.2\%$ と見積もられる。

等しい直列2球周囲の流れの可視化にはグリセリンの吸湿性を利用した流線可視化法⁽³⁾⁽⁵⁾⁽¹⁵⁾を、2球間のはく離域の流れの可視化にはCollinsの方法⁽¹⁶⁾を用いた。図1の試験槽には透明窓を3側面にしか設けていなかったため直交する2方向からの可視化ができなかったので、4側面を透明アクリル樹脂板で製作した図2の試験槽を用いた。図2の試験槽は正方形断面で W/d は最小でも46であるが、図1と図2の試験槽での等しい直列2球の落下速度の違いが速度の測定値に含まれる不確かさ $\pm 1.0\%$ 以内であったこと、等しい直列2球近くの流線に及ぼす容器壁の影響は小さいと考えられることを考慮した。流れの可視化のためには2球間距離を一定にした等しい直列2球の自由落下運動を実現する必要があるが、前述した落球方法では等しい直列2球が緩やかであるとはいえ接近運動してしまうので適当でない。そこで下方に比重2.13のテフロン製、上方に比重1.09のナイロン製の等しい直径の2球を細い糸で結んで球間距離一定の等しい直列2球とした。糸の直径は最大でも球直径の約 $1/75$ で、球後方に形成される軌跡線の太さと球直径の比 $1/80$ ⁽³⁾と同程度であるので、糸の存在の流線に及ぼす影響は小さいものと考えられる。

4. 結果と考察

4・1 等しい直列2球の落下運動 等しい直列2球がグリセリン中を自由落下するときの運動の代表例を図3に示す。図3では2球は直径9.525mmのテフロン球で、落球時の平均 Re は約0.130である。0.069 $\leq Re \leq 0.627$ の本実験範囲では図3に示すように等しい直列2球は両者とも非回転状態で後続球が先頭球に緩やかに追いついていく接近運動をした。また2球間距離が小さくなるほど両者の落下速度が大きくなった。

4・2 等しい直列2球の流体抵抗 等しい直列2球の先行球と後続球に作用する流体抵抗を式(1)で求め、Steinbergerらの測定結果⁽¹¹⁾、S-J抵抗⁽⁶⁾と比較して図4に示す。等しい直列2球の落球実験では図3に示すように2球は緩やかに接近運動し落下速度も大きくなっていくため、 Re を一定にして L/d だけを変える実験あるいは L/d を一定にして Re だけを変える実験を行うことが困難である。そこで図4にはSteinbergerらと同様に先行球の Re の範囲を分けて測定値を整理して示してある。なおSteinbergerらの測定範囲は0.060 $\leq Re \leq 0.216$ である。S-J抵抗は

$$D_{s-J} = 6\pi\mu a V \lambda = D_s \lambda \dots\dots\dots (3)$$

で表され、等しい大きさの直列2球の場合

$$\cosh \alpha = L/d \dots\dots\dots (4)$$

として

$$\begin{aligned} \frac{D_{s-J}}{D_s} = \lambda = & \frac{4}{3} \sinh \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} \\ & \times \left\{ 1 - \frac{4 \sinh^2(n+1/2)\alpha - (2n+1)^2 \sinh^2 \alpha}{2 \sinh(2n+1)\alpha + (2n+1) \sinh 2\alpha} \right\} \\ & \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

で与えられる⁽⁶⁾。S-J解では等しい大きさの直列2球の受ける流体抵抗が先行球と後続球で同じになることに注意する。本実験による測定値は $Re \leq 0.134$ で

図3 等しい直列2球の落下運動

図4 等しい直列2球の流体抵抗

Steinberger らの測定結果と良好に一致している。本実験範囲では後続球の抵抗は S-J 抵抗とほぼ一致しているが、先行球の抵抗は S-J 抵抗よりも大きく S-J 抵抗からのずれは Re の増大とともに増していく。 D_l/D_s が Re とともに変化することは Steinberger らも指摘しているが、彼らは測定結果が Oseen の近似結果⁽¹⁸⁾

$$\frac{D_l}{D_s} = 1 - \frac{3}{4} \frac{d}{L} + \frac{3}{16} Re \quad \dots\dots\dots (6)$$

とは一致しないことを報告している。単独球の抵抗が低レイノルズ数域でオゼン抵抗で良好に記述される⁽³⁾⁽⁴⁾ことに注意すると、式(6)の代わりに

$$\frac{D_l}{D_s} = \frac{D_{S-J}}{D_s} \left\{ 1 + \frac{3}{16} Re \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

が考えられる。そこで D_l/D_s と D_u/D_s を Re の関数として整理し、式(6)、(7)と比較して図5に示す。 $L/d \geq 4.0$ では D_l/D_s の測定値が式(7)よりも若干大きめであるが、低 Re では D_l/D_s がオゼン形の抵抗〔式(7)〕で、 D_u/D_s がストークス形の S-J 抵抗〔式(5)〕で近似されると考えて良いようである。なお、参考のため図5には式(6)も示してある。

4.3 等しい直列2球周囲の流線 グリセリンの

図5 等しい直列2球の流体抵抗

吸湿性を採用した流線可視化法により可視化した等しい直列2球周囲の写真例を図6に示す。これらの写真は等しい直列2球が自由落下していくときの2球周囲の軌跡線を撮影したものであるが、既報⁽³⁾⁽¹⁵⁾で述べたように静止した等しい直列2球に対して写真の下側無限遠から一様流が上向きに流れるときの流線を表している。低レイノルズ数での可視化流線を模写し、 y 軸上で可視化流線と一致するS-J解流線と比較して図7に示す。単独球周囲のストークス流線の場合⁽⁴⁾と同様に等しい直列2球の場合もS-J解流線は上流側で外側にずれている。このずれは L/d の増大とともに顕著になっている。他方、後続球周囲では可視化流線とS-J解流線とのずれは認められない。これらのことは4・2節で述べた抵抗に関する結論を流れ場の視点から裏づけている。

4・4 はく離域近くの流れの可視化 等しい直列2球間のはく離域近くの流れを可視化した写真例を図8に示す。図6と同様に静止した2球に対して一様流が下側から流れるときの流線を表す。可視化流線を模写しS-J解流線と比較して図9に示す。Davisら⁽¹²⁾が指摘しているように等しい直列2球間には閉じたはく離が形成され、そのはく離域内には渦流が形成されている。しかし彼らの指摘とは異なり、十分小さいレイノルズ数でもはく離域内外の流れは上流側と下流側とで非対称となっておりオゼン形の流れの性質を示している。なお、はく離域の渦流が L/d によって変化していくようすは大変興味深いので、S-J解を詳細に数値計算した結果を参考のため図10に示す。

5. ま と め

低レイノルズ数での等しい直列2球の先頭球はオゼン形の抵抗〔式(7)〕をうけるのに対して、後続球はストークス形のS-J抵抗をうけることを球直径の100

$L/d = 1.55, Re = 0.056$

$L/d = 5.00, Re = 0.041$

図6 等しい直列2球周囲の流れの模様(写真)

図7 等しい直列2球周囲の流線

$L/d = 1.15, Re = 0.183$

$L/d = 1.24, Re = 0.175$

図8 はく離域内の流れの可視化(写真例)

図9 はく離域近くの流線

倍以上の大きな試験槽を用いた不確かさ $\pm 1.2\%$ の抵抗測定により明らかにするとともに、流れの可視化により流れ場の視点から裏づけた。

文 献

- (1) Batchelor, G. K., *J. Fluid Mech.*, 74-1 (1976), 1.
- (2) Happel, J. and Brenner, H., *Low Reynolds Number*

図10 S-J解の数値計算結果によるはく離域内の渦流のようす

Hydrodynamics, (1983), 235, Martinus Nijhoff Publishers.

- (3) 熊谷・藤原, 機論, 49-439, B (昭58), 628.
- (4) 熊谷・小林, 機論, 51-461, B (昭60), 74.
- (5) 熊谷, 機論, 52-474, B (昭61), 541.
- (6) Stimson, M. and Jeffery, G. B., *Proc. R. Soc., Ser. A*, 111 (1926), 110.
- (7) Hocking, L. M., *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 85 (1959), 44.
- (8) Kynch, G. J., *J. Fluid Mech.*, 5 (1959), 193.
- (9) Eveson, G. F., ほか2名, *Brit. J. Appl. Phys.*, 10 (1959), 43.
- (10) Happel, J. and Pfeffer, R., *AIChE J.*, 6 (1960), 129.
- (11) Steinberger, E. H., ほか2名, *J. Fluid Mech.*, 34-4 (1968), 809.
- (12) Davis, A. M. J., ほか3名, *J. Fluid Mech.*, 77-4 (1976), 625.
- (13) Taneda, S., *J. Phys. Soc. Jap.*, 46-6 (1979), 1935.
- (14) O'Neill, M. E., *J. Fluid Mech.*, 133 (1983), 427.
- (15) Kumagai, T., *Proc. SESA-JSME Joint Conf. Exp. Mech.*, Pt. II (1982), 837.
- (16) Collins, R., *J. Fluid Mech.*, 91-3 (1979), 493.
- (17) Happel, J. and Brenner, H., *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, (1983), 273, Martinus Nijhoff Publishers.
- (18) Oseen, C. W., *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*, (1927), 199, Akademische Verlag.

討 論

〔質問〕 奥田 教海〔室蘭工業大学〕

780 ページ左欄 9~11 行め, 可視化流線と理論流線 (この場合, このように呼ぶこととする) とは L/d の増大とともに外側にずれている, とある。単独球の場合も似た現象があるということである。私の経験でも他の物体, 例えば標準的 NACA 翼形の場合にも迎え角の増大とともに, 外側のずれが大きくなっていく。その理由について, この直列二球の場合についてでよいから, 理由の一, 二, 推定されることであればよかったら, お教え願いたい。

〔回答〕 単独球周囲の 0.4 以下の低レイノルズ数の流れの場合, レイノルズ数が大きくなるにつれて, 上流側無限遠で一致していたストークス流線, オゼーン流線と数値解流線のうちでオゼーン流線は数値解流線に近いのに対してストークス流線は上流側で数値解

流線の外側にずれていき, 数値解流線が可視化流線と一致していることはすでに報告した⁽⁴⁾。S-J 解は直列二球周囲の流れに対するストークスの式の解であるから, S-J 解流線が上流側で可視化流線の外側にずれていくのは単独球周囲の流線の場合と同様にストークス近似の性質の一つとして理解されよう。しかし, このずれが L/d の増大とともに顕著になる理由は Navier-Stokes の式の数値解を求めなければ説明できないので, 今後の課題と考えている。

他方, ご質問の NACA 翼形の周りの流れで迎え角の増大とともに外側のずれが大きくなる理由に関しては可視化の手法やレイノルズ数の影響などが考えられるが, 詳細が不明なので, ここでは言及するのを控えたい。