翼幅方向に非一様な定常負荷をもって振動する三次元
超音速翼列の二重線形理論による非定常空気力解析*利 光 和 彦^{*1}, 難 波 昌 伸^{*1}Double Linearization Theory Applied to Unsteady Aerodynamic
Analysis of Three-Dimensional Supersonic Cascade Vibrating
with Spanwisely Nonuniform Mean Loading

Kazuhiko TOSHIMITSU and Masanobu NAMBA

This paper extends the double linearization theory to three-dimensional supersonic cascades to study the spanwisely nonuniform mean loading effects upon unsteady aerodynamic forces of vibrating blades. The theory takes account of the unsteady shock displacement effect and the two kinds of unsteady spanwise aerodynamic forces due to nonuniform mean loadings and nonuniform vibration amplitudes in the three-dimensional flow field. Numerical examples show several features of unsteady aerodynamic responses which are ascribable to the effects of the spanwise nonuniform angle of attack, camber and thickness. The nonuniform effects of the camber and thickness are greater than those of the angle of attack. In order to obtain a large total steady lift coefficient on a stability boundary for the first bending mode, the cascade configuration with the angle of attack decreasing and the camber and thickness increasing from hub to tip is advantageous.

Key Words: Unsteady Flow, Flutter, Supersonic Cascade, Mean Loading, Three-Dimensional Flow, Shock Wave

1. 序 論

実機の翼列の幾何形状は翼幅方向に変化しており、翼列フラッタには種々の三次元効果が影響を与えるものと考えられる。特に、翼列フラッタの発生は定常負荷に強く依存するので、定常負荷の翼幅方向非一様性が非定常空気力に及ぼす効果を明らかにすることは重要な課題である。超音速翼列に関して定常負荷効果を取り上げた研究は、二次元理論解析〔例えば文献(1)〕にとどまっております。定常負荷効果を含む三次元超音速翼列フラッタ問題は全く未開拓の分野である。

定常負荷効果を取扱う手法の一つとして、定常じょう乱および非定常じょう乱がともに非じょう乱場の一様な音速および流速で伝ばおよび輸送されるとして、能率的に非定常空気力を解析できる境界形解法の二重線形理論がある。本方法の近似が正当化されるのは理論的には転向角が小さい薄翼列の場合に限られるが、著者らは二次元問題において、より厳密な逐次近似法や有限要素法による計算結果および実験値との比較から二重線形理論解法が有用な手法であることを示し

た⁽¹⁾⁽²⁾。

本論文は、隣接翼の前後縁から発する衝撃波反射点変位効果を含む二重線形理論の三次元問題への拡張である。特にここでは、平行壁にまたがる亜音速軸流速度の超音速直線翼列において、羽根の振動振幅が一様でない効果に加え、翼形状を翼幅方向座標の関数にすることにより、翼幅方向に非一様な有限定常負荷効果を考慮した三次元モデルについて考え、等価非定常わき出しと三次元翼列に特有な翼幅方向空気力をじょう乱源項に追加した二重線形三次元理論解法を示す。さらに、数値計算によって翼の振動振幅および定常負荷の翼幅方向非一様性が非定常空気力に及ぼす効果を明らかにするとともに、個々の翼列設計パラメータに対する翼振動の空力不安定限界の依存性を明らかにする。

2. 問題の定式化と解法

以下において上付き*を持たぬ記号で表した無次元量は、後に厳密に定義する基本流の速度 U^* (マッハ数 M)、密度 ρ^* および翼弦長 c^* を用いて、長さ、時間、圧力、速度、および密度をそれぞれ c^* , c^*/U^* , ρ^*U^{*2} , U^* および ρ^* で無次元化したものとする。図1に示すように基本流の方向に x 軸を、翼幅方向に z

* 昭和63年10月19日 第66期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和63年3月10日。

^{*1} 正員、九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

軸をとる。平行剛壁間にまたがる節弦比 s , 食違い角 γ , 縦横比 h の直線翼列において, 厚み分布および反り分布がそれぞれ $\tau_0(\xi)g(\xi)$ および $\mu_0\mu(\xi)f(\xi)$ なる各翼が時間平均迎え角を $\alpha_0\alpha(\xi)$ として y 軸方向変位振幅分布 $a(\xi, \zeta)=\chi(\xi)Z(\zeta)$, 無次元円振動数 ω および翼間位相差 $2\pi\sigma$ で振動しているものとする。ここで $\tau_0, \mu_0, \alpha_0=O(\varepsilon)$; $\tau(\xi), \mu(\xi), \alpha(\xi), f(\xi), g(\xi)=O(1)$; $a(\xi, \zeta)=O(\varepsilon)$: $1 \gg \varepsilon \gg \varepsilon > 0$; すなわち定常じょう乱は非定常じょう乱に比べて十分大きい, それ自身は線形理論の範囲内で決定できる大きさであると仮定する。以下において定常じょう乱は上付き一で, 非定常じょう乱は上付き二の「複素振幅量」 $\times e^{i\omega t}$ によって表す。いま m 番翼上下面圧力差を $\Delta\bar{p}(\xi, \zeta)+\Delta\bar{p}(\xi, \zeta)e^{i(\omega t+2\pi\sigma m)}$ と表し, 完全ガス, 等エントロピー流を仮定するとじょう乱速度 $\bar{u}(x, y, z)+\bar{u}(x, y, z)e^{i\omega t}$ は運動方程式の積分から

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, y, z) &= \int_0^h \int_{-1/2}^{1/2} \{\Delta\bar{p}(\xi, \zeta) \bar{K}_{uF}(x-\xi, y, z|\zeta) \\ &\quad + \tau_0\tau(\xi)g'(\xi) \bar{K}_{uQ}(x-\xi, y, z|\zeta)\} d\xi d\zeta \cdots (1) \\ \bar{u}(x, y, z) &= \int_0^h \int_{-1/2}^{1/2} \{\Delta\bar{p}(\xi, \zeta) K_{uA}(x-\xi, y, z|\zeta) \\ &\quad + \Delta\bar{p}(\xi, \zeta)\alpha(\xi, \zeta) K_{uL}(x-\xi, y, z|\zeta) \\ &\quad + \tau_0\tau(\xi)g'(\xi)\alpha(\xi, \zeta) K_{uQ}(x-\xi, y, z|\zeta) \\ &\quad + \bar{q}(\xi, \zeta) K_{uS}(x-\xi, y, z|\zeta) \\ &\quad + \bar{D}(\xi, \zeta) K_{uD}(x-\xi, y, z|\zeta)\} d\xi d\zeta \cdots (2)\end{aligned}$$

と表される。ただし, $\mathbf{u}=(u, v, w)$ は速度ベクトルを意味する。ここで, 式(1)および式(2)中の速度場核関数は圧力場核関数の積分

図1 解析モデルと座標系

$$[\bar{K}_{uF}, \bar{K}_{uQ}] = - \int_{-\infty}^x \nabla [\bar{K}_{pF}, \bar{K}_{pQ}] dx + [\bar{K}_{uF}, \bar{K}_{uQ}]_{x=-\infty} \cdots \cdots (3)$$

$$[K_{uA}, K_{uL}, K_{uQ}, K_{uS}, K_{uD}] = -e^{-i\omega x} \int_{-\infty}^x e^{i\omega x} \nabla [K_{pA}, K_{pL}, K_{pQ}, K_{pS}, K_{pD}] dx \cdots \cdots (4)$$

で表せ, $\bar{K}_{pF}, \bar{K}_{pQ}$ などの圧力場核関数は $z=0$ および h で $\partial\bar{K}_{pF}/\partial z, \partial\bar{K}_{pQ}/\partial z$ などが零という側壁境界条件を課せられた

$$\left(\nabla^2 - M^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \begin{bmatrix} \bar{K}_{pF}(x, y, z|\zeta) \\ \bar{K}_{pQ}(x, y, z|\zeta) \end{bmatrix} = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \delta(x_m) \delta'(y_m) \delta(z-\zeta) \\ \delta'(x_m) \delta(y_m) \delta(z-\zeta) \end{bmatrix} \cdots \cdots (5)$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \nabla^2 - M^2 \left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right\} \begin{bmatrix} K_{pA}(x, y, z|\zeta) \\ K_{pL}(x, y, z|\zeta) \\ K_{pQ}(x, y, z|\zeta) \\ K_{pS}(x, y, z|\zeta) \\ K_{pD}(x, y, z|\zeta) \end{bmatrix} \\ &= - \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\sigma m} \times \begin{bmatrix} \delta(x_m) \delta'(y_m) \delta(z-\zeta) \\ i\omega \delta'(x_m) \delta(y_m) \delta(z-\zeta) - \delta(x_m) \delta''(y_m) \delta(z-\zeta) \\ -i\omega \delta(x_m) \delta'(y_m) \delta(z-\zeta) - \delta'(x_m) \delta'(y_m) \delta(z-\zeta) \\ i\omega \delta(x_m) \delta(y_m) \delta(z-\zeta) + \delta'(x_m) \delta(y_m) \delta(z-\zeta) \\ \delta(x_m) \delta(y_m) \delta'(z-\zeta) \end{bmatrix} \cdots \cdots (6) \end{aligned}$$

なる微分方程式の解である。ただし, $x_m = x - ms \cdot \sin \gamma$ および $y_m = y - ms \cdot \cos \gamma$ とする。なお, 式(3)~(6)の解析解として得られる核関数の詳細は省略する。

式(2)の右辺{ }内第2, 3項が定常空気力作用点および翼厚に対応する定常わき出し点変位効果を表し, これらは翼平均位置に分布する新たな双極子または四重極子形特異点となって現れる。等価非定常わき出し効果を表す第4項の $\bar{q}(x, z)$ および翼幅方向非定常空気力を表す第5項の $\bar{D}(x, z)$ はそれぞれ

$$\bar{q}(x, z) = M^2 \Delta\bar{p}(x, z) (i\omega + \partial/\partial x) a(x, z) \cdots \cdots (7)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}(x, z) &= -\Delta\bar{p}(x, z) \frac{\partial a(x, z)}{\partial z} \\ &\quad + \left\{ \left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x} \right) a(x, z) \right\} \int_{-1/2}^x \left\{ \frac{\partial \Delta\bar{p}(\xi, z)}{\partial z} \right\} d\xi \cdots \cdots (8) \end{aligned}$$

であり, これらの物理的意味は前報(1)~(3)に述べたとおりである。

亜音速軸流速度の超音速翼列では, じょう乱が翼列

前方へも伝ばし、線形理論の範囲内では一般に無限遠でも空間的非一様性を失わない。したがってじょう乱速度の y 成分を式(1)~(4)から求める際に無限上流状態に関する積分定数の項でこの性質が考慮されなければならない。非定常じょう乱速度〔式(2)および式(4)〕については、各翼がじょう乱の発生源であることから積分定数を零とすることができる。定常じょう乱速度〔式(1)および式(3)〕については、積分定数〔式(3)右辺第2項〕が $\langle \bar{u}(-\infty, y, z) \rangle_r \rangle_z + \langle \bar{u}(+\infty, y, z) \rangle_r \rangle_z = 0$ を満たすように定める。ただし、 $Y = y/\cos \gamma$ とし、 $\langle \rangle_r$ および $\langle \rangle_z$ はそれぞれ1ピッチ平均および翼幅方向平均を意味する。無限上流1ピッチの平均速度の翼幅方向平均と、無限下流でのそれとのベクトル平均速度を乱されない状態に対応する基本流速 U (x 方向) と定義する。この基本流速ベクトルと平均翼弦方向のなす角を定常有効迎え角 α と定義すれば、 α は M と翼形に独立に指定することができ、入射角の唯一性に特別な考慮を払う必要がない。

本論文が取扱う平行壁間直線翼列モデルでは無限上流における定常じょう乱の1ピッチ平均量 $\langle \bar{p}(-\infty, y, z) \rangle_r$, $\langle \bar{v}(-\infty, y, z) \rangle_r$ は三次元効果により z の関数にはならず、翼幅方向に一様であることに注意しなければならない。しかし、二次元理論を単純に拡張するストリップ理論では、定常じょう乱を各 $z = \text{一定}$ 断面ごとに独立に決定するため $\langle \bar{p}(-\infty, y, z) \rangle_r$, $\langle \bar{v}(-\infty, y, z) \rangle_r$ は z の関数になり、翼幅方向一様性を満たさない。例えばねじれた平板翼列にストリップ理論を適用すると、上流の定常速度ベクトル $\bar{u}(-\infty, y, z)$ が各翼幅位置での入射角零を満たすようにねじれた流れ場になり、これは極めて不自然である。したがって、非一様定常負荷をもつ超音速翼列においてはストリップ理論近似の有用性は期待できないと考えられる。

翼面上境界条件も定常および非定常成分に分解され、それぞれ

$$\bar{v}(x, \pm 0, z) = -\alpha_0 \alpha(z) + \mu_0 \mu(z) f'(x) \pm \tau_0 \frac{\tau(z) g'(x)}{2} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}(x, \pm 0, z) = & \frac{\partial a(x, z)}{\partial x} + i\omega a(x, z) \\ & - a(x, z) \frac{\partial \bar{v}(x, \pm 0, z)}{\partial y} \\ & + \frac{\partial a(x, z)}{\partial x} \bar{u}(x, \pm 0, z) \\ & + \frac{\partial a(x, z)}{\partial z} \bar{w}(x, \pm 0, z) \quad (10) \end{aligned}$$

となる。式(1), (3), (9)および式(2), (4), (10)からそれぞれ定常翼面圧力差 $\Delta \bar{p}(x, z)$ および非定常翼面圧力差 $\Delta \bar{p}(x, z)$ を決定する積分方程式を得る。前者は後者に独立に決定されるが、後者は式(2)の右辺〔〕内第2~5項および式(10)の右辺第3~5項を通じて定常じょう乱の影響を受ける。そこで $\Delta \bar{p}(x, z)$ を翼の振動速度と翼の変動迎え角〔式(10)右辺第1, 2項〕に依存する成分 $\Delta \bar{p}_a(x, z)$ と定常じょう乱に依存する成分 $\Delta \bar{p}_r(x, z)$ に分解し、

$$\Delta \bar{p}(x, z) = \Delta \bar{p}_a(x, z) + \Delta \bar{p}_r(x, z) \quad (11)$$

と表すと、 $\Delta \bar{p}_a(x, z)$ は定常有効迎え角零の平板翼列における非定常空気力に等しい。

一方 $\Delta \bar{p}_r(x, z)$ は積分方程式

$$\begin{aligned} & \int_0^h \int_{-1/2}^{1/2} \Delta \bar{p}_r(\xi, \zeta) K_{va}(x - \xi, 0, z | \zeta) d\xi d\zeta \\ & = -a(x, z) \int_0^h \int_{-1/2}^{1/2} \{ \Delta \bar{p}(\xi, \zeta) \\ & \quad \times \frac{\partial \bar{K}_{vf}(x - \xi, 0, z | \zeta)}{\partial y} \\ & \quad + \tau_0 \tau(\zeta) g'(\xi) \frac{\partial \bar{K}_{vq}(x - \xi, 0, z | \zeta)}{\partial y} \} d\xi d\zeta \\ & \quad + \frac{\partial a(x, z)}{\partial x} \int_0^h \int_{-1/2}^{1/2} \{ \Delta \bar{p}(\xi, \zeta) \bar{K}_{uf}(x - \xi, 0, z | \zeta) \\ & \quad + \tau_0 \tau(\zeta) g'(\xi) \bar{K}_{uq}(x - \xi, 0, z | \zeta) \} d\xi d\zeta \\ & \quad + \frac{\partial a(x, z)}{\partial z} \int_0^h \int_{-1/2}^{1/2} \{ \Delta \bar{p}(\xi, \zeta) \bar{K}_{wf}(x - \xi, 0, z | \zeta) \\ & \quad + \tau_0 \tau(\zeta) g'(\xi) \bar{K}_{wq}(x - \xi, 0, z | \zeta) \} d\xi d\zeta \\ & \quad - \int_0^h \int_{-1/2}^{1/2} a(\xi, \zeta) \{ \Delta \bar{p}(\xi, \zeta) K_{vl}(x - \xi, 0, z | \zeta) \\ & \quad + \tau_0 \tau(\zeta) g'(\xi) K_{vq}(x - \xi, 0, z | \zeta) \} d\xi d\zeta \\ & \quad - \int_0^h \int_{-1/2}^{1/2} \bar{q}(\xi, \zeta) K_{vs}(x - \xi, 0, z | \zeta) d\xi d\zeta \\ & \quad - \int_0^h \int_{-1/2}^{1/2} \bar{D}(\xi, \zeta) K_{vp}(x - \xi, 0, z | \zeta) d\xi d\zeta \quad (12) \end{aligned}$$

によって定まる。さて、迎え角、反りおよび厚みの z 方向分布を

$$[\alpha(z), \mu(z), \tau(z)] = \sum_{m=0}^{NS} [A_m, M_m, T_m] \cos \frac{m\pi z}{h} \quad (13)$$

なるフーリエ余弦級数に展開すれば定常翼面圧力差もこれに対応して

$$\Delta \bar{p}(x, z) = \sum_{m=0}^{NS} \Delta \bar{p}_m(x) \cos \frac{m\pi z}{h} \quad (14)$$

と表せる。さらに、非定常翼面圧力差も同様にフーリエ余弦級数で展開し

$$\Delta \bar{p}_r(x, z) = \sum_{n=0}^{NU} \Delta \bar{p}_{rn}(x) \cos \frac{n\pi z}{h} \quad (15)$$

とする。ここで、式(12), (14)の $\Delta \bar{p}_m(x)$, $g'(x)$ について次の留意が必要である。一般に $\Delta \bar{p}_m(x)$ は図2のような有限不連続分布をなし、

$$\Delta \bar{p}_m(x) = \sum_j \bar{\Delta}_m(x_j) H(x - x_j) + \Delta \bar{p}_m^r(x) \quad \cdots (16)$$

($j=L, L1, L2, T1, T$) と表せる。また、厚みこう配分布 $g'(x)$ も前後縁で零でないのが一般的であることを考慮し、 $g'(x)\{H(x+1/2)-H(x-1/2)\}$ と解釈する。ただし、 $H(x)$ は Heaviside の単位ステップ関数である。翼が微小振幅で振動すると、各マッハ線反射点 x_j も翼面上で周期的微小変位を行い、その効果は線形近似の範囲内では平均位置 x_j に作用する集中交番力 $\bar{F}_n(x_j)e^{i\omega t}$ となって表れ、 $\Delta \bar{p}_m(x)$ は

$$\Delta \bar{p}_m(x) = \sum_j \bar{F}_n(x_j) \{\delta(x - x_j) + \Delta \bar{p}_n(x; x_j)\} + \Delta \bar{p}_m^r(x) \quad \cdots (17)$$

($j=L1, L2, T1$) と表すことができる。ただし、 $\Delta \bar{p}_n(x; x_j)$ は $x=x_j$ に作用する単位集中交番力によって誘起される翼面吹上げ速度分布を打ち消すのに必要な翼面圧力差分布の第 n 次フーリエ成分であり、 $\Delta \bar{p}_m^r(x)$ は隣接翼前後縁マッハ線（衝撃波）反射点変位効果を除いた定常じょう乱効果による非定常翼面圧力差分布の第 n 次フーリエ成分である。

式(13)～(17)および $a(x, z) = \chi(x)Z(z)$ と z 方向に $K_{va}(x, 0, z|\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} VA_n(x, 0) \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \cos\left(\frac{n\pi \xi}{h}\right)$ のように展開した速度場核関数を式(12)に代入しガラーキン法を適用すると、 $\Delta \bar{p}_f(x, z)$ を決定する積分方程式(12)は、互いに独立な $\Delta \bar{p}_m(x)$ 、 $\Delta \bar{p}_n(x; x_j)$ を決定する積分方程式および $\bar{F}_n(x_j)$ を決定する代数方程式に分解される。 $\Delta \bar{p}_m(x)$ に対する積分方程式は、ガラーキン法を適用した式(12)において $\Delta \bar{p}_f(x, z)$ を $\Delta \bar{p}_m(x)$ に置き換え右辺の積分を実行して現れるデルタ関数形特異項を除いた形で表せる。一方、 $\Delta \bar{p}_n(x; x_j)$ および $\bar{F}_n(x_j)$ は

図2 マッハ線反射様式と定常翼面圧力差分布

$$\int_{-1/2}^{1/2} \Delta \bar{p}_n(\xi; x_j) VA_n(x - \xi, 0) d\xi = -VA_n^r(x - x_j, 0) \quad \cdots (18)$$

$$\bar{F}_n(x_j) = \sum_{m=0}^{NS} \varepsilon_n IZ_{n,m} \cdot \bar{F}_m^{(2D)}(x_j) \quad \cdots (19)$$

で表せ、 $\bar{F}_m^{(2D)}(x_j)$ は一様並進および一様回転振動における集中交番力で準二次元的に求めることができ

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_m^{(2D)}(x_{T1}) &= -\bar{\Delta}_m(x_{T1}) \beta \left\{ \chi\left(\frac{1}{2} - S_x^-\right) - \chi\left(\frac{1}{2}\right) e^{-i\psi^-} \right\} \\ \bar{F}_m^{(2D)}(x_{L1}) &= \bar{\Delta}_m(x_{L1}) \beta \left\{ \chi\left(-\frac{1}{2} + S_x^+\right) - \chi\left(-\frac{1}{2}\right) e^{i\psi^+} \right\} \\ \bar{F}_m^{(2D)}(x_{L2}) &= \bar{\Delta}_m(x_{L1}) \beta \left\{ \chi\left(-\frac{1}{2} + 2s\beta \cos \gamma\right) - 2\chi\left(-\frac{1}{2} + S_x^+\right) e^{-i\psi^-} + \chi\left(-\frac{1}{2}\right) e^{i(\psi^+ - \psi^-)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \cdots (20)$$

となる。 $\bar{F}_0^{(2D)}(x_j)$ が定常翼面圧力差一様成分の不連続量 $\bar{\Delta}_0(x_j)$ より、 $\bar{F}_m^{(2D)}(x_j)$; $m \neq 0$ が非一様成分の不連続量 $\bar{\Delta}_m(x_j)$ より誘起され、これらの物理的説明は前報(1)に述べたとおりである。ここで、式(18)右辺 $VA_n^r(x - \xi, 0)$ は $VA_n(x - \xi, 0)$ からデルタ関数項を除いたものである。さらに、 $S_x^\pm = s(\pm \beta \cos \gamma + \sin \gamma)$ 、 $\psi^\pm = 2\pi\sigma \mp \omega M^2 s \cos \gamma / \beta$ 、 $\beta^2 = M^2 - 1$ 、 $\varepsilon_n = \begin{cases} 1: n=0, \\ 2: n \geq 1 \end{cases}$ 、

$$IZ_{m,n} = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h Z(z) \cos \frac{m\pi z}{h} \cos \frac{n\pi z}{h} dz \text{ である。}$$

なお、定常翼面圧力差分布 $\Delta \bar{p}_m(x)$ は境界条件式(9)により α 、 μ および τ に比例する3成分の線形形で表されるので非定常翼面圧力差の定常じょう乱効果成分 $\Delta \bar{p}_m(x)$ も同様に

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{p}_m \\ \Delta \bar{p}_{fn} \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} \Delta \bar{p}_{am} \\ \Delta \bar{p}_{an} \end{bmatrix} + \mu_0 \begin{bmatrix} \Delta \bar{p}_{\mu m} \\ \Delta \bar{p}_{\mu n} \end{bmatrix} + \tau_0 \begin{bmatrix} \Delta \bar{p}_{\tau m} \\ \Delta \bar{p}_{\tau n} \end{bmatrix} \quad \cdots (21)$$

と表すことができ、 $\Delta \bar{p}_{am}(x)$ 、 $\Delta \bar{p}_{\mu m}(x)$ などは互いに独立に決定できる。

3. 曲げおよびねじり振動非定常空気力係数

本報では翼の振動様式として、純曲げ振動および x_e 中心回り純ねじり振動

$$a(x, z) = \begin{cases} Z^{(b,k)}(z) & : \text{BENDING} \\ (x - x_e) Z^{(t,k)}(z) & : \text{TORSION} \end{cases} \quad (22)$$

を仮定する。ここで、 $Z^{(b,k)}(z)$ および $Z^{(t,k)}(z)$ はそれぞれ $z=0$ を固定端とする一様ばりの第 k 次曲げおよびねじり振動モードとし、

$$\frac{1}{h} \int_0^h \{ [Z^{(b,k)}(z)]^2 + [Z^{(t,k)}(z)]^2 \} dz = 1 \dots\dots\dots (23)$$

なる規準化を行っている。なお、第零次振動モード $Z^{(b,0)}(z)$ および $Z^{(t,0)}(z)$ はともに 1 としそれぞれ一様並進および一様回転振動を表すものとする。

非定常空気力が一周期になす局所仕事および単位翼幅長さ当たりの全体仕事は

$$w^{(k)}(z) = \oint dt \int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{Re} \{ \Delta \bar{p}(x, z) e^{i\omega t} \} \\ \times \operatorname{Re} \{ d/dt \cdot a(x, z) e^{i\omega t} \} dx \dots\dots\dots (24)$$

$$W^{(k)} = \frac{1}{h} \int_0^h w^{(k)}(z) dz \dots\dots\dots (25)$$

である。純曲げおよび純ねじり振動時の局所および全体仕事係数をそれぞれ

$$[c_w^{(b,k)}(z), c_w^{(t,k)}(z)] = \frac{1}{\pi^2 \omega} [w^{(k)}(z), W^{(k)}] \dots\dots\dots (26)$$

$$[c_w^{(b,k)}(z), c_w^{(t,k)}(z)] = \frac{1}{\pi^2} [w^{(k)}(z), W^{(k)}] \dots\dots\dots (27)$$

で定義すれば、式(11)、(21)に対応して各仕事係数も同様に分解でき、例えば

$$\begin{bmatrix} C_w^{(b,k)}(z) \\ C_w^{(t,k)}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{wa}^{(b,k)}(z) \\ C_{wt}^{(b,k)}(z) \end{bmatrix} + \alpha_0 \begin{bmatrix} C_{wa}^{(b,k)}(z) \\ C_{wt}^{(b,k)}(z) \end{bmatrix} \\ + \mu_0 \begin{bmatrix} C_{w\mu}^{(b,k)}(z) \\ C_{w\tau}^{(b,k)}(z) \end{bmatrix} + \tau_0 \begin{bmatrix} C_{w\mu}^{(b,k)}(z) \\ C_{w\tau}^{(b,k)}(z) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (28)$$

と表せる。フラッタは仕事 $W^{(k)}$ が構造減衰を上回ったときに発生し、特に構造減衰が零の純曲げおよび純ねじり振動ではそれぞれ $C_w^{(b,k)} > 0$ および $C_w^{(t,k)} > 0$ のときに発生する。

4. 数値計算例

本報では、翼の反りおよび厚みの x 方向分布がともに放物形 $f(x) = g(x) = 1 - 4x^2$ で、時間平均有効迎え角、反りおよび厚みの z 方向分布が

$$\begin{bmatrix} \alpha(z) \\ \mu(z) \\ \tau(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 \\ M_1 \\ T_1 \end{bmatrix} \cos \frac{\pi z}{h} \dots\dots\dots (29)$$

である翼が式(22)で定められる振動をする場合を考察する。ここで、ねじり軸は翼弦中心 ($x_e = 0$) とし、一様片持ばりの z 方向振動モード $Z^{(b,k)}(z)$ および $Z^{(t,k)}(z)$ は第 6 項まで採った余弦級数で近似する。計算にあたり、核関数に含まれる一様収束の無限級数 and は $-10 \sim +10$ 項で打ち切る。式(12)および式(18)中の ξ に関する積分は台形積分公式を用いて計算し、前後縁マッハ線反射点で翼弦を分割した各区間のガウス 4 分点を境界条件適合代表点として解いた。

まず、図 3 に定常翼面圧力差の迎え角および反り成

分 $\Delta \bar{p}_{am}(x)/A_m, \Delta \bar{p}_{\mu m}(x)/M_m$; $m=0, 1$ を示す。迎え角非一様成分 $\Delta \bar{p}_{a1}(x)/A_1$ は一様成分 $\Delta \bar{p}_{a0}(x)/A_0$ に比べ分布形が相似で不連続量は小さい。一方、反りおよび厚み非一様成分 $\Delta \bar{p}_{\mu 1}(x)/M_1, \Delta \bar{p}_{\tau 1}(x)/T_1$ は一様成分 $\Delta \bar{p}_{\mu 0}(x)/M_0, \Delta \bar{p}_{\tau 0}(x)/T_0$ に比べ分布形および不連続量が大きく異なり、非定常空気力に及ぼす影響が大きいと予想される。

以下の図において $\Delta \bar{p}_{a1}(x), \Delta \bar{p}_{\mu 1}(x), \Delta \bar{p}_{\tau 1}(x)$ すなわち $[\alpha(z), \mu(z), \tau(z)] = [A_1, M_1, T_1] \cos(\pi z/h)$ によって誘起される非定常空気力を非一様効果と呼び、 A_1, M_1, T_1 を 0, 0.5, -0.5 と変化させおのおのの差より非一様効果を評価する。

図 4 (a) に一次曲げ振動時の局所仕事係数に対する有効迎え角、反りおよび厚み分布の影響を示す。迎え角成分 $C_{wa}^{(b,1)}(z)$ では翼端で迎え角が大であれば局所仕事係数の絶対値 $|C_{wa}^{(b,1)}(z)|$ も翼端で大となるが、反りおよび厚み成分の絶対値 $|C_{w\mu}^{(b,1)}(z)|$ および $|C_{w\tau}^{(b,1)}(z)|$ はその逆の傾向を示す。これは、前述のように定常翼面圧力差の迎え角非一様成分が一様成分とほぼ相似分布であるのに対し、反りおよび厚み非一様成分は一様成分と大きく異なる分布であることに起因している。

図 4 (b) に同振動時の全体仕事係数と翼間位相差の関係に対する有効迎え角、反りおよび厚み分布の影響を示す。振動速度成分 $C_{wa}^{(b,1)}$ は全翼間位相差で安定側(負)であるのに対し、迎え角成分は $0.5 \leq \sigma \leq 1$ (背面位相遅れ)、反りおよび厚み成分は $0 \leq \sigma \leq 0.5$ (背面位相進み)において不安定側(正)に働く。ただし、本計算例のように食違い角が正 ($\gamma > 0$) の場合、対称翼または正の反りの翼列は有効迎え角零ではタービン翼列(すなわち負の定常揚力を持つ翼列)となるので、一般に翼面負圧側の隣接翼が位相遅れの場合に不安定と言える。全体仕事の大きさは一次曲げ振動においては翼先端の局所仕事の大きさに対応している。また、非定常空気力仕事は音響モード共振点で不連続的变化を示すが、その不連続変化は迎え角、反りおよび厚み成分ともに z 方向第 1, 2 モード共振点のみで顕著に現れ、これより高次モード共振点では無視できる。

図 5 に翼幅方向非定常空気力 $\bar{D}(x, z)$ の効果を調べるために、全体仕事係数(迎え角および反り成分) $C_{wa}^{(b,1)}$ および $C_{w\mu}^{(b,1)}$ と翼間位相差の関係について、 $\bar{D}(x, z)$ を無視した場合と無視しない場合の計算結果を比較する。この場合、定常負荷が一様 ($A_1, M_1, T_1 = 0$) のときには $\bar{D}(x, z)$ の効果のうち圧力双極子の傾き効果(式(8)右辺第 1 項)のみが存在し、定常負荷が非一様 ($A_1, M_1, T_1 \neq 0$) のときには前記効果および定常自由

渦が同一の強さを保ちながら翼の振動に伴って上下振動することにより周囲流体から受ける z 方向空気力効果〔式(8)右辺第2項〕の両方が存在する。亜音速翼列では $\bar{D}(x, z)$ は $|C_{wa}^{(b,1)}|$ のみを増大させ、 $|C_{wa}^{(b,1)}|$ および $|C_{wt}^{(b,1)}|$ を小さくするのに対し、超音速翼列では $|C_{wa}^{(b,1)}|$, $|C_{wt}^{(b,1)}|$, $|C_{wt}^{(b,1)}|$ のいずれをも増大させる。また、 $\bar{D}(x, z)$ の効果(図5の点線と実線の差)は A_1 , M_1 , T_1 にはほとんど依存しない。これは第2項の効果が曲げ振動においては圧力双極子の傾き効果に比べ ω 倍の程度小さいことによる。

定常負荷一様成分 $\Delta \bar{p}_0(x)$ のマッハ線(衝撃波)反射点変位効果は既に文献(1)で述べたとおりであり、ここでは定常負荷非一様成分 $\Delta \bar{p}_1(x)$ のマッハ線(衝撃波)反射点変位効果を調べることにし、図6に同効果を見無視した場合の計算結果との比較を示す。迎え角成分においては定常負荷一様成分 $\Delta \bar{p}_0(x)$ のマッハ線反射点変位効果が支配的であるため、見無視した場合と大きな差はないが、反りおよび厚み成分では $\Delta \bar{p}_1(x)$ のマッハ線反射点変位効果は大きく、それを無視すると空気力仕事の絶対値を M_1 , $T_1=0.5$ の場合には著しく小さく、 M_1 , $T_1=-0.5$ の場合には著しく大きく見積もることになる。

次に、一次曲げ振動において比較的全体仕事係数の大きな翼間位相差 $\sigma=0.23$ での局所仕事係数と諸パラメータの関係を考察する。まず、節弦比 s の変化はマッハ線反射様式すなわち定常負荷分布を大きく変化させ(図3)、非定常空気力はこの影響を受ける。例えば、 $M=1.3$, $\gamma=60^\circ$, $\omega=0.1$, $h=6$ の場合、 s が増加すると

図3 定常翼面圧力差分布に対する節弦比および迎え角、反り分布の影響

$|C_{wa}^{(b,1)}(z)|$, $|C_{wt}^{(b,1)}(z)|$ および $|C_{wt}^{(b,1)}(z)|$ 自体が小さくなり、局所仕事係数に及ぼす迎え角、反りおよび厚みの非一様効果は定常負荷の非一様成分 $\Delta \bar{p}_{a1}(x)$ が比較的小さい $C_{wa}^{(b,1)}(z)$ においてはほとんど変化しないが定常負荷の非一様成分 $\Delta \bar{p}_{a1}(x)$ および $\Delta \bar{p}_{t1}(x)$ が大きい $C_{wa}^{(b,1)}(z)$ および $C_{wt}^{(b,1)}(z)$ においては s に依存して変わる(図7)。次に、無次元元振動数 ω が増加すると局所仕事係数およびそれに及ぼす迎え角、反りおよび厚みの非一様効果は小さくなる(図8)。縦横比 h は亜音速翼列の場合ほど強く非定常空気力に影響しないが h が大であれば迎え角、反りおよび厚みの非一様効果が小さくなる(図9)。特に一様定常負荷(A_1 , M_1 , $T_1=0$)の場合、 $h \sim 6$ 以上ではストリップ理論と大きな差はなく h を無限大にするとストリップ理論と一致する。

さて、3章の曲げ振動非定常空気力が励振力となる

(a) 局所仕事係数に及ぼす迎え角、反りおよび厚み分布の効果

(b) 全体仕事係数と翼間位相差の関係に及ぼす迎え角、反りおよび厚み分布の効果

図4

条件より

$$C_{W\alpha}^{(b,1)} + \alpha_0 C_{W\alpha}^{(b,1)} + \mu_0 C_{W\mu}^{(b,1)} + \tau_0 C_{W\tau}^{(b,1)} = 0 \cdots \cdots (30)$$

を満たす α_0 および μ_0 を限界迎え角および限界反り比と定義し α_{cr} および μ_{cr} と表す。図 10 に限界定常揚力係数を付記した一次曲げ振動時の α_{cr} および μ_{cr} と翼間位相差 σ の関係に及ぼす迎え角および反り分布の影響を示す。迎え角の z 方向非一様性は前記関係にほとんど影響を与えないが、反りの z 方向非一様性は同関係に影響を及ぼし、翼端側で反りを大きくするほう ($M_1 = -0.5$) が安定性が増加し限界定常揚力も大きくなる。また、限界迎え角および反り比の絶対値は共に音響モード共振点で不連続的に小さくなる (不安定度が増す) ことは注目に値する。音響モード共振点を除外すれば $\sigma \sim 0.12$ または 0.81 においてそれらの絶対値は最小になる。

図 5 全体仕事係数と翼間位相差の関係に及ぼす翼幅方向非定常空気力の効果 (迎え角および反り成分)

図 6 全体仕事係数と翼間位相差の関係に及ぼす定常負荷非一様成分のマッハ線反射点変位効果の影響 (迎え角および反り成分)

図 7 局所仕事係数に及ぼす節弦比の効果 (迎え角および反り成分)

図 8 局所仕事係数に及ぼす無次元元振動数の効果 (迎え角および反り成分)

図 9 局所仕事係数に及ぼす縦横比の効果 (迎え角および反り成分)

図 10 一次曲げ振動時の限界迎え角および反り比と翼間位相差の関係に及ぼす迎え角および反り分布の効果と限界定常揚力係数

5. 結 論

衝撃波反射点変位効果を含む二重線形理論を、翼幅方向に非一様な定常負荷を持って振動する亜音速軸流速度の三次元超音速翼列に拡張し、能率的に非定常空気力を計算する手法を定式化した。

迎え角、反りおよび厚みの翼幅方向分布を変化させた数値計算より非定常空気力に対する定常負荷の非一様効果およびそれと諸パラメータとの関係を明らかにした。特に、一次曲げ振動における非定常空気力について以下のことがわかった。

(1) 迎え角分布の非一様効果は小さいが、反りおよび厚みのそれは大きい。

(2) 有効迎え角は翼根側から翼端側に向かって小さくするほうが、反りおよび厚みは翼根側から翼端側に向かって大きくするほうが翼全体に対する非定常空気力仕事の絶対値を小さくすることができ、したがってフラッタ限界の全体定常負荷を大きくすることができる。

(3) 無次元振動数および縦横比を小さくすると非定常空気力仕事に対する迎え角、反りおよび厚みの非一様効果は大きくなる。

本研究は昭和 61, 62 年度科学研究費補助金(一般研究 C)の援助を受けた。

文 献

- (1) 難波・利光, 機論, 53-496, B (昭 62), 3568.
- (2) 難波・利光, 機論, 53-496, B (昭 62), 3560.
- (3) 難波・利光, 機論, 54-501, B (昭 63), 1073.