GSMAC 有限要素法による非圧縮粘性流体の解析*

(解析スキームの改良)

河合 秀樹^{*1}, 澤田 達男^{*2}, 棚橋 隆彦^{*2}

GSMAC-FEM for Incompressible Viscous Flow Analysis

(A Modified GSMAC Method)

Hideki KAWAI, Tatsuo SAWADA, and Takahiko TANAHASHI

The GSMAC-FEM (Generalized Simplified Marker and Cell FEM) which is an extension of the SMAC-FDM is a stable and fast scheme for the incompressible viscous flow. The rotation form of the Navier-Stokes equation in which velocity and Bernoulli function are variables is represented in the GSMAC method. Velocity components and Bernoulli function are interpolated as a linear function and a constant function. This interpolation is simple and convenient in making the mesh system. On the contrary, the approximation which is mentioned above makes it difficult to analyze inlet-exit flow including the Neuman's boundary conditions. The present paper shows a modified GSMAC method which is available for high Reynolds flows with Neumann's boundary conditions (especially the pressure boundary). The modified scheme consists of an algorithm which satisfies the continuity equation much more than the previous GSMAC method.

Key Words: GSMAC Method, Direct Simulation, HSMAC Method, Finite Element Method, Incompressible Viscous Flow, High Reynolds Number, Neumann's Boundary Condition

1. 緒 言

GSMAC 法⁽¹⁾ (Generalized Simplified MAC method) は非圧縮粘性流体の差分解析として知られる MAC⁽²⁾法 (Marker and Cell method) の概念を有限要素法に応用したスキームであり, 以下の特徴を有する。

(1) Chorin⁽³⁾によって提案された流れ場の直交分解法を用いている。すなわち, 圧力を陰的に, 速度を陽的に離散化し, 流れ場を縦波成分と横波成分に分けて解析を行う。

(2) スタガードメッシュにおける質量流量の正確な計算法⁽²⁾を任意形状メッシュにおいて確立している。

(3) サイクル誤差自己調整法⁽⁴⁾によって連続の式における累積誤差が自動的に減少される。

(4) 支配方程式を回転形で表すことにより, 速度とエネルギーを変数として取扱う。

以上の特徴により GSMAC 法は高レイノルズ数流れを有限要素法で安定に解析することができる。

差分法のスタガードメッシュでは直交格子点上に速度を, 格子内に圧力をそれぞれ配置し, 格子間質量流量を正確に計算する。これが解析の不安定性を生じさせる圧力振動を除去できる理由である。一方, 棚橋・斎藤⁽⁵⁾は要素間の質量流量が, 修正速度ポテンシャルのこう配の要素境界上での周回積分で表されることを示した。すなわち, 修正速度ポテンシャルを用いれば差分法のスタガードメッシュと同様, 任意形状要素でも正確な質量流量の計算が行える。またこの周回積分は, 速度をノード点上で定義し, ベルヌーイ関数を要素内で一定に補間する配置方法で行われる。したがって本計算法は差分法で用いられるスタガードメッシュでの計算法よりも簡便であり, メッシュ作成上非常に便利である。

しかし, この変数配置および補間法を用いると, 運動方程式を弱形式化した結果, 反復アルゴリズムの中にもベルヌーイ関数やうず度を含む第2種境界条件項が生じる。このため現在の GSMAC 法では第2種境界条件の設定が複雑であり, 不安定現象を発生させる⁽⁶⁾。

本報はこのような境界条件 (特に圧力に関して) を

* 昭和63年8月26日 第952回講演会において講演, 原稿受付 昭和63年3月10日。

^{*1} 正員, 鐘淵化学工業(株)生産技術研究所 (〒676 高砂市高砂町宮前町1-8)。

^{*2} 正員, 慶應義塾大学理工学部 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。

設定しても流れを安定に解析するアルゴリズムを提案し、GSMAC法をより実用化することを目的とする。すなわち HSMAC (Highly SMAC method) 法⁽⁷⁾の概念を応用し、連続の式を厳密に評価するアルゴリズムに改良する。予測子・修正子法における速度の修正式は運動方程式を直交分解することにより得られる。この定式化において第2種境界条件を示す項が表れる。本解析法は速度をたえず連続の式に代入しながら修正する。このため解は反復の中に表れる境界項を省略しても物理現象から離れず、流れが安定に解析されることを示す。

主 な 記 号

$D_{\max}$: 連続の式の満足度 $= \max(\nabla \cdot \mathbf{u})_e$
 $\bar{H}_0$: 基準ベルヌーイ関数 $= \bar{p}_0/\bar{\rho} + \bar{u}_0^2/2 + \bar{\Omega}_0$
 H : 無次元ベルヌーイ関数 $= \bar{H}/\bar{H}_0$
 $H^* = H^{n+1} - H^n$
 I : 虚数単位
 $\bar{L}$: 代表寸法
 l, m : 単位法線ベクトルの方向余弦
 n_{END} : 最終時間ステップ数
 n : 単位法線ベクトル
 p : 無次元圧力 $= (\bar{p} - \bar{p}_0)/\bar{\rho} \bar{U}^2$
 $\bar{p}_0$: 基準圧力
 Re : Reynolds 数 $= \bar{U} \bar{L} / \bar{\nu}$
 t : 無次元時間 $= \bar{t} \bar{U} / \bar{L}$
 $\mathbf{u}$: 無次元速度ベクトル
 $\bar{\mathbf{u}}$: 無次元速度予測子ベクトル
 $\bar{\mathbf{u}}_0$: 基準速度ベクトル
 $\bar{U}$: 代表速度
 Γ_1 : 第1種境界条件
 Γ_2 : 第2種境界条件
 $\boldsymbol{\omega}$: 無次元うず度ベクトル
 $\bar{\Omega}_0$: 基準ポテンシャル
 Δx : x 方向刻み幅
 Δy : y 方向刻み幅
 Δt : 時間刻み幅
 $\Delta \tau$: ϕ の解法における疑似時間刻み幅
 $\Delta \tau_c$: $\Delta \tau$ の理論限界値
 λ : 固有値
 $\bar{\nu}$: 動粘度
 $\bar{\rho}$: 密度
 ϕ : 修正速度ポテンシャル
 ε_1 : 連続の式に対する収束判定基準
 ε_2 : 速度ポテンシャルに対する収束判定基準
 上付き添字

n : 時間ステップ数

k : 修正速度ポテンシャルの反復回数

n : 有次元量

2. GSMAC 法

2.1 基礎方程式 非圧縮粘性流体の基礎方程式は回転形表示によるナビヤ・ストークスの方程式と連続の式で以下のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla H - \frac{1}{Re} \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

ここで H はベルヌーイ関数、 $\boldsymbol{\omega}$ はうず度ベクトル、 Re はレイノルズ数である。式(1)、(2)において速度を陽的、 H を陰的に離散化し、時間分割法を用いて分解すれば

$$\frac{\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla H^n - \frac{1}{Re} \nabla \times \boldsymbol{\omega}^n + \mathbf{u}^n \times \boldsymbol{\omega}^n \quad (3)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}}{\Delta t} = -\nabla H^* \quad (4)$$

$$\nabla^2 H^* = \frac{\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}}{\Delta t} \quad (5)$$

となる。ただし、 $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$ とする。式(3)および式(4)を Galerkin 法によって定式化する。境界 Γ_1 上で零になる重み関数を $\delta u_i (i=1, 2, 3)$ とすれば、式(3)、(4)は以下のように弱形式化される。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \frac{\bar{u}_i - u_i^n}{\Delta t} \delta u_i d\Omega &= \int_{\Omega_e} H^n \delta u_{i,i} d\Omega \\ &+ \frac{1}{Re} \int_{\Omega_e} \varepsilon_{ijk} \omega_k^n \delta u_{i,j} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega_e} \varepsilon_{ijk} u_j^n \omega_k^n \delta u_{i,j} d\Omega \\ &- \int_{\Gamma_2} \left[H^n n_i + \frac{1}{Re} \varepsilon_{ijk} \omega_k^n n_j \right] \delta u_i d\Gamma \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \frac{u_i^{n+1} - \bar{u}_i}{\Delta t} \delta u_i d\Omega \\ = \int_{\Omega_e} H^* \delta u_{i,i} d\Omega - \int_{\Gamma_2} H^* n_i \delta u_i d\Gamma \quad (7) \end{aligned}$$

ここで Ω_e は要素を表し、 ε はレビ・チビタ記号である。式(6)の右辺第4項、および式(7)の右辺第2項は第2種境界条件を満足する境界項である。また式(5)を要素内で積分し、ガウスの発散定理を用いれば

$$\int_{\Gamma_e} \left(\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \quad (8)$$

を得る。ここで Γ_e は要素境界であり、 ϕ は修正速度ポテンシャルで、 $\phi = H^* \Delta t$ である。式(8)は要素を通過する質量流量が、要素境界上での修正速度ポテンシャルのこう配の周回積分で表されることを意味する。したがって、任意形状のメッシュでもスタガードメシ

と同等に流入・流出量を正確に求めることが可能となる。式(6), (7)および式(8)はアイソパラメトリック要素により速度に関して双一次, H, ϕ および ω に関して要素内で一定に補間近似される。なお, GSMAC 法で用いられる変数配置を図1に示す。

2.2 解析アルゴリズム 従来の GSMAC 法によるアルゴリズム (以下 S タイプと略す) と今回改良するアルゴリズム (以下 H タイプと略す) を図2に示す。ただし流れ図は PAD⁽⁸⁾ で表示されている。GSMAC 法は修正速度ポテンシャル ϕ を求めるためにポアソン方程式(5)を解く。得られた ϕ で速度を修正すれば, $n+1$ 時刻の連続の式は自動的に満足される。しかし実際は質量行列の集中化による誤差のため, 連続の式は必ずしも正確に満足されない。すなわち, ϕ を反復によって厳密に求めても, その効果が十分に発揮されない欠点がある。この点を改良する。改良された H タイプでは速度を連続の式に逐次代入して反復修正する。この方法は質量行列の集中化による誤差を少なくし, 連続の式をより厳密に満足するだけでなく以下の特徴を有する。S タイプにおいて式(7)は $n+1$ 時刻の速度を求めるための厳密式である。ところが H タイプでは, 式(7)は連続の式を満足させるための単なる修正式にすぎない。すなわち, 式(7)の右辺第二項(圧力条件を含む境界項)を省略しても速度・エネルギー同時緩和法を採用するから, 正しい解が得られる。このため第2種境界条件を設定してもアルゴリズムが複雑にならず, 安定した解析を行うことができる。

H タイプのアルゴリズムはヘルムホルツの定理により, ある時刻においてうず度が保存されるように速度を反復修正する。このように陰的にある種の保存条件を付加することは収束を早める点でも好ましいものと考えられている⁽⁹⁾。

以上より H タイプは(1)連続の式に対する厳密性が高い, (2)第2

種境界条件を指定しても容易に解析できるなどの利点を有する。その反面, H タイプは ϕ を求めるループに加えて連続の式を満足させる反復が増えるため, アルゴリズムが二重になる欠点もある。しかし ϕ を求める反復は連続の式を満足させる反復に含まれる。したがって, ϕ の解法が数値的に安定であるならば ϕ を厳密に求める必要はなく, その反復過程は省略され得る。

3. ポアソン方程式(5)の安定性解析

2.2 節で述べたように GSMAC 法におけるベルヌーイ関数, H の安定性は修正速度ポテンシャル ϕ に関するポアソン方程式(5)の解法に依存する。式(5)の解法が数値的に安定であれば H のチェックボード的な振動は生じない。このため式(5)の解の安定性を理論的に検討することが重要である。しかし, 任意メッシュ形状では検討が複雑である。そこで直交メッシュを用い, 式(5)に対してノイマンの安定性解析を行う。

図3に修正速度ポテンシャル ϕ の位置指標を示す。GSMAC 法において式(5)は Gauss の発散定理より要素を通過する質量流量を表す式(8)に変換され, 重心位置 (p, q) において発展的に

$$\phi_{pq}^{k+1} = \phi_{pq}^k - \frac{\Delta \tau}{S_e} \int_{\Gamma_e} \left(\bar{u} \cdot n - \frac{\partial \phi^k}{\partial n} \right) d\Gamma \dots \dots (9)$$

と離散化される。ここで S_e は要素の面積である。したがって, 式(9)の安定性解析を行えばよい。図3に示したような点 (p, q) を含む四角形要素を考え, 点 a, b に着目する。点 $(p, q), a, (p+1, q), b$ で与えられる

図1 GSMAC 法の変数配置

図2 SタイプとHタイプのアルゴリズム

四角形の面積を S_{ab} , この四角形の辺に沿う微小線素を ds とすれば, この四角形の重心における ϕ のこの配は近似的に

$$\text{grad } \phi = \frac{1}{S_{ab}} \oint_c \phi n dS \quad (10)$$

と表される。同様の操作を四角形要素の他の辺についても行う。メッシュの直交性を考慮すれば式(9)は空間的に

$$\phi_{pq}^{k+1} = \phi_{pq}^k - \frac{\Delta \tau}{S_e} \{ D - l_1(\phi_{p+1,q}^k + \phi_{p-1,q}^k - 2\phi_{pq}^k) - l_2(\phi_{p,q+1}^k + \phi_{p,q-1}^k - 2\phi_{pq}^k) \} \quad (11)$$

と離散化される。ここで D , l_1 , および l_2 は

$$D = \oint_{\Gamma_e} \tilde{u} \cdot n d\Gamma \quad (12)$$

$$l_1 = \frac{l_{ab}^2}{2S_{ab}}, \quad l_2 = \frac{l_{bc}^2}{2S_{bc}} \quad (13)$$

である。ただし, 式(12)の $d\Gamma$ は要素 pq の辺に沿う微小線素であり, l_{ab} , l_{bc} はそれぞれ辺 ab , bc の長さを表す。また S_{bc} は点 (p, q) , b , $(p, q+1)$, c で与えられる四角形の面積を表す。

ϕ に関するフーリエ級数各成分は

$$\phi_{pq}^k = V^k e^{I(p\theta_x + q\theta_y)} \quad (14)$$

と表される。ここで V^k は波数 k_x および k_y における特定成分の振幅であり, I は虚数単位である。また添字 k は発展形解法におけるステップを表す。式(14)を式(11)に代入し, V について整理すれば増幅係数行列は以下のように求められる。

$$\begin{bmatrix} V^{k+1} \\ V^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 1-A \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^k \\ V^{k-1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

ここで

$$A = 2(1 - c l_1 - c l_2 + c l_1 \cos \theta_x + c l_2 \cos \theta_y) \quad (16)$$

であり, $c = \Delta \tau / S_e$, $\theta_x = k_x \Delta x$, $\theta_y = k_y \Delta y$ である。式(15)より得られる固有方程式から固有値 λ は

$$\lambda = 1, A - 1 \quad (17)$$

と決定される。式(15)が発展解法において安定である

ためには $|\lambda| \leq 1$ であるから

$$0 \leq c \leq \frac{S_e}{2(l_{ab}^2 + l_{bc}^2)} \quad (18)$$

を得る。

4. 解析結果例

4.1 ポアソン方程式(5)の解法の安定性 式(5)の解法の安定性を具体的に調べるため, 予備的な解析を行ってみる。解析モデルとして図4(a)-(I)に示す二次元流入・流出問題を考える。境界条件として入口 $v = -1$, 出口 $u = 1$ を与えた場合の内部流れを取扱う。流れは定常である。ただし解析には 20×20 正方形等分割メッシュを用いた。

図5に無次元時間 $t = 1000 \Delta t$ ($\Delta t = 0.001$) までの解析に要した CPU 時間と式(5)の疑似時間刻み幅 $\Delta \tau$ の関係を示す。 $\Delta \tau_c = 1.125 \times 10^{-4}$ は3章で求められた理論限界値である。これより CPU 所要時間は理論限界値で極小値をとることがわかる。すなわち安定性解析から得られた $\Delta \tau_c$ の値は本解析の最適値を表している。

式(5)を図1の変数配置のもとで解く方法は圧力振動を生じさせる。平岡⁽¹⁰⁾は図4(a)-(I)のモデルでこのことを示している。しかし, 以上の解析より, 式(8)による質量流量の表示形を用いれば図1の変数配置でも流れは安定に解析される。ここで, 正方形ダクト一辺の長さとして与えられるレイノルズ数は $Re = 100$ とし, クーラン数が解析に与える影響を考慮してその最大値よりも十分小さくなるように Δt を選んだ。図6は $T = 1000 \Delta t$ における流線と圧力分布である。

H タイプにおいて $\Delta \tau$ が本理論限界値以下の範囲であれば式(5)の解法に用いる反復を省略しても解は十分収束した。よって以後の解析では式(5)に対する反復を行わない。これより H タイプは従来の S タイプと同程度の高速性を保つことができる。

4.2 二次元キャビティ内流れ 従来よく用いられる二次元キャビティ流れを扱い, 本解析法の検証を行う。解析モデルを図4(b)に示す。流体は静止状態から上壁の可動面に引きずられて流れる。レイノルズ数は正方形一辺の長さとして定義される。図7は $Re = 1000$ におけるキャビティ中央部の $t = 50$ での速度分布である。ただし $\epsilon_2 = 0.001$, $\Delta t = 0.001$ であり, メッシュは 50×50 不等分割とした。図7中には望月⁽¹¹⁾の実験結果および Ghia ら⁽¹²⁾による数値解析結果も示した。H タイプの速度分布はこれらと比較的良好な一致を示す。なお, H タイプおよび S タイプの

図3 ϕ の変数配置

図 4 解析モデル

図 5 Δt と CPU 時間

速度分布および圧力分布はほとんど同一であった。つぎに $Re=200$ における解析を行い、水上の乗数法⁽¹⁴⁾による結果と比較した。その結果、圧力分布は良好に一致した(図8)。図9は $t=0$ および $t=10\Delta t$ から1ステップ進行させた場合の反復回数と連続の式の満足度(D_{max})の関係を示す。ただし $\Delta t=0.1$ であり、HおよびSタイプの比較を明確にするため、極端に大きい値を取っている。Sタイプにおいて、各時刻での連続の式の満足度は反復回数を増加させてもほとんど改善されない。連続の式の満足度は時間進行にしたがって、徐々に改善されていく。一方、Hタイプでの連続の式の満足度は、Sタイプに比べてはるかに良好である。これらは初期段階の流れの結果である。すなわち初期の非定常流を解析する場合、特にHタイプが優位である。また、 Δt の取りうる最大値はSタイプで0.1、Hタイプで0.14であった。これよりHタイプはSタイプに比べてより大きな Δt を取りうる。

4.3 平行平板間流れ 圧力境界条件を仮定した検証問題として平行平板間流れを扱う〔図4(c)〕。

まず両タイプの差異を比較するために境界条件として入口流速が放物形分布、出口圧力が一定条件のモデルを解析した。連続の式の収束状況を調べた結果を図10に示す。縦軸は連続の式の満足度(D_{max})、横軸は時間ステップ数である。Sタイプでは時間進行にしたが

(a) 流線

(b) 圧力分布

図 6 正方ダクト内流れ ($Re=100, t=2$)

って D_{max} は急激に発散するが H タイプでは良好に収束することが明らかである。以上を踏まえ $x=0.4$ 間の圧力差を $\Delta p=0.3$ に設定したときの流れを H タイプで解析した。図11および図12にその結果を示す。図11は中心面主流方向速度の時間的変化であり、図12は各時間における主流速度の y 方向分布である。両者とも理論値と良好に一致する。ただし過渡状態を表す厳密解は以下に示される。

$$u = -\frac{Re}{2} \left(\frac{dp}{dx} \right) \left\{ (1-y^2) - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_m}{\beta_m^3} \cos \beta_m y \exp \left(-\frac{\beta_m^2}{Re} t \right) \right\}$$

$$\beta_m = (2m-1)\pi/2 \dots\dots\dots (19)$$

4.4 正方ダクト内流れ 本スキームを用いて、

図 7 速度分布 (キャビティ内流れ, $Re=1000$)

(a) Hタイプによる解析

(b) 乗数法による解析

図 8 圧力分布の比較 (キャビティ内流れ, $Re=200$)

図 9 反復回数に対する連続の式の満足度

より高レイノルズ数流れの解析を行う。解析モデルとして入口境界条件 $v=-1$, 出口境界条件 $p=0$ を指定した場合の正方ダクト内の流れを考える [図 4 (a)-(II)]。ただし $Re=5000$, $\epsilon_1=10^{-4}$ とし, 50×50 不等分割メッシュを用いた。また解析の初期段階では流れの非圧縮性が全領域に伝ばするまで $\Delta t=10^{-4}$ で解析を行い, その後は $\Delta t=10^{-3}$ として時間進行させた。なお S タイプによる同条件の解析結果は発散し, 低レイノルズ数 ($Re=100$) でも安定した結果を得ることはできなかった。

図 13, および図 14 に, 流線および圧力分布の結果を示す。流れは大小さまざまな渦を形成し, 複雑な流動をしている。

図 10 連続の式の満足度

図 11 中心流速の時間的変化 (平行平板内流れ, $\Delta p=0.3$)

図 12 主流速度分布 (平行平板内流れ)

5. 検 討

平岡⁽¹⁰⁾は図1に示す変数配置が圧力の不安定現象を生じさせることを報告している。これによれば有限要素法で解析を行う場合、1要素内のみで変数を配置する方法は圧力モードの振動現象を誘起させる。この回避方法として数要素で構成される配置方法を提案している。しかし、このような配置方法は任意形状メッシュを取扱える有限要素法の利点を半減させてしまう。図1のメッシュは最も単純な変数配置であり、作成がきわめて容易である。SMAC法を通常の定式化で有限要素法に適用する場合、1要素による変数配置では解析が困難になる。しかし、GSMAC法は式(5)にガウスの積分定理を用いて1要素における質量流量を正確に計算するため、単純な変数配置で安定な解析が可能となる。今回の安定性解析はこのことを理論的に裏付けるものであり、直交メッシュにおいては Δt の最適値を予想することができる。

検証解析例として取り上げたキャビティ流れでは周囲が固定境界で囲まれ、流入流出を伴わない。そこで、従来のSタイプでも解析が可能であるため、Hタイ

プでの解析結果との比較に適している。 $Re=1000$ でのHタイプ velocity 分布はSタイプとほとんど同一であり、実験結果ともほぼ一致する。したがって従来のGSMAC法の特徴はそのまま保持されたと考える。また水上の乗数法による結果との比較を $Re=200$ について行い、圧力分布について良好な一致を得た。乗数法はペナルティ関数法的一种である。ペナルティ関数法は定常流の有限要素法解析として知られる。この解析法はペナルティパラメータと連続の式の積で圧力を陽的に表す長所を持つ。しかし通常ペナルティパラメータは、非常に大きな値が取られる。すなわち圧力を正確に計算するためには連続の式を満足させる判定値 ϵ_1 を十分小さくとる必要がある。これよりメッシュ数の増加に伴い、計算時間および反復回数は膨大になる。水上による乗数法は $\epsilon_1=10^{-5}$ を判定値としている。Hタイプでは $\epsilon_1=10^{-2}$ で、乗数法とほぼ同一の圧力分布を得ている。すなわち緩い判定値でも定常流において十分実用的な解が得られる。なお、これと並行して乗数法で、 $\epsilon_1=10^{-2}$ の解析を行った。しかし、計算時間が本解析法の約2倍かかる割には、良好な圧力分布は得られなかった。

圧力設定の境界条件による平行平板間流れの解析結果は時間的および空間的に厳密解と良好に一致した。また正方形ダクト内におけるレイノルズ数、 $Re=5000$ の流れを安定に解析することができた。

圧力を変数とする通常の定式化は第2種境界条件として応力タイプの項を得ることができる。しかし回転形による定式化は H, ω を含むため、保存形の立場から解の安定性に寄与する反面、弱形式化で得られる境界項が複雑になる⁽⁶⁾。このため第2種境界条件として速度の微分形および圧力を与えることになる。Hタイプはこのような流出境界の設定が容易であり、高レイノルズ数領域でも安定して解析ができると考える。

6. 結 言

HSMAC法のアロリズムを応用することにより、うず度が反復過程で不変であることを陰的に組み込むスキームを提案した。これより本解析法は連続の式を従来のGSMAC法よりも厳密に満足する。このスキームにより以下の主な結論を得た。

(1) 本解析法において、ノイマンの安定条件下では ϕ の反復は省略される。したがって全体としてアルゴリズムは二重ループにならず、従来のGSMAC法と同等の高速性を維持する。

(2) 二次元キャビティ内の定常流などの第1種境界条件下における解析が、従来のGSMAC法と同様

図13 流線(正方ダクト内流れ, $Re=5000$, $t=12$)

図14 圧力分布(正方ダクト内流れ, $Re=5000$, $t=12$)

の精度で行われる。また乗数法と比較して H タイプの GSMAC 法は連続の式の満足度を緩くすることができる。

(3) 第 2 種境界条件として、圧力を指定したダクト内の高レイノルズ数流れを安定に解析することができる。

(4) 連続式に対する満足度を適宜、厳密にすることができるため、初期の非定常問題も高精度で解析できる。

本研究の遂行にあたり、慶應義塾大学理工学部学部生、日比 学氏の協力を得たことを付記し、謝意を表す。

文 献

- (1) 金井・棚橋, 機論, 53-487, B (昭 62), 683.

- (2) Harlow, F. H., *Phys. Fluids*, 8-12 (1965), 2182.
(3) Chorin, A. J., *Math. Comput.*, 23 (1969), 341.
(4) Hirt, C. W. and Harlow, F. H., *J. Comput. Phys.*, 2 (1967), 114.
(5) 棚橋・斎藤, 京都大学数理解析研究所講義録, 548 (昭 60), 122.
(6) 斎藤・佐藤, 第 1 回計算力学シンポジウム報文集, (昭 62), 183.
(7) Donea, J., ほか 3 名, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 30 (昭 57), 53.
(8) 川合, PAD プログラミング, (1986), 岩波書店.
(9) 竹光, 機論, 52-478, B (昭 61), 2351.
(10) 平岡, 第四回流れの有限要素シンポジウム講演論文集, (昭 58), 97.
(11) 望月・ほか 2 名, 機論, 52-476, B (昭 61), 1589.
(12) Ghia, U., ほか 2 名, *J. Comput. Phys.*, 48 (1982), 387.
(13) 水上, 第四回流れの有限要素シンポジウム講演論文集, (昭 58), 49.