水平環状多孔質内非定常三次元自然対流の ガラキン法による解析*

饒 燕飛^{*1}, 福田 研二^{*2}, 長谷川 修^{*2}

Analysis Using Galerkin Method on Three-Dimensional, Time-Dependent Natural Convection in Porous Medium Bounded by Two Horizontal, Concentric Cylinders

Yan-Fei RAO, Kenji FUKUDA, and Shu HASEGAWA

A three-dimensional Galerkin scheme using scalar product to obtain residual equations is developed and compared with that using vector product; the latter is proved unsuitable. In addition to the reported two-dimensional multiple solutions (1), three-dimensional solutions are obtained corresponding to different initial conditions. It is found that the three-dimensional flow cannot be obtained unless the initial perturbation is strong enough. The structure of the three-dimensional spiral flow is clarified. At the top of the annulus, there exist secondary flow cells with closed streaklines of co-axial double helix similar to that observed in inclined rectangular box. This increases maximum local and overall heat transfer rates compared with those for the simple two-dimensional unicellular flow.

Key Words: Natural Convection, Porous Medium, Three-dimensional Simulation, Galerkin Method, Multiple Solutions, Secondary Flow, Co-axial Double Helix

1. 緒 言

内側から加熱され、外側から冷却される水平環状多孔質内の自然対流について、著者らは既報⁽¹⁾⁽²⁾で、ガラキン法による二次元解析を行い、初期値により異なるフロパタンに対応する3種類の分岐解を得、さらにそれらの解の遷移、安定性および熱伝達への影響について検討した。ところで、本体系ではCaltagirone⁽³⁾は環状頂部の温度を測定し、高いレーレー数では管軸方向に温度の周期的変化があり、流れが三次元スパイラル流れになることを報告している。また、高田⁽⁴⁾は軸方向に有限である場合、増岡ら⁽⁶⁾はより狭い環状空間の場合における温度測定でも、その流れの三次元性を確認している。しかし、この問題における従来の数値解析⁽³⁾⁻⁽¹²⁾はほとんど二次元解析であり、また実験で観察された三次元流れに対応する計算結果は少ない。したがって著者ら⁽¹³⁾は傾斜の場合を含めて三次元解析を行い、傾斜の場合については三次元解を得た。しかし、この場合は三次元流れは、傾斜のために管軸方向にも重力が作用することに起因して発生するが、水

平の場合は、軸方向に外力が存在しないために、三次元流れは環状頂部での、Benard対流問題によく見られる逆温度こう配による不安定性に起因して発生する違いがある。そこで、本報では、水平に置かれた環状多孔質内の自然対流について、二次元問題を対象とした既報⁽¹⁾⁽²⁾で用いたガラキン法を三次元の場合に拡張し解析を行ったものである。

本報により、従来の三次元ガラキン法による傾斜く形内の自然対流に関する解析ではベクトル積により残差方程式を求めることがあるが、(例えば、Caltagirone⁽¹⁷⁾, Altimir⁽¹⁸⁾)、無条件でこれを行うと本質的な間違いを招きかねないことがわかった。また、既報と同様に、物理的な考察に基づく種々の初期外乱による分岐解の存在や、ランダムな外乱によるそれらの解の安定性および卓越性を調べた。さらに水平環状多孔質内自然対流の分岐解の一つである、三次元スパイラル流れの構造やその熱伝達特性への影響を明らかにした。

2. 記 号

$a: = \ln R/\pi$

$A_{ijk}: \Psi_r$ の試行関数の係数, 式(12)

$B_{ijk}: \Psi_\phi$ の試行関数の係数, 式(13)

* 昭和62年11月18日 第948回講演会において講演、原稿受付 昭和62年4月6日。

^{*1} 正員、九州大学大学院 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

^{*2} 正員、九州大学工学部。

C_{ijk} : Ψ_z の試行関数の係数, 式(14)

C : 付録で定義されている定数

g : 重力加速度

$Ga = 1/[\beta(\hat{T}_{in} - \hat{T}_0)]$

L : 管軸方向のセル幅

N_i, N_j, N_k : 展開式の一方の項数, 式(16)

$N_u, \bar{N}_u$: 局所および平均熱伝達係数

P : 圧力

r : 半径方向の座標

R : 半径比 (r_0/r_{in})

$R_{es}, \mathbf{R}_{es}$: スカラーおよびベクトル残差

$Ra = g\beta x r_{in}(\hat{T}_{in} - \hat{T}_0)/\alpha_{eq}\nu$

$\hat{T}$: 温度

T_{ijk} : 無次元温度 θ の試行関数の係数

t : 時間

$\mathbf{v}$: 速度ベクトル [V_r, V_ϕ, V_z]

z : 管軸方向の座標

α_{eq} : 有効温度伝導率

β : 熱膨張率

δ : Kronecker デルタ

Θ : 無次元温度 $(\hat{T} - \hat{T}_0)/(\hat{T}_{in} - \hat{T}_0)$

θ : 無次元温度 $= \Theta - (1 - \ln r / \ln R)$

x : 透過率

λ : 重力方向単位ベクトル

μ : 粘性係数

ν : 動粘性係数

ϕ : 角度座標

Ψ : 速度のポテンシャルベクトル [$\Psi_r, \Psi_\phi, \Psi_z$]

添 字

in, o : 内管, 外管

$(I, J, K); (i, j, k); (l, m, n)$: 温度, 速度および速度

ポテンシャルの展開式のモード

演算子

X =ベクトル積

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

3. 解 析

3.1 基礎方程式 図1に示す内半径 r_{in} , 外半径 r_o の水平環状多孔質層を考える。内外管の無次元温度はそれぞれ1, 0とする。三次元流れは軸方向に周期性があるとし, また流れが管軸を通る垂直面に関して対称であると仮定する。平面 i と ii は境界面であり, ダルシー式によりそこでの境界条件は流れの対称面の

条件と同様である。 P, v, t がそれぞれ $\alpha_{eq}\mu/x, \alpha_{eq}/r_{in}, r_{in}^2/\alpha_{eq}$ により無次元化された連続式, ダルシーの式およびエネルギー式は既報と同様に式(1)~(3)で表される。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla P - Ra\lambda\Theta + RaGa\lambda + \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

$$-(\mathbf{v} \cdot \nabla)\Theta + \nabla^2\Theta = \partial\Theta/\partial t \quad (3)$$

ここで, $\lambda = [-\cos\phi, \sin\phi, 0]$ が重力方向の単位ベクトルを表す。式(2), (3)に $\theta = \Theta - (1 - \ln r / \ln R)$ を代入して整理すると以下の式が得られる。

$$\nabla P^* + \begin{Bmatrix} \cos\phi/\ln R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \lambda\theta + \frac{1}{Ra}\mathbf{v} = 0 \quad (4)$$

$$-(\mathbf{v} \cdot \nabla)\theta + \frac{V_r}{r \ln R} + \nabla^2\theta = \partial\theta/\partial t \quad (5)$$

ここで, $P^* = P/Ra - Ga \times r \cos\phi + r(1 - \ln r / \ln R) \cos\phi$ 。境界条件は式(6)で示す。

$$V_r = \theta = 0, \quad \text{at } r=1, R$$

$$V_\phi = \partial\theta/\partial\phi = 0, \quad \text{at } \phi=0, \pi$$

$$V_z = \partial\theta/\partial z = 0, \quad \text{at } z=0, L$$

.....(6)

次式のベクトルポテンシャルを導入することにより連続式が自動的に満たされる。

$$\mathbf{v} = \nabla X \phi \quad (7)$$

式(2)の回転をすることにより, 圧力項を消去し, 以下の式を得る。

$$\nabla^2 \Psi_r - \left[\frac{\Psi_r}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi_\phi}{\partial \phi} \right] = Ra \sin\phi \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (8)$$

$$\nabla^2 \Psi_\phi - \left[\frac{\Psi_\phi}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi_r}{\partial \phi} \right] = Ra \cos\phi \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (9)$$

$$\nabla^2 \Psi_z = -Ra(\sin\phi \frac{\partial \theta}{\partial r} + \cos\phi \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \phi}) \quad (10)$$

ベクトルポテンシャルの境界条件は以下のようなになる。

図1 解析モデル

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\psi_r) = \psi_\phi = \psi_z = \theta = 0 \quad (r=1, R)$$

$$\psi_r = \frac{\partial \psi_\phi}{\partial \phi} = \psi_z = \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 0 \quad (\phi=0, \pi)$$

$$\psi_r = \psi_\phi = \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (z=0, L)$$

.....(11)

3・2 ガラキン法による数値解法 本研究では、既報⁽²⁾の二次元試行関数を拡張して以下のような試行関数を用いる。

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_r &= \sum_1 A_{ijk} \psi_{rjk} \\ &= \sum_1 A_{ijk} \frac{1}{r} \cos\left(\frac{i}{a} \ln r\right) \sin j\phi \sin \frac{k\pi}{L} z \end{aligned} \quad \text{.....(12)}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\phi &= \sum_2 B_{ijk} \psi_{\phi jk} \\ &= \sum_2 B_{ijk} \frac{1}{r} \sin\left(\frac{i}{a} \ln r\right) \cos j\phi \sin \frac{k\pi}{L} z \end{aligned} \quad \text{.....(13)}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_z &= \sum_3 C_{ijk} \psi_{zjk} \\ &= \sum_3 C_{ijk} \sin\left(\frac{i}{a} \ln r\right) \sin j\phi \cos \frac{k\pi}{L} z \end{aligned} \quad \text{.....(14)}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &= \sum_4 T_{ijk} \theta_{ijk} \\ &= \sum_4 T_{ijk} \frac{1}{r} \sin\left(\frac{i}{a} \ln r\right) \cos j\phi \cos \frac{k\pi}{L} z \end{aligned} \quad \text{.....(15)}$$

ここで、 $\sim$ の記号が有限項数の展開式を意味し、また

$$\sum_1 = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} \sum_{k=1}^{N_k}; \sum_2 = \sum_{i=1}^{N_i}; \sum_3 = \sum_{i=1}^{N_i}; \sum_4 = \sum_{i=1}^{N_i} \quad \text{.....(16)}$$

である。これらの試行関数は環状空間での直交関数であり、かつ境界条件式(11)を満たしている⁽²⁾。式(7)により、速度成分の展開式は式(17)～(19)になり、境界条件式(6)および連続式(1)を自動的に満たしている。

$$\begin{aligned} \tilde{V}_r &= \sum_{i=1}^{N_i} \left(jC_{ijk} - \frac{k\pi}{L} B_{ijk} \right) \\ &\quad \times \frac{1}{r} \sin\left(\frac{i}{a} \ln r\right) \cos j\phi \cos \frac{k\pi}{L} z \end{aligned} \quad \text{.....(17)}$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_\phi &= \sum_{i=1}^{N_i} \left(\frac{k\pi}{L} A_{ijk} - \frac{i}{a} C_{ijk} \right) \\ &\quad \times \frac{1}{r} \cos\left(\frac{i}{a} \ln r\right) \sin j\phi \cos \frac{k\pi}{L} z \end{aligned} \quad \text{.....(18)}$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_z &= \sum_{i=1}^{N_i} \left(\frac{i}{a} B_{ijk} - jA_{ijk} \right) \\ &\quad \times \frac{1}{r^2} \cos\left(\frac{i}{a} \ln r\right) \cos j\phi \sin \frac{k\pi}{L} z \end{aligned} \quad \text{.....(19)}$$

ガラキン法⁽¹⁵⁾の基本的な考えは、一つの完全系になる一組の試行関数のすべての項に直交する連続関数は零しかないことである。有限項数で近似する場合、その有限の展開式を微分方程式に代入し、試行関数の各

項を乗じて積分することにより残差方程式が求められる。傾斜く形内の自然対流における従来の研究（例えば、Caltagirone⁽¹⁷⁾、Altimier⁽¹⁸⁾）ではベクトル積によりダルシー式の残差方程式を求めている。本研究では、スカラー積とベクトル積2とおりの方法を検討し、その相互関係および解への影響も調べる。

3・2・1 スカラー積による残差方程式 ベクトルポテンシャル展開式(12)～(14)を式(8)に代入し、次式のスカラー残差を得る。

$$R_{esr} = \nabla^2 \tilde{\psi}_r - \left[\frac{\tilde{\psi}_r}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{\psi}_\phi}{\partial \phi} \right] - Ra \sin \phi \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} \quad \text{.....(20)}$$

よって、ガラキン法により一組の連立方程式が得られる。

$$\langle R_{esr}, \psi_{rnm} \rangle = 0 \quad l=0, N_i; m=1, N_j; n=1, N_k \quad \text{.....(21)}$$

ここで、 $\langle \rangle$ は環状空間における体積積分を意味する。同様に、 $R_{es\phi}$ 、 R_{esz} に対応する他の二組の連立方程式を得ることにより、三組の未知数 A_{ijk} 、 B_{ijk} 、 C_{ijk} を含む連立方程式を解くことができる。

3・2・2 ベクトル積による残差方程式 有限項近似の $\tilde{v}$ を直接ダルシー式(4)に代入することにより、次のベクトル残差を得る。

$$R_{es} = \nabla P^* + \begin{Bmatrix} \cos \phi / \ln R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \lambda \tilde{\theta} + \frac{1}{Ra} \tilde{v} \quad \text{.....(22)}$$

式(22)に対応する残差方程式は次のようになる。

$$\langle R_{es}, v_{lmn} \rangle = 0 \quad l=0, N_i; m=0, N_j; n=0, N_k \quad \text{.....(23)}$$

式(23)は一組の連立方程式しか与えないので、速度ベクトルの試行関数は次式の形でなければならない。

$$v = \sum E_{ijk} v_{ijk} = \sum E_{ijk} \begin{bmatrix} V_{rjk} \\ V_{\phi jk} \\ V_{zjk} \end{bmatrix} \quad \text{.....(24)}$$

一つの選択としては、式(17)～(19)に $E_{ijk} = A_{ijk} = B_{ijk} = C_{ijk}$ とすれば、式(24)が得られるが、ここで、比較のために、従来⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾用いられたものと類似な次式を用いる。

$$v = \sum E_{ijk}$$

$$\begin{bmatrix} -\left(\frac{k^2\pi^2}{L^2} + j^2\right) \frac{1}{r} \sin\left(\frac{i}{a} \ln r\right) \cos j\phi \cos \frac{k\pi}{L} z \\ j\left(\frac{i}{a}\right) \frac{1}{r} \cos\left(\frac{i}{a} \ln r\right) \sin j\phi \cos \frac{k\pi}{L} z \\ \frac{k\pi}{L} \left(\frac{i}{a}\right) \frac{1}{r^2} \cos\left(\frac{i}{a} \ln r\right) \cos j\phi \sin \frac{k\pi}{L} z \end{bmatrix} \quad \text{.....(25)}$$

式(25)の試行関数は、それぞれ r - ϕ 、 r - z 面で連続式および境界条件を満たしている二組の試行関数から構成されている。しかし、式(25)は、式(17)~(19)の、次の条件を満たした特例であることが容易にわかる。

$$A_{ijk} = \frac{\left(\frac{i}{a}\right)}{\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 + j^2} \left[jB_{ijk} + \frac{k\pi}{L} C_{ijk} \right] \quad \dots\dots\dots (26)$$

その結果、式(24)の E_{ijk} は次式で与えられる。

$$E_{ijk} = \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 + j^2} \left[\frac{k\pi}{L} B_{ijk} - jC_{ijk} \right] \quad \dots\dots\dots (27)$$

式(26)の条件は物理的に次式に相当する。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \phi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial V_\phi}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

これは二次元流れの場合を除けば、一般的に満たされる式ではない。すなわち、換言すれば、式(17)~(19)では連続の条件による制限から自由度が $3-1=2$ となっているが、式(25)ではさらに式(28)が付加し自由度が1となっており、明らかに誤りであるといえる。よって、式(25)により正しい三次元流れは得られないであろうことがわかる。

3.3 数値計算手順 式(8)に対応する残差方程式(21)の各項を積分し整理すると、展開式の各モードの係数に関する連立方程式を得る。同様に式(9)、(10)に対応するものも同様に整理し結局以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N_i} C_1 A_{imn} + \sum_{i=1}^{N_i} C_2 B_{imn} \\ = \sum_{i+l=\text{odd}}^{N_i} C_3 [(1+\delta_{m1}) T_{i,m-1,n} - T_{i,m+1,n}] \\ l=0, N_i; m=1, N_j; n=1, N_k \quad \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_i} C_4 B_{imn} + \sum_{i=0}^{N_i} C_5 A_{imn} = \sum_{j+m=\text{even}}^{N_i} C_6 T_{ijn} \\ l=1, N_i; m=0, N_j; n=1, N_k \quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_i} C_7 C_{imn} \\ = \sum_{i+l=\text{odd}}^{N_i} C_8 [(1+\delta_{m1}) T_{i,m-1,n} - T_{i,m+1,n}] \\ + C_9 [(m+\delta_{m1}) T_{i,m-1,n} + m T_{i,m+1,n}] + C_{10} \\ l=1, N_i; m=1, N_j; n=0, N_k \quad \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

さらにエネルギー式(5)より次式を得る。

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{d}{dt} T_{imn} = \sum_{i=1}^{N_i} [C_{12} (m C_{imn} - \frac{n\pi}{L} B_{imn}) \\ + C_{13} T_{imn}] + \sum_{i=0}^{N_i} \sum_{j=0}^{N_j} \sum_{k=0}^{N_k} \\ [C_{14} C_\alpha + C_{15} B_\alpha + C_{16} A_\alpha] T_\beta \\ l=1, N_i; m=0, N_j; n=0, N_k \quad \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

ここで、 α, β がモード $(I, |m-j|, |n-k|)$, $(i, |j|, |k|)$

を意味する。係数 $C_1 \sim C_{16}$ は付録で与えられている。初期値問題としての式(29)~(32)は一組の一次連立非線形常微分方程式であり、以下に述べる手順で解くことにする。まず、一組の初期値 T_{ijk} を与え、(29)~(31)式を反復的に解くことにより、 A_{ijk} , B_{ijk} , C_{ijk} の値を得、それらを用いて式(32)を積分し、新しい時間ステップでの T_{ijk} を求める。付録でわかるように、 A_{imn} の係数、すなわち $C_1 (i=1)$ が式(29)左辺の他のものに比べてかなり大きく、また式(30)、(31)でも、それぞれ B_{imn} , C_{imn} に対し同様な傾向が見られる。そのために、反復が非常に急速に収束することになり、平均的に2、3回の反復により相対誤差0.001以内の A_{ijk} , B_{ijk} , C_{ijk} を得ることができた。時間方向の積分は、既報⁽²⁾で Runge-Kutta 法に比べて効率的と確かめた二段階有理 Runge-Kutta 法を用いる。半径比 R を2.0とし、セル幅 L を、Caltagirone⁽³⁾の実験で得られた値、0.94にする。時間ステップは0.003~0.01となり、一ステップでの平均ヌッセルト数の変化が 10^{-4} より小さくなるまで時間積分する。展開項数 $N_i \times N_j \times N_k = 10 \times 13 \times 5$ の平均的なケースにおける計算時間は FACOM VP-100 で約20分であった。

4. 結果および検討

4.1 スカラーおよびベクトル残差方程式によるガラキンスキームの考察 スカラー積による残差方程式(21)を解くことにより、収束した三次元解が得られ、これと差分法の解と比較した結果、よい一致が得られた。しかし、ベクトル積による残差方程式(23)によつ

図2 二種の試行関数による残差
(A): 式(25)より; (B): 式(17)~(19)より

ては収束した三次元解が得られなかった。他の方法で得られた収束解を初期値にしても、解が二次元に帰着するか発散する。そこで、その試行関数の有効性を調べるために、差分法⁽¹³⁾で得られた収束解をそれらの試行関数を用いて展開し、得られた展開式 $\bar{\theta}$, $\bar{\theta}$ により、次式の平均残差が展開項数が増加するに連れて零に収束するかどうかを調べる。

$$R_{es} = \langle (\nabla X \bar{\theta})_s - Ra \cos \phi \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \rangle \dots\dots\dots (33)$$

式(33)は式(9)の残差を平均したものである。ここで、 R_{es} が選ばれた理由は、 Ψ_s は r - z 面のセル対流を与え、試行関数にもっとも敏感に変化するからである。また、 $\cos \phi$ と $\partial \theta / \partial z$ はともに、三次元流れが発生した環状頂部で大きい値を取るので、 $\langle Ra \cos \phi \partial \theta / \partial z \rangle$ がスケールとして使われる。そのために、式(33)の平均残差が展開項の係数で求められ、数値積分は避けられる。式(33)が近似項数が増加するに連れて零に近づくことは完全系の必要条件である。図2に、二種のガラキンスキームで得られた残差を示す。そこで、便宜上、 N の値は $N=N_i=N_j=N_k$ にし、4 から 13 まで変化させた。スカラー積に対応する試行関数式(12)~(14)による残差は展開項数の増加に連れて収束していく傾向が見られるが、一方、ベクトル積に対応する試行関数式(25)による残差は逆に増加していく。この結果は、不完全な試行関数を用いると解が元の微分方

程式に収束しないことがあることを示している。

4.2 種々の初期条件による分岐解 既報⁽²⁾で検討したように、分岐解および安定性問題を取扱う場合 (Benard 対流はその一例)、初期条件はしばしば収束解に決定的な影響を与える。自然界の中での対流の発生および対流パターンの変化は外乱を伴うので、純粋熱伝導および等温状態を初期値にすることによりこれらの解を失うことがありうる。しかし、そのような問題に対して初期条件の選び方および可能な分岐解の個数について一般的な理論はまた見られず、問題ごとに、また経験的に、検討していかなければならない。本形状で可能な分岐解は環状頂部で円周方向および軸方向に二次流れが生じるパターンであると考えられる。既報⁽²⁾では、二次元解析により円周方向に二次流れのある多セル流れを調べたが、本報では、三次元解析により軸方向に二次流れのあるスパイラル流れを対象とする。

表1に用いた初期条件を示す。速度の値を零としているので、これらの初期値は支配方程式に矛盾しない。そこで、初期条件タイプ1は純粋熱伝導および等温状態に対応し、タイプ2, 3はさらにその上に二次元微小外乱が加えられる。図3にタイプ1, 2, 3により得られた単セル、二セルおよび三セル流れを示す。二次元の初期値を用いる場合、本報の三次元ガラキン

表 1 種々の初期条件

	Type 1 for 2-D unicellular	Type 2 for 2-D bicellular	Type 3 for 2-D tricellular	Type 4 or 3-D spiral flow	type 5
(A)	all $T_{ijk}=0$	all $T_{ijk}=0$ except $T_{130}=\epsilon$, $T_{140}=\epsilon$, $T_{150}=\epsilon$	all $T_{ijk}=0$ except $T_{160}=\epsilon$, $T_{170}=\epsilon$, $T_{180}=\epsilon$, $T_{190}=\epsilon$	all $T_{ijk}=0$ except $T_{101}=\epsilon$, $T_{111}=\epsilon$, $T_{121}=\epsilon$, $T_{131}=\epsilon$	Random distributions of perturbations adding to $\theta=0$
(B)	adding $T_{100} = \frac{2i}{\pi(a^2+i^2)} \left\{ 1 + \frac{2a[(-1)^i R - 1]}{\pi(a^2+i^2)} \right\}$ to the above initial conditions				

$\epsilon(>0)=0.001-0.1$.

(A) state of pure or perturbed conduction

(B) pure or perturbed uniform temperature distribution

図 3 既報⁽²⁾と同様な二次元分岐解, $Ra=200$

表 2 $Ra=120$ における分岐解の支配的モード

2-D unicellular		2-D bicellular		2-D tricellular		3-D spiral flow	
mode	T_{ijk}	mode	T_{ijk}	mode	T_{ijk}	mode	T_{ijk}
1,1,0	-0.659	1,1,0	-0.508	1,1,0	-0.487	1,1,0	-0.561
2,0,0	-0.165	1,3,0	0.191	1,3,0	0.170	1,1,1	0.173
2,1,0	0.141	2,0,0	-0.185	2,0,0	-0.166	2,0,0	-0.161
1,2,0	0.134	1,4,0	-0.173	2,1,0	0.118	2,1,0	0.133
3,1,0	-0.103	2,1,0	0.161	1,7,0	-0.115	1,2,1	-0.128
2,2,0	-0.081	1,5,0	0.128	1,8,0	0.113	3,1,0	-0.107
1,0,0	-0.061	3,1,0	-0.110	1,2,0	-0.112	1,0,0	-0.104
		1,0,0	-0.109	1,0,0	-0.108	1,0,1	-0.096
		1,2,0	-0.085	3,1,0	-0.092	1,3,1	0.076
		1,6,0	-0.081	1,9,0	-0.090	2,2,0	-0.070

図 4 支配的モード $(1, j, 1)$ の係数, $Ra=150$, $L=0.94$

スキームは数値計算上の三次元外乱を生じないので、既報⁽²⁾と同様な結果が得られた。タイプ4は三次元微小外乱が加えられている。同じ符号の $(-1)^j T_{1,j}$ を与えることにより、環状頂部で軸方向に波状の温度分布を持つ初期外乱が得られる。これは三次元スパイラル流を生じる結果となる。表2にそれらの分岐解のモードをモード値の大きい順で示す。二次元に近い主循環流に対応するモード $(1,1,0)$, $(2,0,0)$, $(2,1,0)$, $(1,2,0)$ などが支配的であり、四種の分岐解に対してほぼ変わらない。一方、単セル流れ以外の分岐解は、環状頂部で異なる二次流れが生じるので、それぞれ特徴を持つ支配的モードが現れている。二次元分岐解の場合、 $(1,j,0)$ であり、二次元解析⁽²⁾の $(1,j)$ と同様である。三次元の場合、 $(1,j,1)$ は支配的になり、図4に示すように、その $(-1)^j T_{1,j}$ の値が規則正しく変化し、

図5 環状頂部軸方向の温度分布, $Ra=150$, $L=0.94$, $r=1.5$; 展開項数および分割数, Galerkin: $10 \times 13 \times 5 (N_i \times N_j \times N_k)$; FDM: $21 \times 51 \times 21$, 初期値タイプ4

図6 三次元流れにおける r - z 面の速度場および等温線
 $Ra=100$, $L=0.94$, $N_i \times N_j \times N_k = 10 \times 13 \times 5$

同じ符号を持っている。これは、すでに述べたように、環状頂部で三次元スパイラル流れに特有な波状の温度分布を意味している。

4.3 分岐解の安定性について ランダムな初期条件タイプ5も用いて計算した。外乱の幅が小さい場合、二次元単セル流れが支配的になり、その幅がある値を超えると三次元スパイラル流れが生じることがわかった。その臨界値はレーレー数に依存して $0.001 \sim 0.02$ であった。ランダムな外乱により二次元セルおよび三セル流れが生じなかったことは、それらの対流パターンに比べて二次元単セル流れおよび三次元スパイラル流れのほうが卓越しやすいことを示している。差分法による三次元解析⁽¹³⁾では三次元解が得られなかったが、これはより小さいレーレー数での収束解を初期値にすることにより、三次元流れを生じるために必要な数値計算上の外乱が減少されたものと思われる。

一般的に、外乱(タイプ2~5)幅が小さいと単セル以外の分岐解が得られない。これは基本的な単セル流れから他の分岐解への遷移が非線形な過程であり、線形解析では取扱えないことを示している。

4.4 三次元スパイラル流れの構造 図5に環状頂部での軸方向における温度変化を示す。ガラキン法による数値解を対称条件により展開し、Caltagirone⁽³⁾の実験値と比較した結果、比較的によい一致を得た。また、差分スキーム⁽¹³⁾に同じ初期外乱を与えて得られた解と完全に一致したので、ガラキン法による数値解は妥当であると考えられる。図6に、 r - z 面における流れ場および等温線を示す。環状頂部での流れパター

図7 対称面IおよびIIにおける等温線、速度場および流線(図6と同様な条件)、四角および丸印はそれぞれ出発および終了点を示す

ンが水平く形チャンネル内の Benard 対流と類似していることがわかる。このような流れは環状頂部を離れていくにつれて弱くなり、 $\phi=90^\circ$ ではすでに見られない。図 7 に二つの対称面、平面 I および II における等温線、流れ場および流線を示す。平面 I では、環状頂部で主循環流に二次流れの下降流部分が加えられるために、温度分布は二次元ニセル流れに類似している。環状頂部内管付近および主循環流の中心における速度の値が零であるように見え、またすべての流線はその 2 箇所で終了していることがわかる。特に主循環流の中心($r=1.45$, $\phi=106^\circ$) はシンクのように見えるが、流れが三次元であるため実際はそうではない。一方、平面 II では、主循環流に二次流れの上昇部分が加えら

れているので、流れ場および温度分布は二次元単セル流れと類似している。しかし、その対応する流線はトロイダル線であり、あたかもソースがあるように一点からわき出している。その位置は平面 I でのシンクと全く同じである。それらの対称面における流線は三次元スパイラル流れの構造を解明するのに用いる。図 8 に、速度場を二次精度の Runge-Kutta 法により三次元的に積分して得られた流線を示す。図 8 (a) で明らかなように、環状頂部から出発した流線はく形内で観察された⁽¹⁶⁾共軸二重らせん線を形成して三次元的に閉じている。一方、平面 I のシンク付近から出発した流線はそのシンクと平面 II のソースを結ぶ軸（主循環流の中心軸とも言える）に沿って、スパイラルらせん線を巻きながら平面 II へ向かう。そして、平面 II に近づくと流れは図 7 に示されたようなトロイダル線に沿って主循環流の中心を離れていき、環状頂部の二次流れセルに直接影響される外層に達すると逆方向に進行するらせ線で平面 I の近くまで戻る。図 8 (b) に示すように、流線は出発点にごく近くまで戻っており、閉じていると考えられる。らせん線の順序は図中の数字で示

図 8 三次元スパイラル流線 (図 6 と同様な条件により)

図 9 内外管における局所熱伝達係数 (図 6 と同様な条件により)

図 10 二次元および三次元流れにおける平均熱伝達係数の過渡解, $Ra=100$, $L=0.49$, 初期値タイプ 4, $\varepsilon=0.01$ (二次元); $\varepsilon=0.05$ (三次元)

図 11 二次元および三次元流れにおける平均熱伝達係数

5. 結 言

本報では、水平環状多孔質層内の自然対流において、ガラキン法による三次元解析を行った。結論は次のとおりである。

(1) 速度のベクトルポテンシャルを用い、スカラー積により残差方程式を求めるガラキンスキームを開発し、それとベクトル積によるものと比較した結果、後者は三次元解析には不適当であることがわかった。

(2) 種々の初期値により二次元および三次元分岐解が得られ、その内二次元単セルおよび三次元スパイラル流れが卓越しやすいことがわかった。また、初期外乱が十分でないと三次元解は得られないことがわかった。

(3) 環状多孔質層内に生じる三次元スパイラル流れの構造を明らかにした。環状頂部での二次流れは傾斜く形内で観察された共軸二重らせん渦と類似であることがわかった。

(4) 三次元スパイラル流れが生じることにより、平均熱伝達係数、特に環状頂部での最大局所熱伝達係数が増加することがわかった。

最後に、本研究の一部は日本原子力研究所との協力研究 86139 として行われたことを記し、ここに謝意を表す。また、修士一年の禧久和臣氏には、計算の手伝いを得、ここに謝意を表す。

付 録

式(29)～(32)に用いた定数

$$C_1 = \frac{\pi L}{2} [a^2 m^2 (4a^2 + i^2 + l^2) + 2i^2 l^2] X_3 + \delta_{ii} \frac{an^2 \pi^4}{8L} (1 - \delta_{io}) \dots\dots\dots (34)$$

$$C_2 = -\frac{\pi m}{2} Lai(4a^2 + i^2 - l^2) X_3 \dots\dots\dots (35)$$

$$C_3 = -Ra \frac{n\pi^2 ai}{4(i^2 - l^2)} \dots\dots\dots (36)$$

しているが、一般に流線が徐々に環状底部に近づいていることからわかる。図中 14 とつけた最後のらせん環は、平面 I に極めて近いため、あたかもシンクのところへ吸込まれているように見える。図 8(c) に出発点が少し主循環流軸と離れた場合の流線を示す。それは基本的に図 8(b) と同じであるが、平面 II および環状頂部に届かずにその中間層を占めている。

4・5 対流パターンの熱伝達への影響 図 9 に三次元スパイラル流れにおける局所熱伝達係数を示す。軸方向に二次流れセルが生じたために、環状頂部での熱伝達が促進され、その最大値が二次元単セル流れのそれ(約 5.76) より約 35 パーセント増加している。図 10 に二次元単セルおよび三次元スパイラル流れにおける平均熱伝達係数の過渡解を示す。二次流れが環状頂部に限定されているので、平均熱伝達係数はそれほど影響されていないことがわかる。

図 11 に平均熱伝達係数について、ガラキン法による解析値と従来の実験値とを比較している。二次元二セルおよび三セル流れによる結果は実験値とよく一致していることが明らかであり、三次元スパイラル流れも二次元単セル流れより高い平均熱伝達係数を持つことがわかった。しかし、三次元スパイラル流れは実験による観察とよく一致しているが、実験値よりやや低い平均熱伝達係数を持っており、また、高いレイレー数域 ($Ra > 150$) では、四種の分岐解とも実験値より低い値を示す。これはもちろん実験精度の問題によるものと考えられるが、数値解析上では、ダルシー式および空けき率が均一である仮定によると思われる。これらの問題が残っているにもかかわらず、本研究で明らかにした解の分岐、流れの構造および熱伝達への影響などの知見はモデルの改良によって大きく変わりがないと考えられる。

$$C_4 = \left\{ \frac{\pi}{2} i l L \left[2 \left(\frac{i^2}{a^2} + m^2 \right) a^2 + 4a^2 + l^2 - i^2 \right] X_3 + \frac{a n^2 \pi^4}{8L} \right\} (1 + \delta_{m0}) \quad (37)$$

$$C_5 = -\frac{\pi}{2} m L a l (4a^2 + l^2 - i^2) X_3 \quad (38)$$

$$C_6 = -R a \frac{\pi^2}{4} n a \left[\frac{m+1}{(m+1)^2 + j^2} - \frac{m-1}{(m-1)^2 - j^2} \right] \quad (39)$$

$$C_7 = \left[-\frac{\pi^3}{L} n^2 a^2 i l X_4 + \delta_{il} \frac{\pi^2}{8} L a \left(\frac{l^2}{a^2} + m^2 \right) \right] \times (1 + \delta_{n0}) \quad (40)$$

$$C_8 = -R a \frac{i l L \pi}{4(l^2 - i^2)} (1 + \delta_{n0}) \quad (41)$$

$$C_9 = R a \frac{\pi^2}{16} L a (1 + \delta_{n0}) \quad (42)$$

$$C_{10} = R a \frac{i l L [1 - R(-1)^l]}{2(a^2 + l^2)} \delta_{m1} \delta_{n0} \quad (43)$$

$$C_{11} = \frac{\pi^2}{8} L a (1 + \delta_{m0})(1 + \delta_{n0}) \quad (44)$$

$$C_{12} = \frac{L}{2} l a i (1 + \delta_{m0})(1 + \delta_{n0}) X_5 \quad (45)$$

$$C_{13} = \left[-\frac{\pi}{2} L i l (l^2 + 2a^2 m^2 + 2a^2 + i^2) X_3 - \delta_{il} \frac{a n^2 \pi^4}{8L} \right] (1 + \delta_{m0})(1 + \delta_{n0}) \quad (46)$$

$$C_{14} = -\frac{\pi}{16} L \left[(m-j) X_6 + \frac{m l}{a} X_7 \right] (1 + \delta_{0j}) \times (1 + \delta_{0k})(1 + \delta_{nk}) D_{m-j} \quad (47)$$

$$C_{15} = \frac{\pi^2}{16} \left[(n-k) X_6 + \frac{n l}{a} X_7 \right] (1 + \delta_{0j}) \times (1 + \delta_{mj})(1 + \delta_{0k}) D_{n-k} \quad (48)$$

$$C_{16} = \frac{\pi^2}{16} X_7 (n j - m k) (1 + \delta_{0j})(1 + \delta_{0k}) D_{m-j} D_{n-k} \quad (49)$$

ここで

$$D_x = \begin{cases} 1 & (X > 0) \\ 0 & (X = 0) \\ -1 & (X < 0) \end{cases} \quad (50)$$

$$X_0 = \left[1 - \frac{1}{R^2} (-1)^{l+i+l} \right] \quad (51)$$

$$X_1 = \{ [4a^2 + (l+I+i)^2] [4a^2 + (l-I-i)^2] \}^{-1} \quad (52)$$

$$X_2 = \{ [4a^2 + (l+I-i)^2] [4a^2 + (l-I+i)^2] \}^{-1} \quad (53)$$

$$X_3 = \frac{\left[1 - \frac{1}{R^2} (-1)^{l+i+l} \right]}{[4a^2 + (l+i)^2] [4a^2 + (l-i)^2]} \quad (54)$$

$$X_4 = \frac{[1 - R^2 (-1)^{l+i+l}]}{[4a^2 + (l+i)^2] [4a^2 + (l-i)^2]} \quad (55)$$

$$X_5 = \frac{\left[1 - \frac{1}{R} (-1)^{l+i+l} \right]}{[a^2 + (i+l)^2] [a^2 + (i-l)^2]} \quad (56)$$

$$X_6 = \frac{a l}{2} X_0 [(X_2 - X_1)(4a^2 + l^2 + 3l^2 + 3i^2) - 6li(X_2 + X_1)] \quad (57)$$

$$X_7 = -2a^2 l X_0 [I(X_2 - X_1) - i(X_2 + X_1)] \quad (58)$$

文 献

- (1) 饒・福田・長谷川, 第23回日本伝熱シンポジウム講演論文集 (昭61-5), 436.
- (2) Rao, Y. F., Fukuda, K. and Hasegawa, S., *Trans ASME J. Heat Transfer*, **109** (1987), 919.
- (3) Caltagirone, J. P., *J. Fluid Mech.*, **76** (1976), 337.
- (4) 高田, 九州大学博士論文 (昭59), 21.
- (5) 越後・ほか4名, 機論, **45-339**, B (昭54), 91.
- (6) 増岡・ほか2名, 機論, **46-405**, B (昭55), 919.
- (7) Burns, P. J. and Tien, C. L., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **22** (1979), 929.
- (8) Facas, G. N. and Farouk, B., *Trans. ASME J. Heat Transfer*, **105** (1983), 660.
- (9) Bau, H. H., *Trans. ASME J. Heat Transfer*, **106** (1984), 166.
- (10) Muralidhar, K., ほか2名, *Trans. ASME J. Heat Transfer*, **108** (1986), 889.
- (11) Kaviany, M., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **29** (1986), 1513.
- (12) Muralidhar, K. and Kulaki, F. A., 文献(2)の23ページ.
- (13) Fukuda, K., ほか4名, *Proc. 19th Natl. Heat Transf. Conf.*, HTD-8 (1980), 97.
- (14) Hirasaki, G. J. and Hellums, J. D., *Q. Appl. Math.*, **26** (1968), 331.
- (15) 例えば, Gottlieb, P. and Orszag, S. A., *CBMS-NSF Regional Conf. Series in Appl. Math.*, **26** (1977), Arrow-smith.
- (16) 尾添・ほか2名, 化学工学論文集, **5** (昭54), 19.
- (17) Caltagirone, J. P. and Bories, S., *J. Fluid Mech.*, **155** (1985), 267.
- (18) Altimir, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **27** (1984), 1813.

討 論

〔質問〕 増岡隆士〔九州工業大学〕

三次元対流構造を解析的に明らかにされ敬意を表す。

(1) 三次元スパイラル流れ発生の限界レイリー数 Ra の値はいくらか。

(2) 貴数値解析においては、三次元スパイラル流れのほうが、二次元二セルおよび三セル流れより熱伝達率が低くなっているが(図 11), これらの対流パターンのいずれが生起するかの選択原理についてのお考えを伺わせていただきたい。

〔回答〕 (1) 図 11 に示しているように、三次元の初期外乱により $Ra=60$ で三次元スパイラル流れが得られたが、 $Ra=50$ での計算ではそれが得られなかったため、その発生限界 Ra 数は 50 と 60 の間にあると考えられる。しかし、本論文ではその限界値を求めることは目的としていないので、それ以上のことは言えない。また、著者らの経験によると(付 1), 時間積分するにつれて平均熱伝達係数の変化がほとんどなくなっても、そこから不安定性により対流パターンが急激に変化し始めることもあるので、そのような場合に

は収束条件をより厳しくし、長く時間積分する必要がある。二次元問題を取扱った既報⁽²⁾のように Ra 数を徐々に下げることによりその限界 Ra 数を求めることは経済的に困難である。

(2) その選択原理について、従来よく使われているものの一つとして、熱伝達率の大きいほうが卓越しやすいという仮説があるが(付 2), 一般的に検証されていないように思う。特に本研究のような場合、外乱に対する安定性がその選択に重要な役割を果たしているかもしれない。現在、著者らは線形安定性理論により、その二次元対流パターンの安定性を調べているが、続報で報告する予定である。ただ、ダルシー式による解析がどの程度まで実験と一致するかという問題を別にすれば、本研究で得られた種々の分岐解が(実験条件次第で)実験でも得られる可能性が十分あるように思っている。

(付 1) Rao, Y. F., ほか 4 名, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **28** (1985), 705 (Fig. 6).

(付 2) 例えば, Malkus, W. V. R., *Proc. R. Soc., Ser. A*, **225** (1954), 196, Kitade, T., *J. Meteorol. Soc. Jpn.*, **55** (1977), 1.