群陽的反復法による高レイノルズ数
正方形キャビティ内流れの数値解析*村田 滋^{*1}, 里深信行^{*1}, 串山 正^{*1}Numerical Analysis for Square Cavity Flow at High Reynolds Number
Using GEI Method

Shigeru MURATA, Nobuyuki SATOFUKA, and Tadashi KUSHIYAMA

A new iterative method has been developed for calculating steady flows in a square cavity. The steady stream function vorticity equations are discretized with the central finite difference approximation and the resulting system of equations are solved by using the group-explicit-iterative (GEI) method. The calculations are carried out for the case with Reynolds number as high as 10 000 on 257×257 grid points. The computed results are in excellent agreement with those by other methods.

Key Words: Numerical Analysis, Iterative Method, GEI Method, Square Cavity Flow, Steady Flow, Ψ - ω Formulation

1. ま え が き

数値シミュレーションによる流体解析を行う際、ポアソン方程式のような円形偏微分方程式を解く必要がしばしば生ずる。数値的にこの式を正確に解くことは非常に時間を要し、代表的な非圧縮性粘性流体の数値解析法である MAC 法では各時間段階において、ポアソン方程式を精度良く解かねばならず、これに計算時間の大半が費やされる。したがって、このような円形偏微分方程式を精度良く効率的に解析できれば全体の計算時間を著しく短縮することができる。現在、この円形方程式の数値解析には、SOR 法や SLOR 法などがしばしば用いられるが、これらの逐次反復法は通常のスカラ計算機を利用するときには効率的であるが、今後ますます利用が高まると期待されるベクトルおよび並列計算機においては解法の再帰性のため、そのハードウェアの能力を十分利用できないという欠点をもつ。

Evans⁽¹⁾⁽²⁾, 里深⁽³⁾はベクトルおよび並列計算機に適した反復計算法として群陽的反復法 (Group-

Explicit-Iterative method, GEI 法) を提案しているが、この方法は格子点をブロック化し、その組合せを変えて反復計算する手法で、計算手順は完全に陽的であり、その計算効率の高さが確認されている。

本研究では、二次元問題に拡張した GEI 法を用いて、しばしば計算手法の標準的な検定問題として取り上げられる定常正方形キャビティ内流れの解析を行った。従来、この問題はレイノルズ数 10^4 程度までの計算条件で Ghia⁽⁴⁾, Gresho⁽⁵⁾, Kim⁽⁶⁾ など多数の研究者によって扱われているが、本計算では渦度-流れ関数を従属変数とする定常の式を GEI 法を用いて反復計算することによって定常解を求め、高レイノルズ数流れに対する GEI 法の数値解について、その信頼性を検討した。

2. 計 算 手 法

基礎方程式には、渦度輸送方程式と流れ関数に対するポアソンの式を連立させた二次元定常非圧縮性ナビエ・ストークス方程式を用いた。

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + Re \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) = 0 \dots (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta \dots (2)$$

* 昭和63年8月26日 第952回講演会において講演、原稿受付 昭和63年2月5日。

*¹ 正員、京都工芸繊維大学工学学部 (〒606 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

ただし、 ζ は渦度、 ψ は流れ関数、 Re はレイノルズ数、そして x, y はデカルト座標である。上式において、空間微分項を中心差分近似すると、各格子点について差分方程式が得られる。式(2)の差分方程式を格子点 (i, j) について示すと、

$$\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j} + \beta^2(\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}) = -\Delta x^2 \zeta_{i,j} \quad (3)$$

となる。ただし、 Δx は x 方向の空間格子幅、 β は格子比である。同様に、点 $(i+1, j), (i, j+1), (i+1, j+1)$ に関する差分方程式を求めると、まとめて次のように行列を用いて表示できる。 ρ は反復係数である。

四点ブロック

$$\begin{bmatrix} 1+\beta^2+\rho & -1 & -\beta^2 & 0 \\ -1 & 1+\beta^2+\rho & 0 & -\beta^2 \\ -\beta^2 & 0 & 1+\beta^2+\rho & -1 \\ 0 & -\beta^2 & -1 & 1+\beta^2+\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{i,j} \\ \psi_{i+1,j} \\ \psi_{i,j+1} \\ \psi_{i+1,j+1} \end{bmatrix}^{n+1} = - \begin{bmatrix} \Delta x^2 \zeta_{i,j} + (1+\beta^2-\rho)\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j} - \beta^2\psi_{i,j-1} \\ \Delta x^2 \zeta_{i+1,j} + (1+\beta^2-\rho)\psi_{i+1,j} - \psi_{i+2,j} - \beta^2\psi_{i+1,j-1} \\ \Delta x^2 \zeta_{i,j+1} + (1+\beta^2-\rho)\psi_{i,j+1} - \psi_{i-1,j+1} - \beta^2\psi_{i,j+2} \\ \Delta x^2 \zeta_{i+1,j+1} + (1+\beta^2-\rho)\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+2,j+1} - \beta^2\psi_{i+1,j+2} \end{bmatrix}^n \quad (4)$$

式(4)の左辺の行列は 4×4 であるから解析的に反転でき、解は陽的に表される。計算領域をこのような四点ブロックで構成すると、分割数を偶数個に採った場合、図1のように境界近傍にブロック化できない格子点が残る。これらの格子点は二点および一点のブロックとして扱い、計算式はそれぞれ次のように表される。

二点ブロック(i 方向について)

$$\begin{bmatrix} 1+\beta^2+\rho & -1 \\ -1 & 1+\beta^2+\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{i,j} \\ \psi_{i+1,j} \end{bmatrix}^{n+1} = - \begin{bmatrix} \Delta x^2 \zeta_{i,j} + (1+\beta^2-\rho)\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j} - \beta^2(\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}) \\ \Delta x^2 \zeta_{i+1,j} + (1+\beta^2-\rho)\psi_{i+1,j} - \psi_{i+2,j} - \beta^2(\psi_{i+1,j+1} + \psi_{i+1,j-1}) \end{bmatrix}^n \quad (5)$$

一点ブロック

$$(1+\beta^2+\rho)\psi_{i,j}^{n+1} = -\Delta x^2 \zeta_{i,j}^n - (1+\beta^2-\rho)\psi_{i,j}^n + \psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n + \beta^2(\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n) \quad (6)$$

以上の反復計算法を二次元問題に対する群陽的反復法と呼ぶ。余剰点の位置により、格子点のブロック化には4種類のパターンがあり、計算の方向性をなくすため、GEI法は基本的に四つの計算段階をもつことになる。本計算では簡単のために図1に示す第1, 第2計算段階のみ用い、これらの2段階を1反復計算とした。計算手順は式(1), (2)にGEI法を適用し、両式

を交互に解き、反復計算する。

3. 計算条件

本計算で扱う流れ場は図2に示す正方形キャビティ内の定常流である。移動壁には x 軸の負の方向に単位速度を与えた。四方の壁面は一つの流線とみなせるので、その境界条件を

$$\psi(x, 0) = \psi(x, 1) = \psi(0, y) = \psi(1, y) = 0 \quad \cdots (7)$$

と与えた。一方、渦度の境界条件は、流れ関数に関する式(2)から2次精度の式

図1 格子点の組合せ

図2 正方形キャビティ内流れ

$$\zeta(x, 0) = \frac{1}{2\Delta y^2} \{ \phi(x, 2\Delta y) - 8\phi(x, \Delta y) \}$$

$$\zeta(x, 1) = \frac{1}{2\Delta y^2} \{ \phi(x, 1-2\Delta y) - 8\phi(x, 1-\Delta y) \} + \frac{3}{\Delta y}$$

$$\zeta(0, y) = \frac{1}{2\Delta x^2} \{ \phi(2\Delta x, y) - 8\phi(\Delta x, y) \}$$

$$\zeta(1, y) = \frac{1}{2\Delta x^2} \{ \phi(1-2\Delta x, y) - 8\phi(1-\Delta x, y) \} \dots\dots\dots (8)$$

を用いて求めた。また、初期推定値はすべて零を与え、計算打ち切り条件は、

$$\text{Max}|\zeta_j^{n+1} - \zeta_j^n| < 1 \times 10^{-6} (Re \leq 3200)$$

$$\text{Max}|\zeta_j^{n+1} - \zeta_j^n| < 1 \times 10^{-5} (Re > 3200) \dots\dots\dots (9)$$

とした。ただし、初期推定値は、格子点数を増大させる場合は格子点の少ない計算結果とその補間値を利用し、レイノルズ数を高くする場合は低いレイノルズ数の定常解を用い、計算時間を短縮した。

4. 計算結果

本計算で実行したレイノルズ数は1000, 3200, 5000, 7500, 9000, 10000である。表1にそれぞれの

表 1 反復係数値

Re	N	ρ
1000	65, 129	5
3200	129, 257	5
5000	257	10
7500	257	10
9000	257	15
10000	257	20

図 3 収束過程

図 4 定常解の等高線図 (その1)

レイノルズ数において用いた反復係数値 ρ を示す。ただし、全格子点数は N^2 個である。レイノルズ数が増加するにつれ、反復係数値が増大し、式(4)左辺の行列の反転条件が次第にきびしくなっていることがわかる。図3はそれぞれのレイノルズ数について初期推定値から定常解に至る収束過程を示したものである。縦軸は渦度の最大残差

$$\text{Residual of } \zeta = \text{Max} |\zeta_j^{n+1} - \zeta_j^n| \dots\dots\dots (10)$$

であり、横軸は反復計算数である。レイノルズ数3200以下では最大残差は急激に減少しているが、レイノルズ数5000以上ではおよそ10000回の反復計算数からその残差の減少率が著しく低くなっており、定常解を求めることが困難となっている。図4はそれぞれのレイノルズ数に対する解を、渦度および流れ関数の等高線で表したものである。図中における等高線の値は表2に示すアルファベット記号で表されており、これらの値は比較のために Ghia⁽⁴⁾ の値と同じに取った。レイノルズ数1000では下部隅に一つずつ2次渦が認められ、レイノルズ数3200になると右上の渦が非常に顕著になり、左下隅の3次渦も小さいながら現れてくる。この2ケースについては分割数を2とおりにして

計算を行ったが、どちらも格子が細くなると渦中心における流れ関数の絶対値が増大し、渦度分布が若干異なるほかは、渦中心位置、渦の大きさなどあまり著しい変化はなかった。レイノルズ数5000になると、さらに右上の渦が成長し、左下隅の3次渦も明らかに認められる。レイノルズ数7500、9000、10000と左下隅の渦が非常に大きく成長し、左下の2次渦中心が x 軸の正の方向に移動する。分割数128、レイノルズ数

表2 等高線値

Contour letter	Value of ψ	Contour letter	Value of ψ	Contour letter	Value of ζ
a	0.1175	m	1.0×10^{-10}	a	5.0
b	0.1150	n	-1.0×10^{-8}	b	4.0
c	0.1100	o	-1.0×10^{-7}	c	3.0
d	0.1000	p	-1.0×10^{-6}	d	2.0
e	0.0900	q	-1.0×10^{-5}	e	1.0
f	0.0700	r	-5.0×10^{-5}	f	0.5
g	0.0500	s	-1.0×10^{-4}	g	0.0
h	0.0300	t	-2.5×10^{-4}	h	-0.5
i	0.0100	u	-5.0×10^{-4}	i	-1.0
j	1.0×10^{-4}	v	-1.0×10^{-3}	j	-2.0
k	1.0×10^{-5}	w	-1.5×10^{-3}	k	-3.0
l	1.0×10^{-7}	x	-3.0×10^{-3}

図4 定常解の等高線図 (その2)

図4 定常解の等高線図(その3)

図5 u 分布 ($x=0.5$) 図6 v 分布 ($y=0.5$) 図7 ζ 分布 ($y=1.0$)

3 200 の場合と分割数 256, レイノルズ数 5 000 以上の場合について渦度分布図をみると, 左上隅に微小な解の振動が確認でき, これはレイノルズ数が大きくなるにつれて顕著となっている。この振動は移動壁面に与

えた単位速度と垂直壁面に与えた粘着条件が矛盾することから生ずる特異性を表すものと考えられる。図 5, 6, 7 にそれぞれ $x=0.5$ における x 方向の速度分布, $y=0.5$ における y 方向の速度分布, および移動壁面における渦度分布を示す。原点はレイノルズ数によって移動させており, また図中の○印は Ghia らによる計算結果を示すが, 本計算結果はこれに良く一致している。レイノルズ数が高くなるにつれ, 壁面近傍の速度こう配が増大しており, 境界層は薄くなっている。そして, 速度分布の線形領域は次第に増しており, 高

表 3 渦中心における流れ関数の比較

Re=1000		
Present	Gresho	Ghia
0.115 (0.4688,0.5703)	0.114 (——, ——)	0.118 (0.4687,0.5625)
-1.69×10^{-3} (0.1328,0.1172)	-1.76×10^{-3} (——, ——)	-1.75×10^{-3} (0.1406,0.1094)
-2.14×10^{-4} (0.9141,0.0781)	-2.00×10^{-4} (——, ——)	-2.31×10^{-4} (0.9141,0.0781)
Re=10000		
Present	Gresho	Ghia
0.113 (0.4883,0.5313)	0.101 (——, ——)	0.120 (0.4883,0.5333)
-1.47×10^{-3} (0.9375,0.1563)	-1.93×10^{-3} (——, ——)	-1.52×10^{-3} (0.9414,0.1641)
-3.10×10^{-3} (0.2187,0.0625)	-5.54×10^{-3} (——, ——)	-3.42×10^{-3} (0.2344,0.0586)

表 4 渦寸法の比較

Re=1000		Re=10000	
	Present	Ghia	Present
V_1	0.3868	0.3536	0.4744
H_1	0.3093	0.3034	0.3910
V_2	0.1744	0.1680	0.2940
H_2	0.2378	0.2188	0.3660
V_3	——	——	0.3486
H_3	——	——	0.1664

表 5 特徴量一覧

Number	Property	Reynolds Number					
		1000	3200	5000	7500	9000	10000
Primary	$\psi_{\max}$	0.115461	0.118649	0.117208	0.114764	0.113325	0.112874
	{v.c.}	2.01851	1.91273	1.86370	1.81102	1.77940	1.76680
	Location x,y	0.4687,0.5703	0.4805,0.5391	0.4844,0.5352	0.4883,0.5313	0.4883,0.5313	0.4883,0.5313
	$\psi_{\min}$	——	-7.09682×10^{-4}	-1.41584×10^{-3}	-2.01664×10^{-3}	-2.26954×10^{-3}	-2.40131×10^{-3}
	{v.c.}	——	-1.67509	-2.00107	-1.99367	-2.04884	-2.06848
	Location x,y	——	0.9453,0.9023	0.9336,0.9141	0.9297,0.9141	0.9297,0.9141	0.9297,0.9141
	H_L	——	0.0907	0.1233	0.1495	0.1605	0.1664
	V_L	——	0.2366	0.2903	0.3275	0.3415	0.3486
	BR $\psi_{\min}$	-2.14550×10^{-4}	-1.07315×10^{-3}	-1.30758×10^{-3}	-1.43337×10^{-3}	-1.46399×10^{-3}	-1.47416×10^{-3}
	{v.c.}	-0.34974	-1.08772	-1.37866	-1.68237	-1.84728	-1.83154
First	Location x,y	0.9141,0.0781	0.9180,0.1172	0.9258,0.1328	0.9336,0.1484	0.9375,0.1563	0.9375,0.1563
	H_L	0.2378	0.3164	0.3386	0.3557	0.3623	0.3660
	V_L	0.1774	0.2484	0.2693	0.2850	0.2907	0.2940
	BL $\psi_{\min}$	-1.68981×10^{-3}	-2.78297×10^{-3}	-2.99922×10^{-3}	-3.13252×10^{-3}	-3.12889×10^{-3}	-3.10426×10^{-3}
	{v.c.}	-1.06902	-2.16615	-2.65816	-3.01616	-3.25191	-3.35380
	Location x,y	0.1328,0.1172	0.1758,0.0859	0.1953,0.0742	0.2070,0.0664	0.2148,0.0625	0.2187,0.0625
	H_L	0.3093	0.3502	0.3656	0.3794	0.3863	0.3910
	V_L	0.3868	0.4268	0.4460	0.4626	0.4701	0.4744
	Second BR $\psi_{\max}$	——	6.28809×10^{-8}	1.00763×10^{-7}	1.97965×10^{-7}	3.84776×10^{-7}	6.45050×10^{-7}
	{v.c.}	——	1.40915×10^{-2}	1.04760×10^{-2}	1.85114×10^{-2}	1.87868×10^{-2}	2.25112×10^{-2}
Second	Location x,y	——	0.9922,0.0078	0.9922,0.0078	0.9883,0.0117	0.9883,0.0156	0.9844,0.0156
	H_L	——	0.0197	0.0222	0.0282	0.0334	0.0378
	V_L	——	0.0203	0.0234	0.0321	0.0413	0.0499
	BL $\psi_{\max}$	1.76356×10^{-7}	2.48882×10^{-7}	1.28066×10^{-6}	2.38931×10^{-5}	6.80046×10^{-5}	1.07468×10^{-4}
	{v.c.}	9.43290×10^{-3}	1.91627×10^{-2}	3.41262×10^{-2}	1.46698×10^{-1}	2.18948×10^{-1}	2.72511×10^{-1}
	Location x,y	0.0078,0.0078	0.0117,0.0117	0.0195,0.0195	0.0469,0.0391	0.0547,0.0547	0.0625,0.0625
	H_L	0.0085	0.0323	0.0594	0.1226	0.1488	0.1634
	V_L	0.0085	0.0296	0.0434	0.0925	0.1229	0.1390
	Third BL $\psi_{\min}$	——	——	——	-3.26065×10^{-9}	-9.09180×10^{-9}	-1.13260×10^{-8}
	Location x,y	——	——	——	0.0039,0.0039	0.0039,0.0039	0.0039,0.0039
Third	H_L	——	——	——	——	0.0064	0.0121
	V_L	——	——	——	——	0.0064	0.0122
Mesh points		129	256	256	256	256	256

(T: 上部, BR: 下部右, BL: 下部左, V.C.: 渦中心, H_L : 水平方向渦寸法, V_L : 垂直方向渦寸法)

レイノルズ数になるとキャビティ中心付近で渦度の一様な領域が広く存在するようになることがわかる。移動壁面上の渦度分布はレイノルズ数 7500 以上では $x=0$ 付近において解の振動が顕著にみられ、図 4 の等高線図と対応している。表 3, 4 はそれぞれ渦中心における流れ関数および渦寸法をレイノルズ数 1000, 10000 について Gresho, Ghia の結果と比較している。表 3 中のかっこ内は渦中心位置を x, y 座標で示しているが、これらは他の計算結果にほぼ一致している。また、渦寸法は Ghia の結果に比べて最大 10% ほど大きく計算されている。さらに、表 5 に本計算で求めたキャビティ内流れの渦に関する特徴量をまとめて示す。

5. ま と め

渦度輸送方程式と流れ関数に関するポアソンの式を連立させた二次元定常ナビエ・ストークス方程式に群陽的反復法を適用し、反復計算によって正方形キャビティ内流れの定常解を求めた。差分近似は簡単のため

すべて中心差分としたが、10000 にも及ぶ高レイノルズ数の解が得られた。解の収束性はレイノルズ数が高くなるにつれて著しく劣化し、5000 以上では反復計算数が 50000 近くに及んだ。得られた計算結果は他の手法による結果と良く一致したが、レイノルズ数 5000 以上において移動壁面上の隅では解が振動した。なお、本計算は、京都大学大型計算機センターの富士通 FACOM-VP 200 を用いて行った。

文 献

- (1) Evans, D. J., *Int. J. Comput. Math.*, 17 (1985), 81.
- (2) Evans, D. J. and Hadjidimos, A., *Int. J. Comput. Math.*, 19 (1986), 309.
- (3) Satufuka, N., "Group Explicit Methods for the Solution of Fluid Dynamic Equations", (presented at International Symposium on Computational Fluid Dynamics-Sydney), (1987-8).
- (4) Ghia, U., ほか 2 名, *J. Comput. Phys.*, 48 (1982), 387.
- (5) Gresho, P. M., ほか 3 名, *J. Numer. Methods in Fluids*, 4 (1984), 619.
- (6) Kim, J. and Moin, P., *J. Comput. Phys.*, 59 (1985), 308.