薄い弾性板によって境された二種類の粘性流体の鉛直加振下における安定性*

永嶋 史朗^{*1}, 長谷川 英治^{*2}

Stability of Two Viscous Fluid Layers Separated by a Thin Elastic Plate Under a Vertical Oscillation

Fumio NAGASHIMA and Eiji HASEGAWA

The stability of two viscous fluid layers which are separated by a thin elastic plate under a vertical oscillation is investigated theoretically using a linear perturbation theory. Two fluid layers are horizontally bounded by two sinusoidally oscillating walls. The upper fluid is lighter than the lower one. The general stability boundaries for the given wave numbers are found analytically in the form of an infinite band determinant. And the neutral stability curves are composed of these stability boundaries in the plane of the frequency and the amplitude of the imposed vertical oscillation for the cases of first-, second- and fourth-order solutions. When the ratio of thickness of the upper fluid layer to the total one is small or near unity, the system considered is very stable. In the region of large value of the stiffness or the in-plane force of the elastic plate, their increase makes the system more stable, but it makes the system more unstable in the region of a small value of them. When the ratio of density of the upper fluid layer to the lower one increases, the system is stabilized.

Key Words: Fluid Mechanics, Elastic Plate, Viscous Fluid Layer, Vertical Oscillation, Stability Curve

1. はじめに

鉛直に加振されている液体層の波動運動に関する問題は、いくつかの条件下での研究成果が報告されている(1)~(7)。このような問題に関連して二つの密度の異なる流体が自由な界面によって接している場合、たとえそれが安定な密度成層の流体層であったとしても鉛直方向に加振されることによってその界面に不安定が生じ波動運動が現われることが数値計算と実験の両面から調べられている(5)。工業的には、二つの液体(もっと一般的には流体)が層をなしているとき外部からの振動によってそれが波立つことを抑止したい場合が多い。そのようなとき、この自由界面の位置に薄い板を挿入すればより安定になることが予想される。このような流体層の波立ちを防止する目的に薄い弾性板を用いたときにどのような効果があるかは、液体層が板の下側にのみある場合について数値計算と実験により調べられている(3)。ここでは、密閉された容器

内に二種類の密度の異なる流体が弾性板によって水平に仕切られている比較的複雑な系の鉛直加振下の安定限界を解析的に求める。その際、このような系の安定限界が近似的に Mathieu タイプの方程式により支配されていることを考慮して流体が粘性流体の場合について解析解を一般的な形に求める。その解を用いて基本的な振動応答について系の様々なパラメータによりその安定限界がどのように影響を受けるかを調べる。

2. 支配方程式系

水平な無限に広い二つの壁の間に密度 ρ_1 、動粘度 ν_1 の重い流体が下側に、密度 ρ_2 、動粘度 ν_2 の軽い流体が上側になるように面密度 m 、曲げこわさ D 、厚み δ の弾性板によって仕切られている状況を考える。ただし、これらの流体は非圧縮粘性流体であり、弾性板の中立面から下の壁までの距離が H_1 、上の壁までの距離が H_2 であるとする。このとき、この系全体が振幅 f 、振動数 ω の正弦波的に変化する加速度 $f \cos \omega t$ によって鉛直方向に加振されても、両流体および弾性板が上下の壁に対して相対的に動かない状態がありうる。なお、ここでも時間である。この波動運動の起こつ

* 昭和63年10月19日 第66期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和63年3月25日。

^{*1} 正員、慶応義塾大学大学院 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。

^{*2} 正員、慶応義塾大学理工学部。

図1 系の概略と座標系

ていない状態の弾性板の中立面に沿って x, y 軸を取り、その面より鉛直上向きに z 軸を取ることにすると(図1)、このときの圧力 P_j ($j=1, 2$)は、

$$0 = -\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial P_j}{\partial z} (g + f \cos \omega t) \quad (1)$$

$$P_2 \Big|_{z=\delta/2} + m(g + f \cos \omega t) = P_1 \Big|_{z=-\delta/2} \quad (2)$$

の方程式系により支配される。ただし、ごこと以下において、下添え字 j が1のとき下の流体、2のとき上の流体を意味する。また、 g は重力加速度である。この問題で特徴的なことは式(2)を見ればわかる通り、文献(3)などの場合と異なり上下の流体層の厚みが共に有限なので、弾性板の厚みを考慮しなければならないことである。このことにより流体の占める領域は当然ながら狭くなる。次に、加振されたことにより流体層と弾性板に波動運動が生じた状態を考える。ここで問題としているのは、主にこの系の安定限界である。よって、これらの変動量は小さいと仮定する。図1に示す通り、この波動運動状態下での弾性板の変位を $\eta(t, x, y)$ とし、上下の流体の速度成分を $u_j(t, x, y, z), v_j(t, x, y, z), w_j(t, x, y, z)$ とし、圧力を $p_j(t, x, y, z)$ とする。これらの変動量の1次まで正しい方程式系は流体の連続と運動の方程式、弾性板の運動方程式、上下の壁での粘着の条件、弾性板の上下の面での粘着と運動学的条件により書き下せる。それらの方程式を文献(3)などと同様の考察により u_j, v_j, p_j を消去し二次元的波が発生するとし、その波の方向に x 軸を取り直すと

$$\eta(t, x, y) = \tilde{\eta}(t) e^{ikx} \quad (3)$$

$$w_j(t, x, y, z) = \tilde{w}_j(t, z) e^{ikx} \quad (4)$$

のようにフーリエ分解できる。ここで、 e は自然対数

の底、 i は虚数単位であり、 k は波数の波数、 $\tilde{\eta}, \tilde{w}_j$ はフーリエ成分の振幅関数を表わす。さらに、

$$x = H_1 x', \quad y = H_1 y', \quad z = H_1 z',$$

$$t = \frac{H_1}{(g H_1)^{1/2}} t', \quad \tilde{\eta} = H_1 \tilde{\eta}',$$

$$\tilde{w}_j = (g H_1)^{1/2} \tilde{w}_j' \quad (5)$$

のように標準化する。そして、無次元パラメータは

$$k' = H_1 k, \quad T' = \frac{H_2}{H_1}, \quad \delta' = \frac{\delta}{H_1}, \quad f' = \frac{f}{g},$$

$$\omega' = \frac{H_1}{(g H_1)^{1/2}} \omega, \quad \nu_j' = \frac{\nu_j}{(g H_1)^{1/2} H_1},$$

$$L' = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad m' = \frac{m}{\rho_1 H_1}, \quad D' = \frac{D}{\rho_1 g H_1^4},$$

$$N' = \frac{N}{\rho_1 g H_1^2} \quad (6)$$

である。ここで、 N は板が外部より受けている波の方向の引っ張りまたは圧縮の面内力である。解くべき支配方程式系は無次元量を示すプライムとフーリエ成分の振幅関数を示す記号 $\sim$ を簡単のために省略して書くと

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \frac{\partial w_j}{\partial t} = \nu_j \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right)^2 w_j \quad (7)$$

$$z = T: w_2 = \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

$$z = \delta/2: \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0, \quad w_2 = \frac{d\eta}{dt} \quad (9)$$

$$z = -\delta/2: \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \quad w_1 = \frac{d\eta}{dt} \quad (10)$$

$$z = -1: w_1 = \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

$$k^2 \left[(1-L)(1+f \cos \omega t) + k^2 N + k^4 D + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \eta + \left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 3k^2 \right) \right] \frac{\partial w_1}{\partial z} \Big|_{z=-\delta/2} - L \left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 3k^2 \right) \right] \frac{\partial w_2}{\partial z} \Big|_{z=\delta/2} = 0 \quad (12)$$

のようになる。文献(3)と板の式(12)は上の流体によって板に加わる応力を示す最後の項が異なる。

上下の流体層ともに粘性の影響が小さく無視できる場合、文献(3)などと同様の考察により弾性板の変位を支配するMathieuタイプの方程式が導かれる。すなわち、

$$\left[\frac{1}{k \tanh k (1 - \delta/2)} - L \frac{1}{k \tanh k (\delta/2 - T)} + m \right] \frac{d^2 \eta}{dt^2}$$

$$+ \left[(1-L) + k^2 N + k^4 D + (1-L) f \right. \\ \left. \times \cos \omega t \right] \eta = 0 \dots \dots \dots (13)$$

である。この方程式の周期係数の項は $(1-L)f \cos \omega t$ である。したがって、 $(1-L)f \rightarrow 0$ とすれば、単振動の方程式となり、係数励振は起こらない。別の見方をすれば、 $1-L$ が小さい場合は、 f の値が大きくなければ、不安定にならない。すなわち、振動しにくくなり、系は安定化されることとなる。密度比 L は、振動応答に関して重要な因子とみることができる。

3. 安定限界の関係式

文献(6)では、安定限界を求める際に特定の振動数の波のみを対象としたが、ここではそれを一般的にまたより見通しよく扱うことを考える。第2章で示したように粘性の効果の非常に小さい場合、この問題は Mathieu タイプの方程式に帰着される。この Mathieu タイプの方程式は係数に適当な値を選べば恒等的に零でない周期解が存在する。その周期解、すなわち Mathieu 関数は収束するフーリエ級数に展開できるのであるが⁽⁸⁾、この問題において一般に粘性を考慮したときも、そのようなフーリエ級数に展開できるものとし、さらに運動学的条件である式(9)、(10)の第

二式を考慮して $\eta, w_j (j=1,2)$ を奇数次の Mathieu 関数に対応する解として

$$\eta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \bar{\eta}_{2n+1} e^{(2n+1) i \omega t / 2} + \text{c.c.} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

$$w_j(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} i \frac{2n+1}{2} \omega \left\{ \bar{\eta}_{2n+1} W_{j, 2n+1}(z) e^{(2n+1) i \omega t / 2} - \text{c.c.} \right\} \quad (15)$$

偶数次のそれに対応する解として

$$\eta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \bar{\eta}_{2n} e^{2n i \omega t / 2} + \text{c.c.} \right\} \quad (16)$$

$$w_j(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} i \frac{2n}{2} \omega \left\{ \bar{\eta}_{2n} W_{j, 2n}(z) \times e^{2n i \omega t / 2} - \text{c.c.} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

のように展開する。これらの式を弾性板の力の釣合式(12)に代入しまとめると奇数次、偶数次のどちらの場合でも形式的に同じ形の三重対角形の係数行列をもつ $\bar{\eta}_n$ についての同次連立1次方程式が導かれる。すなわち、奇数次、偶数次の各々の場合について

$$\begin{bmatrix} f/2 & R_{2n+1} & f/2 & & & \\ & \ddots & & & & \\ & f/2 & R_3 & f/2 & & \\ & & \ddots & & & \\ & & f/2 & R_1 & f/2 & \\ & & & \ddots & & \\ & & & f/2 & R_1^* & f/2 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & f/2 & R_3^* & f/2 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & f/2 & R_{2n+1}^* & f/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\eta}_{2n+1} \\ : \\ \bar{\eta}_3 \\ \bar{\eta}_1 \\ \bar{\eta}_1^* \\ \bar{\eta}_3^* \\ : \\ \bar{\eta}_{2n+1}^* \\ : \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} : \\ 0 \\ : \\ 0 \\ : \\ 0 \\ : \\ 0 \\ : \\ 0 \\ : \end{bmatrix} \dots \dots \dots (18)$$

$$\begin{bmatrix} f/2 & R_{2n} & f/2 & & & \\ & \ddots & & & & \\ & f/2 & R_4 & f/2 & & \\ & & \ddots & & & \\ & & f/2 & R_2 & f/2 & \\ & & & \ddots & & \\ & & & f/2 & R_0 & f/2 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & f/2 & R_2^* & f/2 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & f/2 & R_{2n}^* & f/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\eta}_{2n} \\ : \\ \bar{\eta}_4 \\ \bar{\eta}_2 \\ \bar{\eta}_0 + \bar{\eta}_0^* \\ \bar{\eta}_2^* \\ \bar{\eta}_4^* \\ : \\ \bar{\eta}_{2n}^* \\ : \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} : \\ 0 \\ : \\ 0 \\ : \\ 0 \\ : \\ 0 \\ : \\ 0 \\ : \end{bmatrix} \dots \dots \dots (19)$$

となる。ここで、 $\bar{\eta}_n^*$ は $\bar{\eta}_n$ の複素共役をとったものである。なお、偶数次の $\bar{\eta}_0$ 、 $\bar{\eta}_0^*$ は $\bar{\eta}_0 + \bar{\eta}_0^*$ の形で

のみ現れるのでこれらの虚数部分は実際には意味を持たないが、形式解を統一的に表現できるのでこのよう

にした。式中の R_n は形式的に

$$R_n = 1 + \frac{1}{1-L} (k^2 N + k^4 D) - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \frac{\omega^2}{1-L} (Q_{1n} - L Q_{2n} + m) \dots (20)$$

であり、ここで、

$$Q_{jn} = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ \frac{1}{k^2} \left[1 + i \left(\frac{n}{2}\right) \frac{\nu_j}{\omega} \left(\frac{d^2}{dz^2} - 3k^2\right) \right] \frac{dW_{j,n}}{dz} \Big|_{z=(-1)^{j\delta/2}} & (n \neq 0) \end{cases} \dots (21)$$

である。 R_n^* はこの式(20), (21)の複素共役をとったものである。ところで、 Q_{jn} は、流体運動を記述するところの関数 $W_{j,n}$ を含んでいるがこれらは次のように決定される。解形式(14)~(17)を式(7)~(11)に代入して、フーリエ成分毎にまとめると、互いに複素共役の関係にある $W_{j,n}$ と $W_{j,n}^*$ を求めるための2組の方程式系を得る。すなわち、

$$Q_{rjn} = (2k^4 \nu_j^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \omega^2) c_j s_j (s_{rjn}^2 + s_{ijn}^2) + 2k^2 \nu_j^2 (\lambda_{rn}^2 + \lambda_{in}^2) s_j [c_j (s_{rjn}^2 + c_{ijn}^2) - c_{rjn} c_{ijn}] - k \nu_j \left(\frac{n}{2}\right) \omega s_j^2 (\lambda_{rn} c_{ijn} s_{ijn} - \lambda_{in} c_{rjn} s_{rjn}) - 2k \nu_j [k^2 \times \nu_j \lambda_{rn} + \left(\frac{n}{2}\right) \omega \lambda_{in}] s_{rjn} [c_{rjn} (c_j^2 + s_j^2) - c_j c_{ijn}] - 2k \nu_j (k^2 \nu_j \lambda_{ijn} - \left(\frac{n}{2}\right) \omega \times \lambda_{rn}) s_{ijn} [c_{ijn} (c_j^2 + s_j^2) - c_j c_{rjn}] \dots (28)$$

$$Q_{ijn} = k \nu_j \left\{ k \left(\frac{n}{2}\right) \omega c_j s_j (s_{rjn}^2 + s_{ijn}^2) - 2k \nu_j^2 (\lambda_{rn}^2 + \lambda_{in}^2) s_j s_{rjn} s_{ijn} - \left(\frac{n}{2}\right) \omega [\lambda_{rn} s_{rjn} (c_{rjn} (c_j^2 + 1) - 2c_j c_{ijn}) + \lambda_{in} s_{ijn} (c_{ijn} (c_j^2 + 1) - 2c_j c_{rjn})] - 2 \times k^2 \nu_j [\lambda_{rn} s_{ijn} (c_{ijn} - c_j c_{rjn}) - \lambda_{in} s_{rjn} (c_{rjn} - c_j c_{ijn})] \right\} \dots (29)$$

$$Q_{djn} = k \left\{ (4k^2 \nu_j^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \omega^2) s_j^2 (s_{rjn}^2 + s_{ijn}^2) + 4k^2 \nu_j^2 (\lambda_{rn}^2 + \lambda_{in}^2) [c_j^2 (c_{rjn}^2 + c_{ijn}^2) - s_j^2 - 2c_j c_{rjn} c_{ijn}] + 4k \nu_j (2k^2 \nu_j \lambda_{rn} + \left(\frac{n}{2}\right) \omega \lambda_{in}) s_j s_{rjn} (c_{ijn} - c_j \times c_{rjn}) + 4k \nu_j (2k^2 \nu_j \lambda_{in} - \left(\frac{n}{2}\right) \omega \lambda_{rn}) s_j s_{ijn} (c_{rjn} - c_j c_{ijn}) \right\} \dots (30)$$

となる。ただし、

$$c_j = \cosh k \xi_j, \quad s_j = \sinh k \xi_j, \quad c_{rjn} = \cosh \lambda_{rn} \xi_j, \quad s_{rjn} = \sinh \lambda_{rn} \xi_j, \\ c_{ijn} = \cos \lambda_{in} \xi_j, \quad s_{ijn} = \sin \lambda_{in} \xi_j \dots (31)$$

$$\lambda_{rn} = \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(k^4 + \left(\frac{n}{2} \frac{\omega}{\nu_j} \right)^2 \right)^{1/2} + k^2 \right] \right\}^{1/2}, \quad \lambda_{in} = \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(k^4 + \left(\frac{n}{2} \frac{\omega}{\nu_j} \right)^2 \right)^{1/2} - k^2 \right] \right\}^{1/2} \dots (32)$$

$$\xi_j = \begin{cases} 1 - \delta/2 & (j=1) \\ \delta/2 - T & (j=2) \end{cases} \dots (33)$$

である。また、この特別の場合として流体が完全流体と見なせる場合には Q_{jn} は非常に簡単な形になる。すなわち、次のようになる。

$$Q_{jn} = \frac{c_j}{k s_j} \dots (34)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^2 W_{j,n} = i \left(\frac{n}{2} \right) \frac{\omega}{\nu_j} \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) W_{j,n} \dots (22)$$

$$z=T: W_{2,n} = \frac{dW_{2,n}}{dz} = 0 \dots (23)$$

$$z=\delta/2: \frac{dW_{2,n}}{dz} = 0, \quad W_{2,n} = 1 \dots (24)$$

$$z=-\delta/2: \frac{dW_{1,n}}{dz} = 0, \quad W_{1,n} = 1 \dots (25)$$

$$z=-1: W_{1,n} = \frac{dW_{1,n}}{dz} = 0 \dots (26)$$

および、これらの式の複素共役をとることにより得られる $W_{j,n}^*$ についての方程式系である。方程式系(22)~(26)およびこの複素共役の方程式系は、境界条件に非同次項があるのであるが、解析的に解くことができ、それらの解を式(21)に代入し Q_{jn} を実数部と虚数部に分離して表示できる。すなわち、

$$Q_{jn} = \frac{Q_{rjn}}{Q_{djn}} + i \frac{Q_{ijn}}{Q_{djn}} \dots (27)$$

とおけば、

上下の流体がともに完全流体とみなせる場合は連立1次方程式(18), (19)はMathieu関数をフーリエ展開したときの係数を決定するものとなるのであるが、まず、そのときのこの式(18), (19)の性質を調べておこう。完全流体の場合、式(34)を見ればわかるように Q_{jn} は ω の関数ではない。よってある任意の $n = n_0$ ($n_0 \neq 0$) に対して

$$\omega^2 = \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{Q_{1n} - L Q_{2n+m}} [(1-L) + (k^2 N + k^4 D)] \quad (n = n_0) \dots (35)$$

の式を満足するように ω を定めると

$$R_n \begin{cases} = 0 & (n = n_0) \\ \neq 0 & (n \neq n_0) \end{cases} \dots (36)$$

とすることができる。このとき式(18), (19)の係数行列式は

$$\frac{f}{2} \left(C_0 + C_1 \frac{f}{2} + C_2 \left(\frac{f}{2}\right)^2 + \dots \right) = 0 \dots (37)$$

と展開できるので, $f=0$ とすればこの係数行列式を零とすることができる。すなわち, $f-\omega$ 平面に安定限界曲線を描けば式(35)を満足する ω で ω 軸に到達する。この安定限界曲線は ω 軸に達すると式(36)および式(18), (19)より

$$\bar{\tau}_n \begin{cases} \neq 0 & (n = n_0) \\ = 0 & (n \neq n_0) \end{cases} \dots (38)$$

となる。よって, これは $f \rightarrow 0$ で振動数 $n \omega/2$ ($n = n_0$) の正弦波に収束する安定限界曲線である。すなわち, これは n_0 次の Mathieu 関数に対応する安定限界曲線である。一般に粘性を考慮した流体の場合も $\nu_1, \nu_2 \rightarrow 0$ でこの安定限界曲線に一致するものを, n_0 次の Mathieu 関数に対応する安定限界曲線とみなす。ここでは, これを n_0 次の安定限界曲線と呼ぶ。

4. 安定限界曲線

および中立安定曲線

次に具体的に安定限界曲線を計算してみよう。それには連立1次方程式(18), (19)の係数行列式が零となる条件を求めればよいのであるが, これは無限行列式となるので近似的に解かなければならない。ここでは初めて不安定領域が決定される最低の次数までの $\bar{\tau}_n$, $\bar{\tau}_n^*$ を考慮する。すなわち, 奇数次のときは $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_1^*$ まで, 偶数次のときは $\bar{\tau}_4, \bar{\tau}_2, \bar{\tau}_0, \bar{\tau}_0^*, \bar{\tau}_2^*, \bar{\tau}_4^*$ までを考慮する。ここで, $\bar{\tau}_2, \bar{\tau}_2^*$ までの考慮では不安定領域は一つも決定できず, $\bar{\tau}_4, \bar{\tau}_4^*$ を取り入れることにより初めて偶数次の不安定領域が決定される。こうすることにより2次, 4次の二つの不安定領域が一度に決定されることを注意しておく。ここまでの近似では, 奇数次のとき

$$\begin{bmatrix} R_1 & f/2 \\ f/2 & R_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\tau}_1 \\ \bar{\tau}_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots (39)$$

となるので安定限界の関係式は,

$$\left(\frac{f}{2}\right)^2 = R_1 R_1^* \dots (40)$$

偶数次のとき,

$$\begin{bmatrix} R_4 & f/2 & 0 & 0 & 0 \\ f/2 & R_2 & f/2 & 0 & 0 \\ 0 & f/2 & R_0 & f/2 & 0 \\ 0 & 0 & f/2 & R_2^* & f/2 \\ 0 & 0 & 0 & f/2 & R_4^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\tau}_4 \\ \bar{\tau}_2 \\ \bar{\tau}_0 + \bar{\tau}_0^* \\ \bar{\tau}_2^* \\ \bar{\tau}_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots (41)$$

より

$$\left(\frac{f}{2}\right)^2 = \frac{-A_1 \pm (A_1^2 - 4 A_2 A_0)^{1/2}}{2 A_2} \dots (42)$$

となる。ただし,

$$A_2 = R_0 + R_4 + R_4^*$$

$$A_1 = - \left[R_0 (R_2 R_4 + R_2^* R_4^*) + R_4 R_4^* (R_2 + R_2^*) \right]$$

$$A_0 = R_0 R_2 R_2^* R_4 R_4^* \dots (43)$$

である。これらの近似解(40), (42)においても, 上下の流体が完全流体である場合, $R_n=0$ のとき $f=0$ となることは式(18), (19)と同様である。安定限界の関係式(40), (42)を用いて上下の流体が完全流体である場合に実際に安定限界を計算しそれを波の波数 k をパラメータとして $f-\omega$ 平面に示せば奇数次のとき図2(a), 偶数次のとき図2(b), (c)のようになる。これらの図は各々, 図(a)は1次, 図(b)は2次, 図(c)は4次の安定限界曲線である。上下両層ともに完全流体の場合, 特徴的なことは, いかなる次数の安定限界曲線も任意の振動数において波数 k を適当に与えれば式(35)を満足できる。すなわち, 任意の振動数において $f=0$ とすることができる。この問題の場合, 水平方向に有限な容器中の問題とは異なり, すべての波数の波は対等に存在しうるのでいかなる加振振動数のときでもすべての次数の波が発生する可能性を持つことになる。すなわち, 上下の流体が完全流体と見なせる場合, この系を鉛直方向に振動させようとするとき, いかに加振振幅 f が小さくても, また, 曲げこわさ D , 引っ張り力 N などをいかに大きくしても系は必ず不安定となり, しかも, その振動がどの次数の応答であるかを決定することはできない。また, その発生する波の波数と振動数の関係は式(35)で表わされるものであって, 図3(a)に示すようになる。

次に, 上下の流体の影響を考慮して, この式(27)~(30)を用いて安定限界曲線を計算すると図2(d)~(f)

図2 安定限界曲線

図3 加振振動数と発生する波の波数の関係

のようになる。これらはおのおの図2(a)～(c)に対応する粘性を考慮したときの1次, 2次, 4次の安定限界曲線の図である。安定限界曲線は ω 軸から離れそれらの包絡線である中立安定曲線⁽⁵⁾は, ω 軸の側に凸の曲線となる。発生する波の波数は図3(b)に示すように中立安定限界曲線上の波数となる。図2(d)～

(f)を見てわかる通り, おのおのの中立安定曲線は, 限界加振振幅の値が異なる。すなわち, 加振振幅 f を零から大きくしてきたときにより早く振動するのがどの応答であるかを決定することができるようになる。このパラメータの場合, ω がごく小さい領域のみで4次の応答が, その他大半の領域で1次の応答が発生し

やすいこととなる⁽⁶⁾。また、実際に、任意の振動数で揺らした場合、最も注意しなければならないのは、限界加振振幅の最小値であり、これを f_{min} とし、一本の中立安定曲線を代表する臨界的数値と考える。そのときの波の波数を k_{min} とする。これはその系で最も発生しやすい波の波数である。

5. 自由界面の場合 との比較

第1章でも述べたように流体層の波立ち防止のために弾性板がどの程度の効果があるかを検討してみよう。従来このような系を持つ鉛直加振下の波立ちについては、1次の安定限界について2つの流体層が、自由な界面により接触しているときが、数値計算および実験により調べられている⁽⁵⁾。この論文とのパラメータの関係は、文献(5)のパラメータを右辺にこの論文でパラメータを左辺にして書けば、

$$k = k, T = T, \delta = 0, f = F, \omega = G,$$

$$\nu_1 = \frac{1}{R}, \nu_2 = \frac{N}{R}, L = L, m = 0, N = W \quad (44)$$

のような対応関係がある。ただし、界面張力は弾性板の面内力に置き換えられるものとした。このようにして、文献(5)の図2(a), (b)の場合とここで扱っている場合との比較をしてみると図4(a), (b)のようになる。図中でF. I. は文献(5)の中立安定曲線であり、実線はここで扱っている場合のそれらである。ただし、文献(5)の中には弾性板の曲げこわさ D に対応するパラメータがないので、それをパラメータとして選んだ。図4(a), (b)においておのおののパラメータはまちまちであるが、 ν_1, ν_2 に代表される粘性の影響は、

図4(a)のパラメータの方が大きいと考えることができる。図4において文献(5)の安定曲線と曲げこわさ $D=0$ の安定曲線を比較すれば、変形に際してまったく抵抗のない膜を2つの流体層の間に挿入した時になるかを知ることができる。すなわち、流体が板の表面に粘着する事そのものの効果が知られる。図4(a)においては、中立安定曲線は、右側に大きく移動している。これは粘着条件そのものの系の安定化に対する効果は大きいということになる。しかし、図4(b)においては、最小加振振幅 f_{min} の位置が多少異なるだけで、全体的位置の変化は、ほとんどない。

では、流体が板の表面に粘着する効果以外で板を挿入したときの影響を調べてみよう。まず、1次の安定限界について板に関するパラメータ $\delta, m, N, D=0$ の状態から安定限界の f を展開してみると図2のパラメータに近い値を選んで、 $k=1, \omega=0.75, \nu_1=3.2 \times 10^{-4}, \nu_2=1.7 \times 10^{-3}, T=1, L=0.84$ とすると、 $f=2.52+1.39\delta+1.74m-12.4N-12.4D+\dots$ となる。 δ, m の係数は1のオーダーであるが、 δ, m の値そのものは一般に非常に小さいと考えられるので、 δ, m の影響はあまりないと考えられる。これに対して N, D の係数の絶対値は12.4と比較的大きく、また、 N, D は1のオーダーもしくはそれ以上のケースも珍しくはないのでこれらのパラメータの影響は大きい。ここで注目すべきことは N, D の係数がマイナスであることである。一般に N, D を大きくすると安定化されることが予想されるが比較的小さい場合にはその増加は不安定化を招くこととなる。このようすを k と ω をパラメータにして図5に示す。最も不安定となる点、すなわち、 f の極小値があることがわかる。

(a) 粘性の影響の大きいとき

(b) 粘性の影響の小さいとき

図4 自由界面の場合との比較

図5 曲げこわさと安定限界加振振幅の関係

 図6 厚み比 $T/(1+T)$ と f_{min} の関係

 図7 厚み比 $T/(1+T)$ と k_{min} の関係

6. 流体層の厚みの影響

今度は、流体層の厚みが安定性にどのように関与するかを調べてみよう。それには、いままで用いられていたパラメータを組み合わせると都合がよい。すなわち、図6のようなパラメータを用いる。このようなパラメータを用いると、横軸の $T/(1+T)$ は、全体の厚みに対する上の流体層の厚み、 $\delta/(1+T)$ は全体の厚みに対する弾性板の厚みで、この $\delta/(1+T)$ は弾性板の厚み一定のもとでは全体の厚みを代

表するものと考えられる。すなわち、図6は上下の流体の厚み比と f_{min} の関係を全体の厚みをパラメータにとって表示したことになる。この図によれば、全体の厚み一定のもとでは、上下の流体の厚み比がほぼ等しいときに最も不安定となるがそれは、1:1のときではなくおよそ3:2の時となっている。上下の流体層が同じ厚みの時ではないことは注目すべきことである。そして、 $T/(1+T)$ が0または1に近づくとき $T/(1+T)$ のある値で急速に f_{min} は大きくなり安定化されていることがわかる。また、図7は最も発生しやすい波の波数 k_{min} を縦軸にして図6と同じパラメータで示した図である。系全体の厚みがあまり深くないときにはこの k_{min} はほぼ一定であるのに対して、非常に深いときには、上下の流体層の深さのほぼ同じ時に極小値をとり、下に凸の曲線となっている。

7. むすび

密閉された容器内の二種類の密度の異なる流体を水平に仕切る弾性板の安定限界が非常に一般的な形で解析的に求められた。そして、その解析解は無限三重帯行列式となることが示された。これをもとにしておもに次のことが調べられた。

- (1) 流体層の厚みが薄い、流体の粘性が高いなど、粘性の影響が比較的大きいとき、たとえ、変形に対して抵抗しない膜であったとしても波の防止効果は大きい。
- (2) 板の曲げこわさ、引っ張り面内力は系を一般に安定化させるものであるが比較的それらの小さいときそれらの増加は系を逆に不安定化する。
- (3) 全体の厚み一定の場合、最も不安定な上下の流体の厚みは1:1より少しずれる。実際の場合では、上の流体層の厚みと下のそれが3:2程度のときに最も不安定となった。

参考文献

- (1) Benjamin, T., B. and Ursell, F., Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, 224-1163 (1954), 505.
- (2) 長谷川・他2名, 機論, 49-448, B (昭58), 2901.
- (3) 長谷川・他2名, 機論, 51-466, C (昭60), 1218.
- (4) 橋本, 機誌, 89-810, (昭61), 512.
- (5) 長谷川・他2名, 機論, 53-488, C (昭62), 946.
- (6) 永嶋・長谷川, 機論, 53-494, C (昭62), 2081.
- (7) Hasegawa, E, J. of Sound and Vibration 115-2 (1987), 339.
- (8) McLachlan, N.W., Theory and Application of Mathieu Functions (1947), 21, Oxford University Press.

討 論

〔質問〕 橋本 弘之・須藤 誠一

〔東北大学高速力学研究所〕

(1) 二つの液体界面の波動抑止の具体的工業応用例とはどのようなものか。

また、むすび(3)の結果(3:2のとき、不安定)を裏付ける実際例があるか。

(2) 密閉された容器内で二次元的波が発生し、式(3)および式(4)が成立する根拠はどのようなものでしょうか。また、実用において、波の方向 α はどのようにして決定されるものか。

〔回答〕 (1) 加振下の二流体系の仕切り板による安定性の違いの一般的性質を解析的に調べることに著者らは重点をおいている。次に、結果(3)への密度比の影響は、付図1に示されているように、かなりある。しかし、気体と液体の場合は文献(3)の結果が十分適用できるから、興味の内容は2種類の液体の場合となる。後者では密度比の範囲に限られるから、水と油に代表されるようなパラメータをもつ系のみについて考察を加えた。しかし、その結果は液体-液体系につ

いての一般的なものとみてよいと思う。

(2) この系については、目下、実験を行いつつあるところで、まだ結果の整理ができていないが、今の問題の特殊例の一つである文献(3)の系については、波の形と向きについて調べている。その結果を示すと付図2のようになり、波は二次元的であり、その向きは容器の壁に対していろいろな場合があり偶然性によるものと考えている。

付図1 $T/(1+T)$ と $f_{\min}$ の関係 (密度比 L の影響)

付図2 発生する波動