多重格子法による2点境界値問題の解析*

~Poisson方程式、部分放物形Navier-Stokes方程式への適用~

藤本 朗^{*1},飯田 誠^{*1}

Two-point Boundary-value Problems Applying Multi-grid Method

~Application to Poisson Equation and Partially Parabolized Navier-Stokes Equations~

Akira FUJIMOTO

Sei-ichi IIDA

An efficiency of a Multi-grid method solving two-point boundary value problem is tested. First, Poisson equation is solved by a point - and a line - SOR methods with and without the Multi-grid procedure. Work Unit, indicating iteration number, and CPU time are compared. The effect of the application of the Multi-grid procedure is remarkable; e.g. for the case of point SOR method with 192×192 grid points, the equation can be solved about thirty times faster than the usual single grid method. Second, the present method is applied to a Partially Parabolized Navier-Stokes (PPNS) equations solver. It is confirmed that the method effectively works without any difficulty caused by a non-linear effect of the equations. Finally, an effective Multi-grid PPNS solver is proposed.

Key words; Multi-grid Method, Two Point Boundary Value Problem, SOR Method, Poisson Equation, Partially Parabolized Navier-Stokes Equations,

1. 緒言

支配方程式が楕円形あるいは放物形の偏微分方程式で記述される問題を解く場合、その過程で2点境界値問題を取り扱う必要がある。この問題の差分解法には、反復計算(非線形反復は除く)を必要としない直接法と、それを必要とする反復法がある⁽¹⁾。最も代表的な反復解法は、SOR法(Successive Over Relaxation Method)である。この方法は、非粘性・非回転流れや熱伝導問題などの解析、さらには、Body Fit 座標系⁽²⁾の格子生成問題などによく使われる。また、アルゴリズムが簡単であるため多次元問題を扱う場合に有効で、完全なNavier-Stokes式(NS式)を用いた3次元非圧縮流れの解析にも使われる⁽³⁾。しかし、この方法は格子点数の増加とともに収束性が著しく悪化するという欠点を持つ。これは、各反復計算で修正される解には、局所的な影響しか反映されないためで

ある⁽⁴⁾。すなわち、格子点数が増加すると、両端の境界条件の影響を内点に伝えるのに多くの反復計算を必要とする。

ところで、境界層問題における近年の成果の一つは、はく離点や物体後縁などの特異点を含む流れ場の解析であろう。このような流れ場は、従来、完全なNS式でしか扱い得ないと考えられてきたが、近年、粘性・非粘性干渉法(I B L法: Interacting Boundary-Layer Method)⁽⁵⁾や三層構造モデル⁽⁶⁾など、簡略化した式を用いて解析が行われるようになった。さらに、基礎式として部分放物形Navier-Stokes式(PPNS式)を用いる方法も試みられている⁽⁷⁾。PPNS式を境界層方程式(B L式)と類似の前進解法で解く場合、主流方向(x方向)についての反復計算を必要とするが、この種の解法では、x方向の格子点数が増加すると(すなわち Δx が小さくなると)収束性が急速に悪化する欠点を持つ⁽¹⁰⁾。

上記のSOR法やPPNS式の前進解法の収束性を改善する一つの有効な方法として、多重格子法(MG法)⁽⁸⁾⁻⁽⁹⁾の適用がある。この方法は、細かい格子の上に2倍、4倍、8倍等の格子を重ね、反復計算時に

* 昭和62年3月7日 北海道支部第28期総会講演会において講演、原稿受付 昭和62年6月22日。

^{*1} 正員、北海道大学大学院 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)。

^{*2} 正員、北海道大学工学部。

内点で生じる残差を両端の境界へ素早く運んで減衰を速めるための粗い格子と、精度を保つための細かい格子を組合わせたものである⁽¹¹⁾。本研究の目的は、この多重格子法を2点境界値問題に適用してその有効性を確かめることにある。ここではMG法を、まず、工学上重要なPoisson方程式のSOR解法に適用し、次に、より複雑なPPNS式の前進解法に適用している。本研究では、著者らが提案する解法(BL式のBOX法を拡張したもの)に対して、汎用性の高いBrandtのFMG-FAS法(Full Multi-grid, Full Approximation Scheme)⁽⁶⁾の適用を試みている。

2. 多重格子法(MG法)

本研究で扱うBrandtのFMG-FAS法⁽⁶⁾を概説する。取扱う支配方程式を一般形式で表す。

$$L[\Phi(x, y)] = f(x, y) \quad \text{-----}(1)$$

L : 差分演算子、 Φ : 従属変数、 f : 既知関数

数段階の格子($G^1 \sim G^M$; 格子間隔比, $1:2$)を用意し、まず、最も粗い格子(G^1)上で緩和計算を行う。収束後、格子を一段階細かくしこの解を初期推定値に用いる。計算過程での最も細かい格子レベルを、CFGL(Currently Finest Grid Level)と言う。そして、CFGLを順次進め、最終的な最も細かい格子(G^M)上で収束解を得る。ただし、ある格子(G^k)上での緩和計算の収束が鈍った時、解を一段粗い格子に戻して($G^k \rightarrow G^{k-1}$)修正計算を行う。格子変換判定基準は次式を用いる。

$$e^k / \bar{e}^k > \alpha \quad \text{-----}(2)$$

e : 誤差、 $\bar{e}$: 前回の反復時の値、 α : 1 以下のある値
粗い格子上の修正計算では式(1)の f の代わりに次式を使う。

$$f^{k-1} = L^{k-1} [I_k^{k-1} \Phi^k] + I_k^{k-1} r^k \quad \text{---}(3)$$

ここに、 $r^k = f^k - L^k \Phi^k$: 残差
 I_k^{k-1} : $G^k \rightarrow G^{k-1}$ の変換

また、この計算の収束判定値は次式で決める。

$$\varepsilon^{k-1} = \beta \cdot e^k \quad \text{-----}(4)$$

β : 1 以下のある値

この修正計算が収束すると、再び解を細い格子に戻す($G^{k-1} \rightarrow G^k$)。次式を用いる。

$$\Phi_{\text{NEW}}^k = \Phi_{\text{OLD}}^k + I_{k-1}^k (\Phi^{k-1} - I_k^{k-1} \Phi_{\text{OLD}}^k) \quad \text{---}(5)$$

ここに、 $I_{k-1}^k: G^{k-1} \rightarrow G^k$ の変換(ex. 直線補間)

なお、CFGLレベルを一段進めて、格子 G^{CFGL+1} 上での初期推定値を得る場合、通常は高次の補間(本研究では、3次の多項式)を用いる⁽⁶⁾。また、MG法では全体の反復計算回数をWU(Work Unit)なる単位で数える。WU=1とは、最も細かい格子(G^M)上での1回の反復計算を行うのと等しい労力に相当する。

3. Poisson方程式への適用

モデルとするPoisson方程式を次に示す。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{---}(6)$$

ここに、

$$f(x, y) = 36x^2 + 30y^4 \quad \text{---}(7)$$

であり、これは厳密解: $\Phi = 3x^4 + y^5$ をもつ。 $f(x, y)$ を x^2 および y^4 の項で与えたのは、2次精度で差分化したときの打ち切り誤差を調べるためと、 y 方向の変化が x 方向のそれより大きい場合への適用を想定したためである。

離散化は通常の5点差分公式、計算領域は x, y 両方向とも $0 \sim 3$ とし、境界条件は数値境界条件を厳密解で与える。最も粗い格子(G^1)での初期推定値は各境界条件の直線補間値を用いる。単一格子の緩和計算には最適緩和係数 ω を使う⁽¹⁾。MG法では、 $\omega = 1$ とする。誤差 e は次式を用いる。

$$e = \sum_{i,j} |\Phi_{i,j} - \bar{\Phi}_{i,j}| \quad \text{---}(8)$$

i, j は各々 x および y 方向の格子点位置を示す。また、収束判定値は格子間隔の2乗とする。

3.1 点SOR法 格子は等間隔とし、格子点数は x, y 両方向とも同じで、 $I_M \times J_M$ は 6×6 から 192×192 の6種の場合の計算を行った。MG法においては、最も粗い格子(G^1)を 3×3 点とし、 6×6 点から 192×192 点はそれぞれ格子レベル2段($M=2$)から7段($M=7$)に対応する。図1・図2に、単一格子を用いた場合と多重格子法を適用した場合の反復計算回数(WU)および計算時間を示す。横軸は格子点数である。MG法のWUは、格子点数が増加してもほぼ一定値(WU=18.0)に留まるのに対し、単一格子を用いた通常のSOR法では、これが指数関数的に増加する。一方、実際の計算時間は格子点が少ない場合は、MG法のほうが遅い。これは、MG法では格子間の変換計算(式(3)、式(5)の計算)が必要な

図1. 点SOR法～反復計算回数

図2. 点SOR法～計算時間

図3. 線SOR法～反復計算回数

図4. 線SOR法～計算時間

ためである。しかし、格子点数が増加すると緩和計算に要する時間の比重が大きくなるため、MG法の利点が発揮される。この例では、総格子点数が約600点を越えるあたりで両者の関係は逆転し、 192×192 点のMG法の計算時間は単一格子の場合に比べて約 $1/30$ となる。

3.2 線SOR法 本研究で扱うPPNS式の解法は、基本的には線SOR法と類似である⁽¹²⁾。ここでは、MG法を線SOR法に適用しその諸特性を調べる。基礎式および計算条件は上記、点SOR法の場合と同じである。y方向には陰解法を適用し、得られる三重対角行列をThomas法によって一列ごとに解く。x方向は反復計算を行う。さらに、MG法はx方向のみに適用する(1次元多重格子法)。格子は等間隔の長方形格子を用い、y方向は $J_M = 192$ 、x方向は $I_M = 6$ から 192 の6種の場合の計算を行った。M

G法では、G'格子を 3×192 点とし、 $M=2$ の時 6×192 点... $M=7$ の時 192×192 点とした。図3・図4に結果を示す。MG法の反復回数は、前述の点SOR法の場合に比べて、やや多くなるものの格子点数の増加に伴い一定値に落ち着く($WU \approx 50$)。単一格子および多重格子法を適用した場合の計算時間の差は、格子点数の増加とともに大きくなる。しかし、格子点数が少ない場合は、この差はあまり出ない。最も細かい格子(192×192)では、MG法を適用すると、計算時間は約 $1/12$ となる。

なお、この例は上記、点SOR法の最も細かい格子の場合と全く同じ計算条件になる(○印)。点SOR法の場合と比べると、単一格子では、反復回数・計算時間ともほぼ同程度であるが、多重格子の下では明らかに前者(点SOR法と2次元多重格子法の組み合わせ)が優っている。従って、通常の楕円形の問題を解く場

合には、前者の方法が望ましいであろう。

4. PPNS式への適用

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - S = f_1 \quad \text{--(9a)}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f_2 \quad \text{--(9b)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + g = f_3 \quad \text{--(9c)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - q = f_4 \quad \text{--(9d)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} - g = f_5 \quad \text{--(9e)}$$

ここに、 S はIsraeliのわきだし項⁽¹²⁾である。

図5に計算格子および上式の差分中心位置を示す。式(9a)と(9b)の差分中心は x 方向に $\Delta x/2$ 移動させている。この格子を用いると、数値的に安定性の良い2次精度($O(\Delta^2)$)の方法が実現される。なお、この図には二つの格子レベル間の対応関係も示す。 y 方向の計算はBlock三重対角行列の5元連立方程式を解き、全体の反復計算は上流から下流へと進める。多重格子法は、線SOR法の場合と同様に、 x 方向のみに適用する。

さて、式(9)の右辺(f_N for $N=1\sim 5$)は、CFLGの時または単一格子を用いる時はゼロであって、それ以外では式(3)で与える。MG法では緩和係数を用いない($\omega=1$)ため、式(9a)以外は各 x 位置で厳密に解かれ、常に残差はゼロ($r_N=0$ for $N=2\sim 5$)である。また、図5の格子を用いた場合、式(3)の第一項は $N=3\sim 5$ に対してゼロとなり、結局 f_1 と f_2 のみが残る。

本研究では、テスト・ケースとして、平板に沿う流れを扱う(平板長=1.0)。勿論、この方法は前述の特異点を含む流れにも矛盾なく適用できる。流入条件は $x=0.3$ でBlasius解、および、 v と g の勾配はゼロ。流出条件は $x=0.8$ で圧力 p の勾配がゼロ。平

図5. PPNS式計算格子

板上では $u=v=0$ 。上方条件は $y_M \sqrt{Re}=10$ で、 $u=1$ 、圧力は一定。レイノルズ数は 10^5 とする。 y 方向は壁面で最も密な不等間隔格子を用い($J_M=100$)、 x 方向は等間隔とする。計算は、 $I_M=20\sim 320$ の間で5種類行った。これはMG法を適用した場合、 G^M ($M=2\sim 6$)に対応する($G^1: 10\times 100$ 点)。誤差の評価にはIsraeliのわきだし項⁽¹²⁾を使い、これが 10^{-4} になったとき計算を打ち切る(このとき $|p_{old}-p_{new}|_{max} \approx O(10^{-5})$ に達する)。

図6・図7に、単一格子を用いて緩和係数を1とした場合(Gauss-Seidel反復)および過緩和係数(ω_0)を用いた場合、さらに、MG法を適用した場合の反復回数および計算時間を示す。結果は、線SOR法の場合と定性的に一致する。ただし、PPNS式は非線形であるため、最適過緩和係数は前述の理論値⁽¹⁾が使えない。ここでは予備計算によってこれを決めた。しか

図6. PPNS式~反復計算回数

図7. PPNS式~計算時間

図8. PPNs式～収束状況(M=5)

し、格子点が多くなると、この予備計算に多大な時間を必要とする。従って、もっと実際の流れ場を解析する場合、単一格子では $\omega \neq 1$ と置かざるを得ないであろう。一方、MG法におけるパラメータ α 、 β は比較的短時間の予備計算で決定でき、基礎式を解くにあたって、非線形性に基づく困難さに出会うことはなかった。なお、単一格子・ $\omega = 1$ ・格子数 320×100 点の場合は、多大な計算時間(約2時間)を必要とすることが予測されたため、計算は実行しなかったが、MG法では約39秒であった。

図8は、格子数 160×100 点の場合の収束状況を示す。単一格子・ $\omega = 1$ の場合は最初、急激に誤差が減少するが、すぐに頭打ちになり、その後の収束は遅々としたものである。これは、誤差の変動が激しい時は収束率は大きい、一通りこれが減衰すると収束率は鈍るという⁽⁶⁾、Gauss-Seidel反復の特徴的な挙動を示すものである。最適な緩和係数(ω)選ぶと、この点がかなり改善される。MG法を用いると、収束性はさらに改善される。図9は、図8のMG法の場合の収束経路を示す。○印の中の数字はその格子レベルでの反復計算回数、◎印はCFGLでの収束を示す。MG法のパラメータ α 、 β を変えると、収束経路は変化するが、最終的な反復計算回数(WU)には余り影響を与えない。

5. 結 論

多重格子法(MG法)を、2点境界値問題に適用した場合の有効性を示した。検討事項および結果を要約すると次のようになる。

Grid Level	Δx	Work Unit per iteration
G ¹	5.0×10^{-2}	0.0625
G ²	2.5×10^{-2}	0.125
G ³	1.25×10^{-2}	0.25
G ⁴	6.25×10^{-3}	0.5
G ⁵	3.125×10^{-3}	1.0

図9. PPNs式～収束経路(M=5)

(1)最初にPoisson方程式のSOR解法にMG法を適用し、点SOR法・線SOR法のいずれの場合も著しく収束性が改善されることを確認した。(a)点SOR法では、格子点数が少ない場合、通常の単一格子を用いたほうが計算時間が少ない。しかし、格子点数の増加に伴いMG法のほうが有利になり、本研究で行った計算例では、総格子点数が約600点を越えると両者の関係は逆転した。(b)線SOR法では、比較的小さい格子点でもMG法の計算時間が単一格子のそれを越えることはなかった。

(2)次に、PPNs式の前進解法にMG法を適用し、その結果、非線形性に伴う困難さに出会うことなく、MG法が十分効果的に働くことを確認した。

(3)これにより、PPNs式の高速解法の可能性を示唆することが出来た。

計算には、北海道大学大型計算機センターのHITAC M-680Hを使用した(ベクトル・プロセッサは使用せず、全て、スカラー演算で行った)。

文 献

- (1) Roache, P. J., コンピュータによる流体力学, (昭59), 構造計画研究所
- (2) Thompson, J. F., Thames, F. C. and Mastin, W. C., J. Comput. Phys., 15 (1974), 299
- (3) 例えば, Himeno, R., Shirayama S., Kamo, K. and Kuwahara K., AIAA paper 85-1617, (1985)
- (4) Brandt, A., AIAA J., 18-10 (1980), 1165
- (5) Brandt, A. and Dinar, N., Num. Methods for P.D.E., Proc. Adv. Seminar, Math. Reserch Center, Univ. of Wisconsin, ed. by S. Parter, (1979), Academic Press, 53-147
- (6) Brandt, A., Math. of Computations, 31-138 (1977), 333
- (7) 例えば, Veldman, A. E. P., AIAA J., 19-1 (1981), 79
- (8) Stewartson, K., Adv. Appl. Mech., 14 (1974), 145
- (9) 例えば, 飯田・藤本 機論 862-1 (昭61), 43
- (10) Rubin, S. G. and Lin, A., Israel J. Tech., 18 (1980), 21
- (11) 永野, 機械学会誌 87-785, (昭59) 364
- (12) Israeli, M. and Lin, A., Comput. & Fluids, 13-4 (1985), 397