超音速翼列フラッタに及ぼす吸音壁の効果*

(第3報, 有限ピッチ翼列理論)

菊地 正憲^{*1}, 平野 公孝^{*1}, 岡本 康令^{*2}

Effect of a Sound Absorbing Liner on Supersonic Cascade Flutter (3rd Report, Analysis Based on a Finite Pitch Cascade Theory)

Masanori KIKUCHI, Kimitaka HIRANO, and Yasunori OKAMOTO

A three-dimensional theory is developed for a supersonic finite pitch cascade between a rigid wall and a sound absorbing liner to estimate the effect of a sound absorbing liner on supersonic cascade flutter. A side wall is the infinite extent of the liner with uniform acoustic admittance. The aerodynamic work of blades for uniform amplitude bending and torsional oscillation shows that there exists a sound absorbing liner which reduces the negative damping forces for torsional oscillation and that effective acoustic admittance magnitude is on the order of a $O(0.01) \sim O(1)$ range.

Key Words: Turbo Machinery, Unsteady Flow, Blade Oscillation, Supersonic Flow, Cascade Flutter, Sound Absorbing Liner

1. 緒 言

航空機用ファンエンジンでは, ファン騒音を低減させるためにダクト壁面に吸音ライナが用いられる。ファン先端の相対速度は容易に超音速になるので, 吸音壁を有する超音速翼列の三次元理論に基づく非定常空気力およびフラッタ特性の解明は必然的に重要である。

超音速流れにおいては, 単独翼に対しては Kurosaka⁽¹⁾の研究がある。菊地・平野⁽²⁾⁽³⁾はアクチュエータディスク法を用いて, 翼列前後で比音響アドミッタンスが異なる場合を解析している。一方, 難波・山崎⁽⁴⁾⁽⁵⁾は, 吸音壁が翼列翼の前縁と後縁の間に限定された場合について, 有限ピッチ理論を用いて解析している。

前論文⁽²⁾⁽³⁾において, 比音響アドミッタンスが小さい場合について検討した。そこでは, 翼列軸および翼幅方向にはそれぞれ基本モードのみを扱ったが, 比音響アドミッタンスが小さくないときには, 翼幅方向の各モードは互いに干渉するので, 三次元解析が必要になる。そこで, 本論文では両側壁が剛体の場合の有限

ピッチ翼列理論⁽⁶⁾を吸音壁を有する場合に拡張して適用し, 超音速翼列フラッタに及ぼす吸音壁の効果を調べる。

2. じょう乱圧力場および速度場

図1に示すように, $z_R=0$ で剛壁, $z_R=2L$ で比音響アドミッタンス β の吸音壁の間隔 $2L$ の平行壁間にお

図1 翼列座標系

* 昭和61年5月22日 九州支部宮崎地方講演会において講演, 原稿受付 昭和63年4月11日。

*¹ 正員, 宮崎大学工学部 (〒889-21 宮崎市学園木花台西1-1)。

*² 学生員, 東北大学大学院。

いて、弦長 2, 節弦比 $d/2$, 食違い角 λ の直線軸平板動翼列が角振動 ω , 翼間板動位相差 τ で調和振動しながら y_R の負の方向に運動しているものとする。

基本仮定として、流れは等エントロピー的で、相対速度は超音速、軸流速度は亜音速で翼幅方向に一様であるとする。翼列に固定した座標系 (x_R, y_R, z_R) に対して、非定常じょう乱圧力は次式により支配される。

$$B^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_R^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial y_R^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial z_R^2} + 2M^2 \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x_R} + M^2 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

ただし、長さを翼半弦長 b , 速度を相対速度 U , 時間を b/U , 圧力を ρU^2 でそれぞれ無次元化してある。 $z_R = 0$ の剛壁面上では翼幅方向の圧力こう配が零であるので、 p は $0 < z_R < 2L$ において、半区間余弦級数にて展開できる。

$$p(x_R, y_R, z_R, t) = \psi(x_R, y_R, z_R) \exp\{i(kMx_R - \omega t)\} \quad (2)$$

$$\psi(x_R, y_R, z_R) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{\psi}_l(x_R, y_R) \cos(\mu_l z_R / 2L) \quad (3)$$

ここに、 $x = b\omega/U$, $k = xM/B^2$, $B^2 = M^2 - 1$, μ_l は翼幅方向波数であるが、後に吸音壁面上の境界条件より決定する。式(1)に式(2), (3)を代入すれば、支配方程式は次式となる。

$$B^2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_l}{\partial x_R^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_l}{\partial y_R^2} + k_l^2 B^2 \tilde{\psi}_l = 0 \quad (4)$$

波動方程式(4)は以下の境界条件のもとで解かれる。

(1) 非定常じょう乱は放射条件を満足し、無限遠で有界である。

(2) 流体は翼表面に沿って流れる。

j 番翼に対する解は⁽⁷⁾

$$\psi_j = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(y_{Rj}) \int_{-\infty-i\delta}^{\infty+i\delta} \sum_{l=0}^{\infty} f_{jl}(\alpha) \exp\{-i\alpha x_R\} + iBY_l|y_{Rj}\} \cos(\mu_l z_R / 2L) d\alpha \quad (5)$$

ここに、

$$\gamma_l = \sqrt{\alpha^2 - k_l^2}, \quad k_l^2 = k^2 + (\mu_l / 2LB)^2 \quad (6)$$

ただし、時間因子を $\exp(-i\omega t)$ としているので、通常行われているように、 x あるいは k は微小な正の虚数部 $i\epsilon$ を有しているものとする。また、 γ_l の分岐は、解 ψ_j が条件(1)を満たすように $|\alpha| \rightarrow \infty$ のとき $\gamma_l \rightarrow \alpha$; $|\alpha| < |k_l|$ のとき $\operatorname{Im}(\gamma_l) > 0$ となるように選ぶと同時に、積分路は実軸から $\delta(>0)$ だけずらす。

翼列全体では、 j 番翼に対する解 ψ_j を重ね合わせることにより

$$\psi(x_R, y_R, z_R) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j(x_R, y_R, z_R) \quad (7)$$

0 番翼と j 番翼の翼上下面圧力差分布 Δp_0 と Δp_j には $j\tau$ の位相差があることを考慮すれば、式(2), (7)より

り

$$\Delta p(x_R, z_R) = \exp(ikMx_R) \int_{-\infty-i\delta}^{\infty+i\delta} \sum_{l=0}^{\infty} f_{l0}(\alpha) e^{-i\alpha x_R} \times \cos\left(\frac{\mu_l z_R}{2L}\right) d\alpha,$$

$$f_{l0}(\alpha) = \exp\{ij(\tau - kMX)\} f_{l0}(\alpha) \dots \dots \dots (8)$$

これをフーリエ逆変換し、 $\cos(\mu_l z_R / 2L)$ を掛け、区間 $0 \sim 2L$ で z_R 方向に積分すれば次式を得る。

$$f_{l0}(\alpha) = \frac{1}{2\pi L \{1 + \sin(2\mu_l) / (2\mu_l)\}} \times \int_0^{2L} \int_{-1}^1 \Delta p(\xi, \zeta) e^{i(\alpha - kM)\xi} \cdot \cos(\mu_l \zeta / 2L) d\xi d\zeta \quad (9)$$

一方、 y_R 方向のじょう乱速度 v と圧力との関係は、線形のオイラーの式を積分して得られる。すなわち、

$$v(x_R, y_R, z_R) = -\exp(ikx_R) \times \int_{-\infty}^{x_R} \exp(-ikx_R) \frac{\partial p}{\partial y_R} dx_R \quad (10)$$

式(2), (5), (6), (9), (10)より

$$v(x_R, y_R, z_R) = \frac{-i}{2\pi L} \frac{\partial}{\partial y_R} \int_{-1}^1 \int_{-\infty-i\delta}^{\infty+i\delta} \Delta p(\xi, \zeta) \sum_{l=0}^{\infty} \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(y_{Rj}) \cdot \exp\{ij(\tau - kMX) - i\alpha(x_R - \xi - jX) + iBY_l|y_{Rj}|\} \cdot \cos(\mu_l z_R / 2L) \cos(\mu_l \zeta / 2L) + ikM(x_R - \xi) \right] \frac{\cos(\mu_l z_R / 2L) \cos(\mu_l \zeta / 2L)}{1 + \sin(2\mu_l) / (2\mu_l)} \cdot \frac{1}{\alpha - k/M} d\zeta d\alpha d\xi \quad (11)$$

ここで、翼上下面の圧力差分布を z_R 方向に半区間余弦級数 $\cos(\mu_{sl} z_R / 2L)$ で展開し、

$$\Delta p(x_R, z_R) = \sum_{l=0}^{\infty} \Delta p_{lv}(x_R) \cos\left(\frac{\mu_{sl} z_R}{2L}\right) \quad (12)$$

式(11)に代入し、 j に関する無限級数の処理、 α に関する積分を前論文⁽⁶⁾と同様に行えば、

$$v(x_R, 0, z_R) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} \int_{-1}^1 \Delta p_{lv}(\xi) K_{vl}(x_R - \xi, z_R) d\xi \quad (13)$$

ここに、

$$K_{vl}(x_R, z_R) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{l,v,m} \exp\{-i(\alpha_{l,m}^+ - kM)x_R\} \cos(\mu_{l,m}^+ z_R / 2L) + V_{l,v} \exp(ix_R) \cos(l\pi z_R / 2L) \quad (14)$$

上式右辺第1項は圧力波動、第2項は後流うずによるじょう乱に対応する。ただし、

$$\alpha_{l,m}^+ = \frac{X\Gamma_m}{d_a^2} \mp \frac{BY}{d_a} \sqrt{\left(\frac{\Gamma_m}{d_a}\right)^2 - \left\{k^2 + \left(\frac{\mu_{l,m}^+}{2LB}\right)^2\right\}} \quad (15)$$

$$\Gamma_m = 2\pi m - \tau + kXM \quad (16)$$

$P_{l,v,m}$ と $V_{l,v}$ は付録に与えられている。 X , Y , d_a などは前論文⁽⁶⁾と同じであるので省略する。

3. 吸音壁における境界条件

吸音壁に固定した静止座標系 (x_s, y_s, z_s) ⁽⁶⁾ に対する圧力波の波数 (k_{xs}, k_{ys}, k_{zs}) および無次元振動数 x' は

$$\left. \begin{aligned} k_{xs} &= (kM - \alpha_{t,m}^2) / \cos \lambda + (2m\pi - \tau) \tan \lambda / d \\ k_{ys} &= (2m\pi - \tau) / d \\ k_{zs} &= \mu_{t,m}^2 \\ x' &= (2m\pi - \tau) \sin \lambda / d + x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

吸音壁面上で、圧力の連続性と流体粒子の変位の連続性を課せば、境界条件として次式が得られる ⁽⁸⁾⁽¹⁰⁾。

$$\mu_{t,m} \tan \mu_{t,m} = 2L\beta M(k/M - \alpha_{t,m}^2) / ix' \dots\dots (18)$$

ここに、 β は比音響アドミッタンスである。 $\mu_{t,m}$ は式(15)と式(18)からニュートン・ラフソン法により数値的に決定する。 $|m| \rightarrow \infty$ のとき $x' \rightarrow O(|m|)$, $\alpha_{t,m}^2 \rightarrow O(|m|)$ となるので、 β が無次元振動数 x' によらず一定な場合には、式(18)の右辺は $O(|m|)$ となり、 $\mu_{t,m}$ は $\mu_{t,\infty}^2 = (2l+1)\pi/2$ に漸近する。また、吸音ライナモデルを多孔板でハニカム空洞を覆った構造 ⁽⁵⁾⁽⁷⁾ とするとき β は $O(1/|m|)$ すなわち式(18)右辺は一定値に漸近するので、 $\mu_{t,m}$ は翼列前方と後方で異なった値に漸近する。

4. 翼上下面圧力差分布の決定

式(14)の右辺第1項の無限級数の係数は $|m| \rightarrow \infty$ の極限で一定値に漸近するので、式(14)はディラックのデルタ関数を含む。この項を除いた部分を $\tilde{K}_v$ とすれば、境界条件(2)は次式にて与えられる。

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \left[B \cdot \frac{\mu_{t,\infty}^2 (-1)^v}{\mu_{t,\infty}^2 - \mu_{s,v}^2} \cos \left(\frac{\mu_{t,\infty}^2 z_R}{2L} \right) \sum_{m=-m_1}^{m_1} \left[\Delta p_v(x_R \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - m(X + \operatorname{sgn}(m)BY) \right] \exp(im\tau) \right. \\ & \quad \left. + i|m|kMBY \right] + \int_{-1}^1 \Delta p_v(\xi) \tilde{K}_v(x_R - \xi, z_R) d\xi \Big] \\ & = \begin{cases} -ix \\ ix x_R - 1 \end{cases} \end{aligned} \dots\dots\dots (19)$$

ここに、右辺はそれぞれ一様振幅の曲げおよびねじり振動に対応している。 m_1, m_2 は前論文 ⁽⁶⁾ と同じである。マッハ波の隣接翼との反射点 $x_i (i=1, 2, \dots, I-1)$ において圧力差分布は不連続となるが、前論文 ⁽⁶⁾ と同様に、不連続間 $x_i < x_R < x_{i+1}$ で Δp_v をチェビシェフの $0 \sim N_i - 1$ 次の多項式で近似する。おのおのの不連続点間において、 x_R 方向に N_i 次のチェビシェフの多項式の零点 z_R 方向に M_i 次の余弦関数の零点とすれば、式(19)は $M_s \times (N_0 + N_1 + \dots + N_{I-1})$ 元の連立一次方程式となる。

5. 空気力仕事

式(19)から圧力差分布が決定すると、翼単位幅当たりの非定常揚力 $L(z_R)e^{-i\omega t}$ および翼弦中心まわりの頭上げモーメント $M(z_R)e^{-i\omega t}$ は、揚力係数 $C_L(z_R)$ およびモーメント係数 $C_M(z_R)$ を導入して次式にて与えられる。

$$C_L(z_R) = \frac{L(z_R)}{\frac{1}{2}\rho U^2(2b)\bar{\epsilon}} = \sum_{l'=0}^{\infty} C_{Ll'} \cos \left(\frac{\mu_{s,l'} z_R}{2L} \right) \dots\dots\dots (20)$$

$$C_M(z_R) = \frac{M(z_R)}{\frac{1}{2}\rho U^2(2b)^2 \bar{\epsilon}} = \sum_{l'=0}^{\infty} C_{Ml'} \cos \left(\frac{\mu_{s,l'} z_R}{2L} \right) \dots\dots\dots (21)$$

$C_{Ll'}, C_{Ml'}$ は前論文 ⁽⁶⁾ の C_{Ll}, C_{Ml} と同じ表現となる。

時間平均の空気力仕事は、曲げおよびねじり振動に対して、次式で与えられる。

$$C_{wh} = -\operatorname{Im}\{C_{Lh}\} \dots\dots\dots (22)$$

$$C_{wa} = -\operatorname{Im}\{C_{Ma}\} \dots\dots\dots (23)$$

6. 数値計算結果および考察

平行壁の一方を、比音響アドミッタンス $\beta (=|\beta| \cdot \exp(i\phi) = \xi - i\sigma)$, ξ は比音響コンダクタンス, σ は比音響サセプタンス) が無次元振動数 x' に依存しない一定の吸音壁、他方を剛体壁 ($\beta=0$) とし、相対マッハ数 $M=1.5$, 食違い角 $\lambda=60^\circ$, 節弦比 $d/2=1.0$, アスペクト比 $L=4.0$ について数値計算を行った。数値計算上の精度を確保するために、翼上下面圧力差分布の翼幅方向展開項数を6項、翼弦方向展開項数を11項としている。また、式(14)の m に関する無限級数において、各項を $\mu_{t,\infty}^2 = (2l+1)\pi/2$ のまわりに $O(1) \sim O(|m|^{-4})$ まで展開し、無限級数を解析的に求め、数値的には残りの $O(|m|^{-5})$ の項を扱うことにより無限級数の収束を早めている。翼上下面圧力差分布は、両側壁が剛体

図2 翼幅方向波数の m に対する依存性 ($x=0.1, \tau=0^\circ, |\beta|=1.0, \phi=-60^\circ$)

壁の場合と同じく、波数 $\mu_{sl} = l'\pi$ を用いて余弦級数展開している。

6・1 翼幅方向波数 翼列後方における圧力波動の翼幅方向波数 $\mu_{l,m}$ を図2に示す。3章で述べたように、 $|m|$ が大きくなると、 $\mu_{l,m}$ は $(2l+1)\pi/2$ に収束することを示している。翼列前方では、後方よりも波数が大きくなるので、より早く収束することが式(18)よりわかる。また、 $|\beta|$ が大きいほど収束は早い。

図3 空気力仕事の翼幅方向展開係数 (曲げ振動)

図4 空気力仕事の翼幅方向展開係数 (ねじり振動)

図5 空気力仕事の翼幅方向分布 (曲げ振動)

6・2 空気力仕事 翼は一樣振幅の二次元的な振動をしていても、吸音壁を有する場合には翼幅方向モードは互いに独立ではなく、 l' が1以上のモードも考慮しなければならない。図3, 4にそれぞれ曲げおよびねじり振動するときの空気力仕事係数を $l'=0, 1, \dots, 5$ について示す。曲げおよびねじり振動とも、 l' が5以上では無視できる程度の大きさであるが、特に、ねじり振動において、反位相付近をのぞいて三次元性の強いことがわかる。

図5は、翼間位相差が 90° で曲げ振動するときの空気力仕事の翼幅方向分布を示す。吸音壁の効果は剛体壁まで及ぶが、その影響は吸音壁近傍において大きい。

図6, 7はそれぞれ曲げおよびねじり振動するときの空気力仕事の翼間振動位相差に対する依存性を示している。曲げ振動では、背面側位相遅れ ($\tau=0\sim180^\circ$) では $\phi=60^\circ$ の吸音壁は制振効果を減少させ、背面側位相進みでは、 $\phi=-60^\circ$ の吸音壁が制振効果を減少さ

図6 空気力仕事の翼間振動位相差に対する依存性 (曲げ振動)

図7 空気力仕事の翼間振動位相差に対する依存性 (ねじり振動)

図8 空気力仕事の比音響アドミッタンスに対する依存性 (ねじり振動)

せるが、すべての翼間位相差において空気力が減衰力として働く特性は変わらない。ねじり振動では、吸音壁の効果は、両側壁が剛壁のときのサブレゾナンス領域 ($\tau=8.768\sim 26.958^\circ$) の励振力のピーク値を減少させており、また、励振力となる翼背面側位相進みの翼間位相差において、そのピーク値を $\phi=60^\circ$ の場合を除いて減少させている。

図8に、ねじり振動するとき励振力として働く翼間位相差 ($\tau=300^\circ$) において、空気力仕事に及ぼす比音響アドミッタンスの影響を示す。 $\phi=-60^\circ$ のときには大きな制振効果があることがわかる。また、 $|\beta|>10$ では比音響アドミッタンスの位相の影響は現れなくなる。このことは曲げ振動に対してもいえる。前論文⁽²⁾⁽³⁾のアクチュエータディスク法による解析結果と合せて考えれば、 $|\beta|$ が $O(0.01)\sim O(1)$ の範囲で吸音壁の効果が大きく現れるといえる。

7. 結 言

超音速翼列フラッタに及ぼす吸音壁の効果を調べるために、一様な比音響アドミッタンスを有する吸音壁ダクト内にある直線軸平板翼列が、超音速流れ中で一

様振幅の曲げおよびねじり振動する問題に対して、三次元有限ピッチ理論を適用した。その結果、比音響アドミッタンスの大きな値まで、またすべての翼間位相差において解析可能となった。得られた結果を要約すると以下のようである。

(1) 曲げ振動では、剛体壁の場合と同様にすべての翼間位相差において、空気力は減衰力として働く。

(2) ねじり振動では、翼背面側位相進みの不安定な翼間位相差において、 $|\beta|>1$ のすべての ϕ の吸音壁が制振側に働く。

(3) アクチュエータディスク法による結果と合せて考えれば、 $|\beta|$ が $O(0.01)\sim O(1)$ の範囲で吸音壁の効果が大きく現れる。

付 録

$$P_{l,v,m} = \pm \frac{1}{Y} \times \left[\frac{(\Gamma_m - \alpha_{l,m}^2 X)^2}{\alpha_{l,m}^2 - k/M \{ X \Gamma_m - \alpha_{l,m}^2 d_a^2 - \mu_{l,m}^2 \mu_{s,v}^2 (Y/2L)^2 \}} \cdot H(\pm x_R) \cdot \frac{\cos \mu_{l,m}^2 \cos \mu_{s,v}^2}{\mu_{l,m}^2 - \mu_{s,v}^2} \cdot (\mu_{l,m}^2 \tan \mu_{l,m}^2 - \mu_{s,v}^2 \tan \mu_{s,v}^2) \frac{1}{1 + \sin(2\mu_{l,m}^2)/(2\mu_{l,m}^2)} \right]$$

$$V_{l,v} = x_{l,v} \frac{\sin(x_l Y)}{\cosh(x_l Y) - \cos(\tau - x X)} \cdot \frac{\cos l\pi \cdot \cos \mu_{s,v}^2}{(ln)^2 - \mu_{s,v}^2} \{ l\pi \tan(l\pi) - \mu_{s,v}^2 \tan \mu_{s,v}^2 \} H(x_R)$$

文 献

- (1) Kurosaka, M., *AFOSR-Tech. Rep.*, 1055(1978).
- (2) 菊地・平野, 機論, 51-469, B(昭60), 3032.
- (3) 菊地・平野・山口, 機論, 54-508, B(昭63), 3440.
- (4) 難波・山崎, 機論, 53-492, B(昭62), 2281.
- (5) 難波・山崎, 機論, 53-496, B(昭62), 3577.
- (6) 菊地, 機論, 46-412, B(昭55), 2247.
- (7) Goldstein, M. E., *AIAA J.*, 13-8(1975), 1117.
- (8) Ko, S-H., *J. Acoust. Soc. Am.*, Pt-1, 506(1971), 1418.
- (9) 菊地, 機論, 47-421, B(昭56), 1671.
- (10) Morse, P. M. and Engard, K. U., *Theoretical Acoustics*, (1968), 714, McGraw-Hill.