モアレシュリーレン法による非対称流れ場の温度・密度測定*
(第1報, 直交級数を用いるモアレデータの変換法)田部井 勝稲^{*1}, 白 井 紘 行^{*1}Temperature And/Or Density Measurements of Asymmetrical
Flow Fields by Means of the Moire-Schlieren Method
(1st Report, Inverting Method of Moire Data Using an
Orthogonal Polynominal Expansion)

Katsuine TABELI and Hiroyuki SHIRAI

A numerical method is presented for inverting the moire data which represent integral light deflection to internal temperature and /or density distributions. The method is applicable to both symmetrical and asymmetrical flow field. The inverting method is constructed on the basis of the Maldonado-Olsen series representation which was developed for the inversion of an integral intensity fields. The validity and accuracy of the present method have been demonstrated by using a mathematical model with a density function of a truncated pyramid type.

Key Words: Flow Measurement, Moire Method, Asymmetrical Flow, Mathematical Inversion, Visualization

1. ま え が き

モアレシュリーレン法は気体の密度変化に伴う光の屈折現象を利用して, 非接触で温度・密度などを測定する光学的測定法の一つである。本方法は同じ屈折法であるマッハツェンダー干渉計などと比較して光学系が簡単かつ廉価であるうえに光学系の設置がかなり容易であることなどのため, 近年多方面で定量測定のできる可視化法として用いられつつある。例えばバーナでの燃焼火炎⁽¹⁾, プラズマジェット流の温度測定⁽²⁾, プラズマ密度測定⁽³⁾, 超音速流れ中の物体回りの流れの可視化⁽⁴⁾などである。

測定する流れ場が回転対称である場合, 流れの任意の点の温度・密度はモアレじまの移動量すなわち屈折角の変位データにアーベル変換法⁽⁵⁾を適用することで求められる。しかし, 完全に非対称な流れ場では, 干渉法などで用いられる積分方程式の逆変換法⁽⁶⁾をモアレ法に適用することはできない。なぜならば干渉法では, 干渉じまの移動量は観測方向の密度の積分値に比例するのに対し, モアレ法のデータは観測方向と直角方向

の密度こう配の積分値に比例した量となるためである。したがって非対称流れ場の任意の点の温度・密度をモアレデータから求めるにはそれに対応した理論的変換法が必要となる。

本研究は平行光線を用いる干渉法などの変換理論の一つであるマルドナド・オルセンの級数展開理論⁽⁷⁾を基礎にして, モアレ法による非対称流れの温度・密度を求める変換理論を新しく構成したものである。本理論による代表的モデル計算例として, 正方形断面をもつ角すい台の密度関数を取り上げ, この方法の有効性を示すとともに, 数値計算するときに必要な級数の有効項数などについても検討した。

2. 理 論

2.1 モアレ法 2枚の格子(格子線間距離 d)を微小角 θ だけ傾けると, d/θ 間隔に拡大されたモアレじまが生じる。このモアレじまの拡大効果を利用して, 図1のように流体内を通る光の屈折角 ϕ を測定すると, それに対応するモアレ変位量 w は,

$$w = \phi \Delta / \theta \quad \dots\dots\dots (1)$$

となる。ここに Δ は平行な2枚の格子 G_1, G_2 の間隔である。 ϕ は光の屈折率 n の, 観測方向(x')と直角方向(y')のこう配を観測方向に積分した

* 昭和63年11月23日 中国四国支部・九州支部合同岡山地方講演会において講演, 原稿受付 昭和63年6月6日。

*¹ 正員, 群馬大学工学部(〒376 桐生市天神町1-5-1)。

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial n}{\partial y'} dx' \dots\dots\dots (2)$$

で与えられるが、一般に気体の n は 1 に極めて近く、密度 ρ と $n=1+\beta\rho$ の関係にあるため、結局

$$w = \frac{\beta\Delta}{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \rho}{\partial y'} dx' \dots\dots\dots (3)$$

の関係が得られる。 w の測定データより密度分布 ρ を求めるには 2・2 節で述べる逆変換が必要である。 ρ が求まると、一定圧力条件下あるいは等エントロピー条件下での気体温度はそれぞれ

$$\left. \begin{array}{l} T \propto \rho^{-1} \\ T \propto \rho^{\kappa-1} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

により計算することができる。ここで κ は比熱比。

2・2 変換理論 モアレじまの観測は測定する流れ場に平行光線を当てて行い、かつ観測系を測定系に対し回転していくものとする。図 2 に変換すべき測定領域と座標系を示す。 x, y は固定座標、 x', y' は観測系の移動座標で、両座標は角度 ξ で交差している。このとき密度関数 $f(x, y)$ とモアレ変位量 $w(y', \xi)$ との関係は式(3)より

$$w(y', \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y'} dx' \dots\dots\dots (5)$$

と表される。ここに $f(x, y)$ は $(\rho - \rho_0)\beta\Delta/\theta$ である(ρ_0

は基準点の密度)。この式は良く知られた積分方程式⁽⁷⁾

$$g(y', \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx' \dots\dots\dots (6)$$

を y' で偏微分した形をしている。つまり

$$\begin{aligned} w(y', \xi) &= \frac{\partial g(y', \xi)}{\partial y'} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y'} dx' \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

である。いま、マクドナド・オルセンの方法⁽⁷⁾と同様に、 $f(x, y)$ を次の直交級数で表す。

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_m \{ C_{m+2k}^m(\alpha) U_{m+2k}^m(\alpha x, \alpha y) \\ &\quad + C_{m+2k}^{-m}(\alpha) U_{m+2k}^{-m}(\alpha x, \alpha y) \} \\ &\quad \times \exp[-(\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2)] \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここに

$$\varepsilon_m = \begin{cases} \frac{1}{2} & (m=0) \\ 1 & (m=1, 2, 3, \dots) \end{cases} \dots\dots\dots (9)$$

$C_{m+2k}^{\pm m}$ は未知の係数、 α は任意のスケールファクタである。 $U_{m+2k}^{\pm m}$ は

$$\begin{aligned} U_{m+2k}^{\pm m}(\alpha x, \alpha y) &= (-1)^k \alpha [k! (\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2)^m / \pi (m+k)!]^{1/2} \\ &\quad \times \exp(\pm im\phi) L_k^m(\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2) \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

で定義される関数で、

$$\phi = \tan^{-1}(y/x) - (\pi/2) \dots\dots\dots (11)$$

およびラゲルの陪多項式

$$L_k^m(\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2) = \sum_{s=0}^k \frac{(m+k)!}{(k-s)!(m+s)!s!} [(-1)(\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2)]^s \dots\dots\dots (12)$$

からなる。この $U_{m+2k}^{\pm m}$ 関数はガウス変換

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_{m+2k}^{\pm m}(\alpha x, \alpha y) \exp(-\alpha^2 x'^2) dx' = \frac{\exp(\pm im\xi) H_{m+2k}(\alpha y')}{[k!(m+k)!]^{1/2} 2^{m+2k}} \dots\dots\dots (13)$$

をもつ。ここに H_{m+2k} は次式で定義されるエルミート級数

$$H_{m+2k}(\alpha y') = \sum_{s=0}^{(m+2k)/2} \frac{(-1)^s (m+2k)!}{s!(m+2k-2s)!} (2\alpha y')^{m+2k-2s} \dots\dots\dots (14)$$

である。

式(8)を式(6)に代入し、式(13)のガウス変換を用いると、

$$\begin{aligned} g(y', \xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_m [k!(m+k)! 2^{2(m+2k)}]^{-1/2} [C_{m+2k}^m(\alpha) \exp(im\xi) + C_{m+2k}^{-m}(\alpha) \exp(-im\xi)] \\ &\quad \times H_{m+2k}(\alpha y') \exp(-\alpha^2 y'^2) \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

となる。ここで式(7)にしたがって、両辺を y' で偏微分すると、

$$\begin{aligned} w(y', \xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_m [k!(m+k)! 2^{2(m+2k)}]^{-1/2} [C_{m+2k}^m(\alpha) \exp(im\xi) + C_{m+2k}^{-m}(\alpha) \exp(-im\xi)] \\ &\quad \times [-H_{m+2k+1}(\alpha y') \alpha \exp(-\alpha^2 y'^2) \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

となる。上式の係数 $C_{m+2k}^{\pm m}$ を決定するために、次の直交条件を用いる。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(\pm im\xi) \exp(\mp in\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} H_{m+2k+1}(\alpha y') H_{n+2l+1}(\alpha y') \exp(-\alpha^2 y'^2) dy'$$

$$= \frac{2\pi^{3/2}}{\alpha} [(m+2k+1)!(n+2l+1)!2^{m+2k+1}2^{n+2l+1}]^{1/2} \delta \dots\dots\dots (17)$$

ここに δ はクロネッカーのデルタ関数であり, $m=n$, $k=l$ のときのみ $\delta=1$ で, 他の場合は $\delta=0$ である. $\delta=1$ の場合には式(17)の右辺は

$$\frac{2\pi^{3/2}}{\alpha} (m+2k+1)!2^{m+2k+1}$$

となる. 式(16)の両辺に $H_{m+2k+1}(\alpha y')$ をかけ, $y'=-\infty$ から $+\infty$ の範囲で積分し, さらに両辺に $\exp(\mp im\xi)$ をかけ, $\xi=-\pi$ から $+\pi$ の範囲で積分する.

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w(y', \xi) \exp(\mp im\xi) H_{m+2k+1}(\alpha y') dy' d\xi \\ &= \varepsilon_m [k!(m+k)!2^{2(m+2k)}]^{-1/2} C_{m+2k}^{\pm m}(\alpha) \\ & \times \frac{2\pi^{3/2}}{\alpha} (m+2k+1)!2^{m+2k+1}(-\alpha) \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} C_{m+2k}^{\pm m}(\alpha) &= \frac{-1}{4\pi^{3/2}} \frac{[k!(m+k)!]^{1/2}}{(m+2k+1)!} \\ & \times \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w(y', \xi) \exp(\mp im\xi) \\ & \times H_{m+2k}(\alpha y') dy' d\xi \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

この係数を式(8)に代入すると

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{-1}{4\pi^{3/2}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_m \frac{[k!(m+k)!]^{1/2}}{(m+2k+1)!} \\ & \times \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w(y', \xi) \exp(-im\xi) H_{m+2k+1}(\alpha y') \right. \\ & \times dy' d\xi U_{m+2k}^m(\alpha x, \alpha y) + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w(y', \xi) \\ & \times \exp(im\xi) H_{m+2k+1}(\alpha y') dy' d\xi U_{m+2k}^{-m}(\alpha x, \alpha y) \left. \right\} \\ & \times \exp[-(\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2)] \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

が得られる. この実数部をとると,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{-1}{2\pi^{3/2}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_m \frac{[k!(m+2k)!]^{1/2}}{(m+2k+1)!} \\ & \times \exp[-(\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2)] \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w(y', \xi) \right. \\ & \times \exp(-im\xi) H_{m+2k+1}(\alpha y') dy' d\xi \\ & \times U_{m+2k}^m(\alpha x, \alpha y) \left. \right\} \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

となる. 上式に U_{m+2k+1}^m 関数の式(10)と, $\exp(\pm im\xi) = \cos(m\xi) \pm i \sin(m\xi)$ を代入すると, $w(y', \xi)$ から

図1 モアレ法原理図

$f(x, y)$ を求める変換式として

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{-\alpha}{2\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_m \frac{(-1)^k k!}{(m+2k+1)!} \\ & \times (\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2)^{m/2} L_k^m(\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2) \\ & \times [B_{m+2k}^m(\alpha) \cos(m\phi) + D_{m+2k}^m(\alpha) \sin(m\phi)] \\ & \times \exp[-(\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2)] \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

を得る. ここに

$$\begin{aligned} B_{m+2k}^m(\alpha) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w(y', \xi) \cos(m\xi) H_{m+2k+1}(\alpha y') dy' d\xi \\ D_{m+2k}^m(\alpha) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w(y', \xi) \sin(m\xi) H_{m+2k+1}(\alpha y') dy' d\xi \end{aligned} \dots\dots\dots (23)$$

である.

なお, 密度関数が回転対称形の場合には m の級数において $m=0$ のみを考慮し, また x 軸に関し面対称形の場合には式(22)の $\cos(m\phi)$ の項のみ考慮すればよい.

3. モデル計算結果および考察

本理論の有効性と数値計算上の精度を調べるため, 非回転対称形であるが, x 軸に関しては面対称形である密度関数の数学モデルについて計算した. この計算にはオルセンら⁽⁸⁾が積分方程式(6)の変換用に関連したプログラムを改修し, 群馬大学計算センターの HITAC M-240 H 計算機を用いて行った.

数学モデル計算でのモアレデータの作成は以下のように行った. 図2において A-A' 線上の点 P(x, y) と, これと直角方向に $\Delta y'$, $-\Delta y'$ だけずれた点 $P_1(x_1, y_1)$, 点 $P_2(x_2, y_2)$ の各座標は $x'-y'$ 座標系と次

図2 観測座標系と固定座標系

図3 角すい台のモアレ変位データ

図4 角すい台原形とその再構成図

の関係をもつ.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x' \cos \xi - (y' + \Delta y') \sin \xi \\ y_1 &= y + \Delta y' \cos \xi \\ x_2 &= x' \cos \xi - (y' - \Delta y') \sin \xi \\ y_2 &= y - \Delta y' \cos \xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

ゆえに密度関数 f に対するモアレ変位データは

$$\left. \begin{aligned} w(y', \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta f}{\Delta y'} dx' \\ \frac{\Delta f}{\Delta y'} &= \frac{f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)}{2\Delta y'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

で与えられる.

モデル計算は角すい台状の密度分布

$$f = 10 \left\{ 1 - \frac{|x| + |y|}{0.8} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

ただし

$$\begin{aligned} |x| + |y| \geq 0.8 \quad &\text{のとき} \quad f = 0 \\ |x| + |y| \leq 0.4 \quad &\text{のとき} \quad f = 5 \end{aligned}$$

図5 角すい台原形とその再構成断面図
(再構成図 $m_{\max}=30, k_{\max}=200$)

について行った. 図3はこのモデルに対するいくつかの観測角度 ξ におけるモアレ変位データ $w(\xi, y')$ を示す. ただしこのデータは $\Delta y' = 0.0125, \Delta x' = 0.02$ として式(25)より計算した. 本モデルの角すい台は非回転対称図形であり, かつ中心が回転座標の中心と一致しているので, モアレ変位データ $w(\xi, y')$ は角度によってかなり異なるが, 原点に関しては対称な形をしている.

図4はモデルの原形, および図3のデータを用い式(22)によって再構成した密度関数のふかん図を示す. 図4(a)は原形, 図4(b)~(d)は式(22)の級数の上限をそれぞれ図4(b) $m_{\max}=30, k_{\max}=50$, (c) $m_{\max}=10, k_{\max}=200$, 図4(d) $m_{\max}=30, k_{\max}=200$ としたときの再構成図である. ただし α はすべて2とした⁽⁸⁾. 図4(b), (c)を原形図4(a)と比較すると, $k_{\max}$ が小さいとき中心からの距離 r の小さいところでの再現性が, また $m_{\max}$ が小さいとき r の大きいところでの再現性が悪くなること, 図4(d)の $m_{\max}=30, k_{\max}=200$ として計算すると, 角のある稜の近傍を除いてうまく再構成されることなどがわかる. 再構成した図4(d)の平面図と $\xi=0^\circ$ 方向の側面図は図5に示す. B-B' 断面は角すい台の高さの1/2の位置にある. 再構成された点群はりょう線部を除けばモデルの原形(実線)と非常に良く一致している.

4. 結 言

非対称流れの温度・密度場をモアレシュリーレン法によって求める理論的方法について述べた. マルドナ

ド-オルセンの級数展開法を基礎としてモアレの変位データから密度を求める新しい変換法を提案した。角すい台の数学的モデルについて変換計算を行うことにより、本理論の有効性と級数項数の影響などが確かめられた。

文 献

- (1) Grandke, T., *Exp. Fluids*, 3 (1985), 277.
 - (2) 田部井・ほか3名, 機論, 53-494, B (昭62), 3052.
 - (3) Shlachter, J. S., Ph. D Thesis Los Alamos National Lab., (1982), 90.
 - (4) Stricker, J., ほか2名, *AIAA J.*, 21-12 (1983), 1767.
 - (5) Keren, E., ほか3名, *Appl. Opt.*, 20-24 (1981), 4263.
 - (6) Matulka, R. D. and Collins, D. J., *J. Appl. Phys.*, 42-3 (1971), 1109.
 - (7) Maldonado, C. D. and Olsen, H. N., *J. Opt. Soc. Am.*, 56-10 (1966), 1305.
 - (8) Olsen, H. N., ほか3名, *Aerosp. Res. Lab. Rep.*, ARL 66-0016 (1966).
-