回転円柱面上の浅い層流水流*

吉野章男^{*1}, 小仲清祐^{*2}
若良二^{*1}, 目黒卓^{*3}

Shallow Laminar Water Flow on a Rotating Circular Cylinder

Fumio YOSHINO, Seisuke KONAKA,
Ryoji WAKA, and Takashi MEGURO

Laminar water flow with a free surface on a circular cylinder rotating about its axis aligned with a horizontal line has been calculated using the integral method. The result of the calculations showed that increasing the rotational speed of the cylinder reduced the wall shear stress and the displacement thickness to the negative value near the nozzle exit to pull the water in the downstream direction, which resulted in the rapid reduction of the water depth near the nozzle exit. The results of this calculation agreed well with the measurement of the water depth.

Key Words: Fluid Mechanics, Water Flow, Laminar Flow, Free Surface, Rotating Circular Cylinder, Integral Method, Water Depth

1. 緒言

水平な自軸まわりに回転している円柱表面上の自由表面を持つ水の流れの研究は純金属、合金などの極細線化⁽¹⁾⁽²⁾あるいはストリップ連铸⁽³⁾に関する新技術に関連し、工業的に重要である。また、このような流れについての研究はほとんどなされておらず、工学的にも意義あるものと思われる。

静止している曲率のある壁面上の層流境界層の問題は谷⁽⁴⁾⁽⁵⁾、伊藤⁽⁶⁾、Murphy⁽⁷⁾、Yen-Toba⁽⁸⁾、Hayasi⁽⁹⁾、Van Dyke⁽¹⁰⁾らによって取扱われている。谷⁽⁵⁾は境界層の速度分布形に対する曲率の影響について論じ、凸面上では壁面摩擦応力が減少することを示した。伊藤⁽⁶⁾は円柱面上の境界層について数値計算を行った。Murphy⁽⁷⁾とYen-Toba⁽⁸⁾はそれぞれ境界層方程式を導いたが、壁面摩擦応力への壁面の曲率の効果について逆の結論を得ている。Hayasi⁽⁹⁾はMurphyとYen-Tobaの導いた式は同じものであるが、後者の計算値には疑問があることを示した。曲率を持つ壁面が運動

している場合の層流境界層の問題についても研究されている⁽¹¹⁾が、これは壁面がそれ自身に平行に運動している場合ではないし、自由表面も存在していない。自由表面を持った流れの場合はほとんど波の問題として扱われている^{(12)~(15)}。

そこで本研究は水平な自軸まわりに回転している円柱の外側にある自由表面を持つ水流を理論的、実験的に研究することを目的とする。そのうち、本報告は実験的に求めた層流領域について円柱の曲率、回転運動を考慮した境界層の運動量積分方程式を導き、その数値解を求め、実験値（水深）と比較したものである。

2. 記号

k : 円柱壁面の曲率
 Re_0 : レイノルズ数 $= V_{s0} \delta_{s0} / \nu$
 u_w : 円柱壁面の周速度
 U_{pw} : 渦無し流れの壁面での速度
 V_{s0} : ノズル出口速度
 δ : 境界層厚さ
 δ_s : 水深
 δ_{s0} : ノズル出口高さ
 δ_1 : 排除厚さ
 δ_2 : 運動量厚さ

* 昭和63年3月12日 中国四国支部第26期総会講演会において講演、原稿受付 昭和62年5月11日。

*1 正員、鳥取大学工学部 (〒680 鳥取市湖山町南4-101)。

*2 学生員、鳥取大学大学院。

*3 日立金属(株) (〒692 安来市安来町2107-2)。

Λ : 圧力こう配を示すパラメータ
 $= (\delta^2/\nu)(dU_{pw}/dx)$

τ_w : 壁面摩擦応力

添 字

0: ノズル出口における値

s: 水表面における値

w: 壁面における値

3. 計算の基礎式

3.1 運動量積分方程式 壁面に沿って x 軸, それに垂直に y 軸をとった直交座標において壁面の曲率を一定とし, $h=1+ky$ とおけば境界層方程式および連続の式は無次元境界層厚さ $k\delta$ ($<0(1)$) (以下, 境界層厚さ) の一次の大きさのオーダーまで考慮すると Murphy⁽⁷⁾ に従えば次のようになる⁽¹⁰⁾.

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} (hu) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_g}{\partial x} \\ &+ \nu h \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial y} (hu) \right\} \\ -ku^2 &= -\frac{h}{\rho} \frac{\partial p_g}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (hv) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ただし, ρ および ν はそれぞれ水の密度および動粘度, u および v はそれぞれ x 方向および y 方向分速度である. 本報告の場合は自由表面を持つため, p_g は位置のポテンシャルと静圧の和であって次の形を持つ.

$$p_g = \rho g(h/k) \cdot \cos(kx) + p \dots\dots\dots (2)$$

上式において $x=0$ は円柱の頂点である. 静圧 p は自由表面で大気圧に等しい. g は重力の加速度である. 境界条件を次のようにおく.

$$\left. \begin{aligned} y=0 \text{ で } u &= u_w \\ y=\delta \text{ で } u &= U_p = U_{pw}/(1+k\delta) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{h}ku &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで u_w は壁面の周速度, U_p は渦なし流れの速度, U_{pw} は渦なし流れの壁面における速度である. 式(3)の最後の式は渦度が $y=\delta$ において 0 になるという条件であるが, $(\partial v/\partial x)/h$ は他の項に比べて小さいものとして無視してある.

境界層方程式(1), (2)を境界条件(3)を用いて y 方向に 0 ($\eta=y/\delta=0$) から δ ($\eta=1$) まで積分する. ここで, 境界層内の y 方向圧力分布として, $u=h^{-1}U_{pw}$ を式(1)の第2式に代入した p_g を用いる. さらに

$$\left. \begin{aligned} \delta_1/\delta &= U_{pw}^{-1} \int_0^1 (U_p - u) d\eta \\ \delta_2/\delta &= U_{pw}^{-2} \int_0^1 hu(U_p - u) d\eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

とおくと, 運動量積分方程式は次のようになる.

$$\delta_2' + \frac{\delta_2(2+H)U_{pw}'}{U_{pw}} = \frac{\tau_w}{\rho U_{pw}^2} + \frac{\nu k}{U_{pw}} \left(2 - \frac{u_w}{U_{pw}} \right) \dots\dots\dots (5)$$

ただし, ' は x による微分係数を表し, δ_2 は運動量厚さ, H は δ_1/δ_2 , τ_w は壁面摩擦応力である.

3.2 速度分布形 境界層外は自由渦流れとし, 速度分布形は $hU_p = h_s U_{ps} = U_{pw}$ で近似する. ここで U_{ps} は水表面速度, $h_s = 1 + k\delta_s$, δ_s は水深である. 境界層内の速度分布形は $\eta (=y/\delta)$ の四次多項式で近似する. そして係数を決めるため, 次の境界条件を用いる. ここで, 式(3)の $y=\delta$ の条件は境界層外の渦なし流れの条件であるが, 次式の $\eta=1$ の条件はその流れに滑らかに接続する条件である.

$$\left. \begin{aligned} \eta=0 \text{ で } u &= u_w \\ \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k \frac{\partial u}{\partial y} \right] &= -U_{pw} U_{pw}' \\ \eta=1 \text{ で } u &= U_p \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial U_p}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 U_p}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

$\eta=0$ における第2の条件において, $k^2\delta^2$ の大きさの項は無視してある.

上の境界条件と $U_p = U_{pw}/(1+k\delta)$ を用いれば, 速度分布形は次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{u}{U_p} &= \frac{u_w}{U_{pw}} \left(1 + \frac{k^2\delta^2 - 12}{k\delta + 6} \eta - \frac{3k\delta(k\delta + 2)}{k\delta + 6} \eta^2 \right. \\ &+ \frac{3k^2\delta^2 + 8k\delta + 12}{k\delta + 6} \eta^3 - \frac{k^2\delta^2 + 3k\delta + 6}{k\delta + 6} \eta^4 \Big) \\ &+ 1 - (1+\eta)(1-\eta)^3 + \Lambda \frac{\eta(1-\eta)^3}{6} \\ &+ \frac{(k\delta/6)(\Lambda + 12)}{1 + k\delta/6} \cdot \frac{\eta(1-\eta)^3}{6} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ただし, $\Lambda = (\delta^2/\nu)dU_{pw}/dx$ である. 式(5)の δ_1 , δ_2 は式(7)を式(4)に代入することによって求められるが, その結果はきわめて長い式になる. たとえば, δ_2 の表示式は対数項も含む $k\delta$ の十次の多項式になる. このように高次の $k\delta$ の式から δ を求める場合, 1 ステップごとに変化する Λ , $k\delta$, u_w/U_{pw} に対して物理的に意味のある根をみつけ出すのは難しい. そこで δ_1/δ , δ_2/δ の表示式についても $k\delta$ の二次以上の大きさのオーダーの項を無視すれば, 次のようになる.

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{36 - \Lambda}{120} + \frac{\Lambda - 12}{240} k\delta - \frac{u_w}{U_{pw}} \cdot \frac{6 - k\delta}{20} \dots\dots (8)$$

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \frac{37}{315} \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072} - k\delta \left(\frac{71}{1890} - \frac{19\Lambda}{11340} - \frac{19}{272160} \Lambda^2 \right) + \frac{u_w}{U_{pw}} \left\{ \left(-\frac{17}{126} - \frac{11}{1512} \Lambda \right) + k\delta \left(\frac{221}{3780} + \frac{113}{45360} \Lambda \right) \right\} + \frac{u_w^2}{U_{pw}^2} \left\{ \frac{23}{126} + k\delta \frac{47}{3780} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

また、 τ_w は次の式で表される。

$$\frac{\delta \tau_w}{\mu U_{pw}} = \frac{u_w}{U_{pw}} \left(\frac{-6k\delta - 12}{k\delta + 6} \right) + \frac{\Lambda + 12}{k\delta + 6} \dots\dots\dots (10)$$

上式は $u_w = k = 0$ のとき Pohlhausen の式⁽¹⁶⁾と一致する。

3.3 連続の条件および水表面の条件 流れは x 方向に流量が変わらないという連続の条件を満たさねばならない。境界層内では速度分布形(7)を用い、また渦なし流れ内では自由渦流れの速度分布形を用いると、この流れに対する連続の条件式は次のようになる。

$$\int_0^{k\delta_s} \frac{u}{U_{pw}} d(ky) = k\delta \left[\frac{84 + \Lambda}{120} - \frac{\Lambda + 108}{240} k\delta + \frac{u_w}{U_{pw}} \frac{6 - k\delta}{20} \right] + \left[k\delta \left(\frac{\delta_s}{\delta} - 1 \right) - \frac{1}{2} (k\delta)^2 \times \left\{ \left(\frac{\delta_s}{\delta} \right)^2 - 1 \right\} \right] = \text{const} \dots\dots\dots (11)$$

ただし、 δ_s は水深である。上式においては、 $k\delta$ の三次以上の大きさのオーダの項を無視した。

次に自由表面では空気によるせん断応力を無視して、渦なし条件を適用すると次のベルヌイの式が成立する。

$$\frac{U_{ps}^2}{2} + g \frac{h_s}{k} \cos(kx) = \text{const} \dots\dots\dots (12)$$

ただし、 $x=0$ は円柱の頂点である。

4. 計算方法

運動量積分方程式(5)を解くために式(8)~(12)および $\Lambda = (\delta^2/\nu) \cdot (dU_{pw}/dx)$, $U_{pw} = h_s U_{ps}$ なる関係式を用いる。

数値計算の初期値と境界値は次に示すような値を用いた。初期値は回転速度比 u_w/V_{s0} が零の場合は、初速度 $V_{s0} (= U_{ps0})$ としてはノズル出口速度、初期水深 δ_{s0} としてはノズル出口高さを用い、境界層厚さ δ_0 については測定が困難なので、水深 δ_s の計算値が実験値と一致するような値を初期値とした。 Λ はノズルの断面形状が偏平な円であるので、初期値 ($x=0$) より上流で速度は一定と近似して求めた。 $\delta_2, \delta_1, \tau_w$ の初期値は式(8)~(10)を用いて求めた。 u_w/V_{s0} が零でない場合は、零の場合と同じ出口流量になるように初期値 (V_{s0}) を与えた。

境界値 (U_{pw}) は一つ前の計算サイクルの δ および Λ を用いて式(11), (12)より δ_s, U_{ps} を求め、 $U_{pw} = h_s U_{ps}$ から求められたものを用いた。ただし、第1回めのサイクルでは境界層なし ($\delta=0$) の場合の U_{pw} を用いた。

運動量積分方程式(5)の数値解は Runge-Kutta-Gill 法により求めた。 x 方向のステップ幅は種々試み、計算精度と時間の妥協点、すなわち、 5° 間隔とした。与えられた x の終点での現サイクルの δ の値が前サイクルの δ の値の 99.9~100.1% 内におさまったとき収束したものとした。

なお、数値計算にはパーソナルコンピュータ (FM-11EX) を用いた。

5. 計算値と実験値との比較および考察

図1は実験装置の概略である。水はチャネル④の底から供給され、円柱⑧ (半径×長さ=250 mm×200 mm) の頂点に出口のある可変出口高さノズル⑥を通して円柱表面に噴き出される。図1中にはノズル部の

図1 実験装置

図2 層流領域と乱流領域

拡大図も示した。ノズルは円柱の全長にわたって高さ δ_{s0} が一定であり、上唇 (◎) の断面形はだ円である。実験はノズル出口速度 $V_{s0}(=U_{ps0}=1\sim 3\text{ m/s})$ 、ノズル高さ $\delta_{s0}(=1\sim 15\text{ mm})$ 、および円柱の周速度 $u_w(u_w/V_{s0}=0\sim 3)$ を種々変化させて行った。測定は水深のみについて行い、断面速度分布形などについては、水深が $1\sim 15\text{ mm}$ と非常に浅く測定がきわめて困難

であるので行わなかった。水深はマイクロメータで先のとがった針が水面および円柱に接する位置を求めて測定した。したがって、計算値と比較する実験値は水深のみである。計算と実験の範囲内(層流)では、同一の条件に対してただ一通りの計算結果と実験結果が得られており、さらに、壁面摩擦応力、排除厚さ、運動量厚さなどの計算結果は実験の水深の変化ときわめて合理的に対応しているので、水深のみとの比較でも理論の検証はできるものと思われる。

図2は各無次元ノズル高さ $k\delta_{s0}$ をパラメータとして、乱流領域と層流領域の境界を示したものである。すなわち、各折線の左側の Re_0 と u_w/V_{s0} では流れは層流であり、右側では乱流である。この場合、層流か乱流かは水面が鏡面反射をするか散乱反射をするかで決めた。

さて、上の実験の層流領域における水深の測定結果と4章で述べた計算方法による計算結果を以下に比較して示す。計算に用いた独立変数は円柱表面に沿う長さ x であるが、直観的に見やすくするため、結果はノズル出口 ($x=0$: 円柱頂点) から測った角度 θ を用いて示す。境界層厚さの初期値 δ_0 は速度分布形を基に計算したノズルの流量係数にして $0.98\sim 0.99$ に相当した。

図3 水深の計算値と実験値の比較

図4

図5 壁面摩擦応力

図3中に無次元水深 $k\delta_s$ (以下、水深) の計算値と実験値 (図3中○印) とを比較して示す。図3中には境界層厚さ $k\delta$ の計算値も示しておいた。この場合、 $k\delta_0 = 0.4 \times 10^{-3}$ を用いている。図3(b)は図3(a)と比べて出口流速 (V_{s0}) は等しいが、ノズル高さは2.5倍である。図3(c)は図3(b)と比べてノズル高さは等しいが、出口流速は約2倍である。図3からわかるように実験値と計算値はよく一致している。水深 $k\delta_s$ は $u_w/V_{s0} = 0$ の場合、特に Re_0 の小さいときには $\theta = 0^\circ$ 付近で一度増加するが、おおむね θ の増加とともに減少している。このことは、この流れが重力による増速流であることと、流れの連続性により理解できる。回転速度比 $u_w/V_{s0} = 0$ の場合 (実線)、 $\theta = 0^\circ$ 付近で $k\delta_s$ は上に凸状の曲線をしているのに対し、 $u_w/V_{s0} \neq 0$ の場合 (破線および一点鎖線)、 $\theta = 0^\circ$ 付近で $k\delta_s$ は下に凸状の曲線をしている。このようなことは、 $\theta = 0^\circ$ 付近では構造上の理由から正確な水深が測定されていないので実験値として示すことはできないが、図3(b)の水深の計算値の縦座標の目盛を拡大してみればよくわかる。図4(a)がそれである。図4から u_w/V_{s0} による水深の相違は $\theta = 0^\circ$ 付近で生じていることがわかる。このような水深の初期の変化のようすは $k\delta$ の初期の発達状況によるところが大きい。すなわち、 $k\delta$ は $u_w/V_{s0} = 0$ の場合、 $u_w/V_{s0} \neq 0$ の場合に比べて θ の小さいところでより大きく発達している (図3)。一方、同じ出口水深 [図3(b), (c)] で比べると Re_0 の小さいほう [図3(b)] が水深が速く浅くなることわかる。図3(b), (c)の水深 $k\delta_s$ の計算結果のみを比較して示したのが図4(b)である。ほぼ一定の u_w/V_{s0} についてみれば、 Re_0 が大きいほうが $k\delta_s$ の減少量は少ないことが明確にわかる。このような相違は初速度が大きいほど重力の影響が相対的に小さくなることによる。

上述のようなノズル出口 ($\theta = 0^\circ$) 付近における水深 $k\delta_s$ への u_w/V_{s0} の影響のメカニズムを調べるため図5および図6にそれぞれ壁面摩擦応力 $\tau_w / \rho U_{pw}^2$ および無次元排除厚さ $k\delta_1$ (以下、排除厚さ) と無次元運動量厚さ $k\delta_2$ (以下運動量厚さ) の計算結果を示す。図6

図6 排除厚さと運動量厚さ

には速度分布形のパラメータ $H(\delta_1/\delta_2)$ も示してある。図5によれば、 u_w/V_{s0} が大きくなると $\theta = 0^\circ$ 付近の壁面摩擦応力が急激に小さくなり、負の値になっていることがわかる。一方、図6によれば、 u_w/V_{s0} を大きくすれば $\theta = 0^\circ$ 付近の排除厚さ $k\delta_1$ 、(運動量厚さ $k\delta_2$) は急激に薄くなり、負の値になっている。すなわち、ノズル出口近傍では u_w/V_{s0} を大きくすることにより境界層内の水は壁面摩擦によって下流に引っぱられ (図5)、その結果、境界層の排除厚さが薄くなり、さらに負になる。そのため、水深 δ_s が浅くなる。

なお、以上の計算を曲率の影響を無視して行った場合、精度は落ちるにしてもよく似たものになる可能性はある。ただ、その場合、境界層外端の速度分布形のマッチングに整合性が得られないなど、理論的にはかなり粗いものになる。

6. 結 論

水平な自軸まわりに回転している円柱表面の流れに関して、層流領域を実験的に求め、その範囲内で積分法により数値解を求めた。その結果、本研究は次のようにまとめられる。

(1) 水表面がある場合の境界層の式(1)、(2)および境界条件(3)より運動量積分方程式(5)を導いた。

(2) 三つのパラメータ Λ , $k\delta$, u_w/U_{pw} を用いた四次多項式近似の速度分布形(7)、連続の条件(11)および水表面におけるエネルギー保存の条件を用いて数値解を得、水深 $k\delta_s$ 、境界層厚さ $k\delta$ 、 $k\delta_1$ 、 $k\delta_2$ 、壁面摩擦応力 $\tau_w / \rho U_{pw}^2$ を求めた。

(3) 水深 $k\delta_s$ の計算値と実験値はよく一致し、ノズル出口近傍における水深 $k\delta_s$ の u_w/V_{s0} による急激な変化は $k\delta$ 、 $k\delta_1$ 、 $k\delta_2$ 、 $\tau_w / \rho U_{pw}^2$ の計算結果とよく対応する。

文 献

- (1) Kavesh, S., Liquid Quenching of Free Jet Spun Metal Filaments, U. S. Patent No. 3845805, (1974-11).
- (2) 大西・ほか2名, 日本金属学会誌, 45-7 (昭56), 751.
- (3) 大西, 鉄鋼界, (昭62), 16.
- (4) 谷, 機誌, 52-372 (昭24), 476.
- (5) 谷, 機誌, 57-428 (昭29), 596.
- (6) 伊藤, 機論, 18-69 (昭27), 23.
- (7) Murphy, J. S., *J. Aeronaut. Sci.*, 20 (1953), 338.
- (8) Yen, K. T. and Toba, K., *J. Aerospace Sci.*, 28 (1961), 877.
- (9) Hayasi, N., *AIAA J.*, 1 (1963), 914.
- (10) Van Dyke, M., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1 (1969), 265.
- (11) So, R. M. C., *Trans. ASME, J. Fluid Eng.*, 98 (1976), 328.
- (12) Phillips, O. M., *J. Fluid Mech.*, 7 (1960), 340.
- (13) Ruschak, K. J. and Scriven, L. E., *J. Fluid Mech.*, 76-1 (1976), 113.
- (14) Pedley, T. J., *J. Fluid Mech.*, 30-1 (1967), 127.
- (15) Moffatt, H. K., *J. Méca.*, 16-5 (1977), 651.
- (16) Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, (1960), 246.