曲線座標変換法を用いた回転体内の 二次元非圧縮性粘性流体解析手法*

梅 垣 菊 男^{*1}, 三 木 一 克^{*1}

Numerical Method to Calculate Two-Dimensional Incompressible Viscous Flow in Rotating Systems Using the Curvilinear Coordinate Transformation Technique

Kikuo UMEGAKI and Kazuyoshi MIKI

A numerical method is developed to solve the two-dimensional incompressible viscous flow with rotating boundaries of arbitrary shape using the boundary-fitted curvilinear coordinate transformation technique. The stream function-vorticity formulation is developed in which the requirement of the single-valuedness of the pressure is explicitly included to determine the boundary values of the stream function. The method is verified by the analysis of the flow between two long, eccentric cylinders. The method is also applied to the transient flow analysis in which the flow is driven by arbitrarily shaped rotating blades, and it is confirmed that the flow patterns can be successfully simulated using the proposed method even if the system has a moving boundary.

Key Words: Numerical Analysis, Incompressible Flow, Two-Dimensional Flow, Rotating System, Moving Boundary, Stream Function, Vorticity, Curvilinear Coordinates, Time-dependent Flow

1. 緒 言

曲線座標変換法⁽¹⁾は、実空間上の解析領域を直交格子からなる形状の簡単な領域に座標変換し、写像空間上で物理現象を支配する偏微分方程式を解く方法である。この方法では、任意の境界形状に沿った曲線座標格子を自動的に生成することができるとともに解析領域全体の座標格子の配置を制御することができる。この手法は、1970 年代に航空機分野の流体解析手法として、Thompson らが円形偏微分方程式を解いて曲線座標格子を生成する方法を提唱してから⁽²⁾⁽³⁾、急速に一般の伝熱、流体、輸送、拡散解析に応用されるようになった。

非圧縮性粘性流体を対象とした解析手法については、流れ関数、渦度を用いた二次元解析手法が Thames らによって開発され⁽⁴⁾、その後、流速、圧力を変数とした二次元⁽⁵⁾、三次元問題⁽⁶⁾にも応用されるようになった。Shyy らは、曲線座標系の特徴を活かしてダクトやディフューザ等の内部流れを解いた例を報告⁽⁷⁾⁽⁸⁾している。また、座標格子が自動的に生成できる

機能を利用して、Haussling-Coleman は、自由界面を持つ流れの解析を行い、移動境界問題に対する曲線座標変換法の有効性を示した⁽⁹⁾。このように曲線座標変換法を用いた多くの解析手法が報告されているが、すべて対象は静止系で回転系を扱った例は報告されていない。

一方、化学プラント等で使用されている機器の中には、攪拌槽のように容器内に存在する回転翼で引き起こされる流動現象を把握する必要がある機器が多い。しかし、一般にこのような回転機器の形状は複雑で、流れも非定常な場合が多く、機器内の流動現象を数値的に解いた例はほとんどなかった。円筒座標系で扱える形状の単純な問題に対してのみ、いくつかの数値計算例が報告されている⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾が、いずれも定常問題に限られている。

本研究は、回転系に対して曲線座標変換法を応用し、任意の形状を有する回転機器内の二次元非圧縮性粘性流体の非定常な流れを解析することを目的としている。また、座標格子の自動生成機能を利用し、円筒形状ではない容器内で翼が回転するような移動境界問題を解くことも目的としている。先に著者らは、曲線座標系を用いて任意形状の回転体内の流れが解けることを示した⁽¹²⁾。本報では、その解析手法の概要と、偏心円

* 昭和 63 年 11 月 25 日 関西支部第 248 回講演会において講演、原稿受付 昭和 63 年 5 月 2 日。

^{*1} 正員、(株)日立製作所エネルギー研究所 (〒316 日立市森山町 1168)。

筒間の流れ, 順回転, 逆回転を繰返す非定常な流れ, 回転移動境界を有する流れ等を解いた結果について報告する. 開発した手法は, 流れ関数, 渦度を用い, 流れ関数の境界値を決定するために圧力の一意性 (圧力の微分値を閉境界に沿って一周積分した時値が零になる) を用いている. この方法は, Sood らが二極座標系を用いて偏心円筒間の流れを解いた方法⁽¹³⁾を一般曲線座標系に拡張したものである.

2 数学的モデル

2.1 曲線座標変換法 図1に示す実空間上の解析領域 R を写像空間上の解析領域 R^* に座標変換する. 実空間上の境界 Γ は写像空間上の境界 Γ^* に対応づけられる. 実空間上の座標格子点 (r, θ) は, 次のポアソン方程式により写像空間上の座標格子点 (ξ, η) に対応づけることができる.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \delta \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} = P(\xi, \eta, t) \quad \dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \delta \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} = Q(\xi, \eta, t) \quad \dots\dots (2)$$

ここで, P, Q は実空間上での曲線座標格子の間隔を制御する関数であり, δ は円筒座標格子特有のパラメータである⁽¹³⁾. 式(1), (2)の独立変数と従属変数を入れ替えると次のだ円形偏微分方程式が得られる.

$$\alpha \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 r}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 r}{\partial \eta^2} + J^2 P \frac{\partial r}{\partial \xi} + J^2 Q \frac{\partial r}{\partial \eta} = \delta \frac{J^2}{r} \quad \dots\dots (3)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + J^2 P \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + J^2 Q \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \quad \dots\dots (4)$$

ここで, α, β, γ およびヤコビアン J は次式で与えられる.

$$\alpha = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)^2$$

$$\beta = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)$$

$$\gamma = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^2$$

図1 曲線座標変換法

$$J = \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) - \left(\frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \quad \dots\dots (5)$$

式(3), (4)に示した座標変換方程式を数値的に解くことにより, 写像空間上の円筒座標格子に対応した実空間上の曲線座標格子を生成することができる.

2.2 非圧縮性粘性流体の基礎方程式 流れ関数, 渦度を用いた回転座標系における非圧縮性粘性流体の基礎方程式は次のようになる.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + 2 \frac{\partial \Omega_c}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{v'}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \quad \dots\dots (6)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -\omega \quad \dots\dots (7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = u, \quad -\frac{\partial \psi}{\partial r} = v' = v - r \Omega_c \quad \dots\dots (8)$$

ここで, ψ, ω は流れ関数, 渦度, u, v は半径方向, 周方向速度で ν は動粘性係数である. Ω_c は回転座標系の角速度, v' は回転座標系における周方向相対速度である. 式(6)-(8)を座標変換すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)_{\xi, \eta} + 2 \frac{\partial \Omega_c}{\partial t} - \frac{1}{J} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)_{\xi, \eta} \\ & - \frac{1}{J} \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_{\xi, \eta} \\ & + \frac{1}{rJ} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) \\ & = \frac{\nu}{J^2} \left\{ \alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \right. \\ & \left. + J^2 P^* \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + J^2 Q^* \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right\} \quad \dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$\alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + J^2 P^* \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + J^2 Q^* \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -J^2 \omega \quad \dots\dots (10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{rJ} \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) = u \\ & - \frac{1}{J} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = v' \quad \dots\dots (11) \end{aligned}$$

ここで, 式(9)の左辺第3項および第4項は, 座標格子が移動する, いわゆる移動境界問題に対する補正項になっている. 関数 P^*, Q^* は次のように与えられる.

$$P^*(\xi, \eta, t) = P(\xi, \eta, t) + (1-\delta) \frac{1}{rJ} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \quad \dots (12)$$

$$Q^*(\xi, \eta, t) = Q(\xi, \eta, t) - (1-\delta) \frac{1}{rJ} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad \dots (13)$$

境界条件として壁面固定条件 (Non-Slip 条件) を考える. 境界の回転速度を Ω_b とすると,

$$u_B=0 \quad v_B=r(\Omega_B-\Omega_C)$$

したがって、境界における流れ関数の変化率は次式で与えることができる。

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)_B = -\frac{\partial r}{\partial \xi} r(\Omega_B - \Omega_C)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)_B = -\frac{\partial r}{\partial \eta} r(\Omega_B - \Omega_C)$$

.....(14)

式(14)を閉じた境界上で積分することにより、流れ関数の相対値を決定することができる。しかし、多重連結領域（島境界を含む体系）で回転によって流れが生じている場合、流量が特定できないために流れ関数の絶対値を決めることはできない。そこで、流れ関数 ψ を次のような式で表す。

$$\psi(\xi, \eta, t) = \psi_1(\xi, \eta, t) + c(t)\psi_2(\xi, \eta, t) \quad \cdots (15)$$

ここで、 ψ_1 は流れ関数の相対値を決めるための関数で、式(14)の境界条件を満たす。 ψ_2 は流れ関数の絶対値を決めるための関数である。今、内側と外側の一方の境界が静止し、他方の境界が回転している場合を考える。静止している境界の流れ関数を ψ_{SB} 、回転している境界の流れ関数を ψ_{RB} とすると、式(15)よりそれぞれ次のように与えることができる。

$$\left. \begin{aligned} \psi_{SB} &= 0 \\ \psi_{RB} &= \int \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial s} \right)_B ds + c(t)\psi_{2B} \end{aligned} \right\} \quad \cdots (16)$$

ここで、 ds は境界に沿った線分で $d\xi$ あるいは $d\eta$ で置き換えることができる。

次に圧力の一意性の条件について考える。静止境界 ($u_B=0, v_B=0$) において運動量保存の式は次のように書くことができる。

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{rv}{J} \left(\beta \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \gamma \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) - r^2 \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial \Omega_B}{\partial t} + r\Omega_B^2 \frac{\partial r}{\partial \xi} \quad \cdots (17)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{rv}{J} \left(\alpha \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) - r^2 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \Omega_B}{\partial t} + r\Omega_B^2 \frac{\partial r}{\partial \eta} \quad \cdots (18)$$

ここで、圧力の微分値を境界に沿って線積分する。閉じた境界で一周積分を行うと、一意性より次の式が成立しなければならない。

$$\oint \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_B ds = 0 \quad \cdots (19)$$

さて、式(15)、(16)に示した係数 $c(t)$ は、次のようにして決定する。まず、 ψ_1 と ψ_2 は次に示すディリクレ条件の円形偏微分方程式を満たすように決定する。

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \eta^2} + J^2 P^* \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + J^2 Q^* \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \\ = -J^2 \omega_1 \quad \cdots (20) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{領域内部で} \quad \omega_1 &= \omega \\ \text{静止境界で} \quad \psi_{1B} &= 0 \\ \text{回転境界で} \quad \psi_{1B} &= \oint \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial s} \right)_B ds \end{aligned} \right\} \quad \cdots (21)$$

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \eta^2} + J^2 P^* \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} + J^2 Q^* \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \\ = -J^2 \omega_2 \quad \cdots (22) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{領域内部で} \quad \omega_2 &= 0 \\ \text{静止境界で} \quad \psi_{2B} &= 0 \\ \text{回転境界で} \quad \psi_{2B} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad \cdots (23)$$

流れ関数 ψ_1 に対する渦度を ω_1 、 ψ_2 に対する渦度を ω_2 とすると、内部領域では $\omega_2=0$ となるが、境界上で $(\partial \psi_2 / \partial \xi)=0, (\partial \psi_2 / \partial \eta)=0$ とすると、 ω_2 は境界上でのみ値を持つ。この時の境界上の渦度およびその微分値は次のような線形な関係で表すことができる。

$$\omega_B = \omega_{1B} + c(t)\omega_{2B} \quad \cdots (24)$$

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial s} \right)_B = \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial s} \right)_B + c(t) \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial s} \right)_B \quad \cdots (25)$$

同様に、圧力の微分値も渦度の微分値と線形な関係にあることから次式が得られる。

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_B = \left(\frac{\partial p_1}{\partial s} \right)_B + c(t) \left(\frac{\partial p_2}{\partial s} \right)_B \quad \cdots (26)$$

ここで、 p_1, p_2 はそれぞれ $\omega_1, \omega_2, \psi_1, \psi_2$ に対応している。式(19)、(26)より、 $c(t)$ は次式を用いて一意に決定することができる。

$$c(t) = - \oint \left(\frac{\partial p_1}{\partial s} \right)_B ds / \oint \left(\frac{\partial p_2}{\partial s} \right)_B ds \quad \cdots (27)$$

3. 離散化手法およびアルゴリズム

3.1 方程式の離散化と数値解法 座標変換の基礎方程式(3)-(5)は中心差分法を用いて離散化し、SOR法を用いて解いた。式(3)、(4)は非線形な方程

図 2 移動境界を考慮した計算のアルゴリズム

式であるが、一般に非線形性はあまり大きくなく、1.7-1.8程度の緩和定数を用いて十分収束する。

渦度の輸送方程式(9)は、基本的に中心差分法を用いて離散化したが、移流項には必要に応じて一次の風上差分法を採用した。また、時間積分には完全陰解法を採用し、SOR法を用いて解いた。緩和定数は非線形性が強い場合にはしばしば1以下となり、0.8程度が適当であった。流れ関数のだ円形偏微分方程式(20)、(22)は、中心差分法を用いて離散化し、SOR法を用いて解いた。式(20)、(22)は線形な方程式となるので緩和定数は1.7-1.8程度を用いた。

3.2 計算アルゴリズム 移動境界問題を考慮した計算のアルゴリズムを図2に示す。まず、初期の曲線座標格子を計算し、流れ関数 ψ_1 、 ψ_2 、渦度 ω_1 、 ω_2 を計算する。そしてタイムステップを進める。もし、問題が移動境界問題であるならば、図中①に示したように境界を回転移動した後、新たに曲線座標格子を生成する。そして ψ_2 、 ω_2 を計算する。 (ψ_2, ω_2) は形状のみに依存する関数である。次に通常の流れ関数、渦度を用いた計算法と同様に渦度 ω_1 、流れ関数 ψ_1 を更新する。そして境界の渦度 ω_{1B} を算出し、圧力の微分値の一周積分が零になるよう $c(t)$ を決定して、流れ関数 ψ の絶対値を求める。非定常計算では、図中②に示した計算を繰返し、収束した後、タイムステップを進める。定常計算では、②の計算の収束判定は行わず、タイムステップを進める方法をとる。

4. 解析結果と考察

4.1 偏心円筒間の流れ 偏心した円筒間で内側の円筒の回転によって生じる流れを解いた例は、これまでにいくつか報告されている。レイノルズ数(Re)が小さく、ストークス流で近似できる時は、理論値が存在するが、 Re が大きくなると理論値は存在しない。しかし、定性的な傾向は比較することができる。

今回、解析対象とした体系のパラメータを計算に使用した曲線座標格子とともに図3に示す。円筒の半径比は $r_1:r_2$ は1:2、偏心比 ϵ は0.5である。格子点数は、半径方向、周方向に対して 41×73 である。計算結果を図4に示す。この計算では、移流項はすべて中心差分とした。流線は正の値と負の値に分け、それぞれ20本および10本の等高線で示した。 $Re=5$ の時の流れは、ストークス流の解のパターンに非常に近く、回転流、はく離した二次渦の流線、渦度共に回転方向に関係なく上下対称なパターンになっている。はく離点、再付着点の位置は、円筒間の間隔が最も広い位置を $\theta=0^\circ$ とすると $\pm 96^\circ$ 付近になっている。 $Re=50$ にな

ると流れに若干の非対称性が生じているのがわかる。二次渦の中心は $\theta=5^\circ$ 付近に移動し、はく離点および再付着点は $\theta=\pm 98^\circ$ 付近となる。 $Re=500$ になると慣性力の影響が強まり、二次渦の中心は $\theta=30^\circ$ 付近まで移動している。はく離点、再付着点の位置は $\theta=\pm 108^\circ$ 付近でかなり広い範囲ではく離れた二次流れが生じるようになる。このような偏心円筒間の流れの変化は他の解析手法の検証計算の結果としても同様な結果が得られており⁽¹³⁾⁻⁽¹⁵⁾、開発した手法の妥当性を基本的に確認することができた。

4.2 回転翼を有する円筒容器内の流れ 静止状

図3 偏心円筒間の流れの解析体系

図4 偏心円筒間の流れの解析結果(左:流線, 右:渦度)

態から4枚の翼が円筒容器内で回転した時に定常状態に至るまでに引き起こされる流れを解析した。解析体系のパラメータと座標格子を図5に示す。解析には、翼と共に回転する曲線座標系を用いた。図には円筒全体系を示してあるが、実際には1/4セクタで計算を行った。1/4セクタでの格子点数は 41×31 である。回転速度は、静止状態から一定加速度で0.2秒後に定格100 rpmになるように増加させ、その後は一定とした。定格時の Re は約600である。図6に解析結果を示す。移流項はすべて中心差分法で離散化した。結果は上から流速ベクトル、流線、渦度の順に示してある。流速ベクトルは各タイムステップで規格化してあり、0.1秒の時だけ、図中の縮尺の2倍になっている。ま

図5 回転翼を有する円筒の解析体系

た、等高線の本数は、各タイムステップですべて30本になるよう規格化してある。回転直後に翼の先には強い渦が発生する。この渦は0.2秒後には翼の後方に拡散していく。0.4秒後には初期の渦の勢力は失われ、次第に同心円状の流れに近づいていく。1.8秒後には外周部で若干の形跡を残すのみとなり、ここには示していないが2.0秒以降になるとほぼ同心円状に流れる定常状態となった。何秒後に定常状態になるかは当然 Re に依存するが $Re=120$ 程度では0.8秒後にはほぼ定常に近いパターンが得られた。収束条件はすべての点で、

$$|\phi^{n+1} - \phi^n| / \phi^{n+1} < 10^{-4} \dots\dots\dots (28)$$

$$|\omega^{n+1} - \omega^n| / \omega^{n+1} < 10^{-3} \dots\dots\dots (29)$$

とした。式中、 n は繰返し回数である。計算に用いた時間間隔は $\Delta t = 0.002$ とし、2秒間を計算するのに必要なタイムステップは1000ステップで、計算時間はHITAC M 200 Hを用いて約25分であった。

4.3 回転翼を有する角筒内の流れ 図5と同様な翼を同一面積の角筒（一辺の長さは円筒半径の $\sqrt{\pi}$ 倍、約0.35 m）内で回転させた場合に生じる非定常な流れの解析例を示す。このような体系は、翼と外側容

図6 回転翼を有する円筒内の流れ解析結果（流速ベクトル、流線、渦度）

器の幾何学的な位置関係が時間とともに変化するため移動境界問題となる。しかし、曲線座標変換法を用いて翼が回転することに座標格子を生成し直すことにより、連続的に解いていくことができる。翼の回転方法は円筒の場合と同じにした。図7に回転の初期の状態の解析結果を示す。移流項にはすべて中心差分を用いた。上から、曲線座標格子、流速ベクトル、流線、渦度を表している。翼は、0.1秒で60°回転する。回転直後に翼の先端に強い渦が生じ、それが後方に拡散していく様子は円筒の場合と同様であるが、角筒の場合は流路幅が変化するために特有の現象が生じる。0.3-0.4秒後には、先に生じた渦は狭くなって圧力の高くなった翼と壁面の間の流路を翼についていくことができず、後ろから来る次の翼に追い越されてしまう。そして流路が拡大する角筒の角の部分にでた時に、回転方向の主流と広い流路から狭い流路に入ることができずに反転して逆向きに流れてくる二次流れから同じ回転方向の運動量を加えられ、0.5秒後にはあたかも一時的に成長したように見える。角筒の四角には常によどんだ領域ができて二次流れを形成している。角筒の場合

合には、円筒の場合のように翼の前後の圧力差だけでなく、流路幅が変化することによって周期的に発生する圧力差があるために、前述したような非定常な渦の成長、衰退の現象が見られる。計算時間の制限から、周期定常状態を得るまでの計算はできなかったが、回転初期の状態において定性的に説明し得る現象をシミュレーションできた。計算に用いた時間間隔、収束条件は円筒の場合と同じである。しかし、1秒間の現象を計算するのに500ステップで約80分を要した。これは、毎回曲線座標格子を生成し直さなければならないこと、定常状態に漸近するのではなく常に非定常な現象を解くために収束に時間がかかることに起因している。

4.4 順回転、逆回転を伴う非定常流れ 図5と同様な体系で、一方向のみに回転させずに、順方向、逆方向回転を繰返した時、流れは非常に複雑なパターンを形成する。このような流れを解いた例を次に示す。結果はカラーグラフィックス端末に出力した図形を写真に取ったものである。図8に解析体系、図9に解析に使用した座標格子を示す。 Re は約1300、格子点数

図7 回転翼を有する角筒内の流れ解析結果 (曲線座標格子, 流速ベクトル, 流線, 渦度)

図 8 解析体系

図 9 曲線座標格子

図 10 回転速度の時間変化

(a) First cycle (upper row: counterclockwise rotation, lower row: clockwise rotation)

(b) Third cycle (upper row: counterclockwise rotation, lower row: clockwise rotation)

図 11 順回転, 逆回転を繰り返す非定常流れの解析結果 (流線, 1 周期および 3 周期め)

は 22×21 である。回転速度の変化を図 10 に示す。静止状態から、順方向に 0.2 秒間等加速度で加速し、100 rpm とする。その後 0.8 秒間一定速度を保った後、0.1 秒間で等加速度で停止する。さらに 0.4 秒間停止した後、今度は逆方向に同じ操作を繰返す。そして、この 3 秒間の順方向、逆方向の回転操作を一周期として同じ操作を何周期も繰返す。解析の結果得られた各タイムステップでの流線を図 11 に示す。図では各等高線は絶対値で示してある。つまり、流線の本数は全体の流量の多少に対応している。静止している外側円筒上の流れ関数値零で規格化し、緑色で示しており、値が正で大きくなるに従って赤色、負で大きくなるに従って青色に変化している。つまり、内側が赤くなっているときは順回転、青くなっているときは逆回転を示している。図には 0-3.0 秒の 1 周期めと 6.0-9.0 の 3 周期めを示した。このような非定常な現象はアニメーション化すると非常にわかりやすくなるが、本報では代表点での結果を示す。前述した体系と同様に回転開始直後に翼の先端に強い渦が発生し、次第に外側に拡散していく (0.21-1.01, 6.21-7.01 s)。次に翼を急激に停止すると、翼の外側の流体は慣性でしばらくそのまま回転しようとするが、翼と翼の間には新たな渦が発生する (1.11-1.51 s)。3 周期めでは、順回転時に翼の先端に生じた渦の影響がさらに強くなり、周方向に回転しようとする流れにはこの渦に呑みこまれてしまう (7.11-7.51 s)。次に、逆回転し始めた時にも翼の先端に渦が発生するが、順回転で生じた前の渦の影響が残っているためにあまり大きく発達せず、流れは比較的短時間で同心円状になる (1.71-2.51, 7.71-8.51 s)。さらに、翼を急激に停止すると、順回転の時と同様に翼の外側の流体は慣性でしばらくそのまま回転し続けるが、翼と翼の間には渦が発生する (2.61, 8.61 s)。このような非定常な渦の生成、消滅のパターンは、回転速度や停止、逆回転のタイミング等によって大きく異なる。ここに示した解析例では、停止時に前に発生した渦の影響が残っているために、順回転と逆回転では流れのパターンが大きく異なっている。このような解析で過渡的に翼に加わる流体力を評価することも可能であるが、本報ではそこまで言及しないことにする。収束判定条件は式 (28)、(29) の条件をそれぞれひとけたゆりめた。計算の時間間隔 $\Delta t = 0.002$ で、1 周期 1500 ステップに対して計算時間は約 60 分であった。

5. 結 言

曲線座標系を用いた回転体内の二次元非圧縮性粘性流体の解析手法を開発した。本手法の特徴をまとめる

と次のようになる。

(1) 回転座標系に曲線座標変換法を用いていることにより、任意の形状の回転体を含む体系を扱うことができる。

(2) 収束性、安定性が良く、解法が比較的簡単な流れ関数、渦度方程式を用い、流れ関数の境界値の算出に圧力の一意性の条件を用いている。

本手法を用いて種々の回転機器内の流れを解析し、以下の結論を得た。

(3) 偏心円筒間の流れを解析し、はく離渦の特性、流れのパターンが理論値および他の解析例の傾向と一致することを確認した。

(4) 円筒内、角筒内で 4 枚の翼が回転した体系において、静止状態から定常状態に至る非定常な流れの変化を解析することができた。また、各タイムステップで座標格子を自動的に生成し直すことにより、移動境界を含む体系の非定常流の解析も可能になった。

(5) 円筒内で 4 枚の翼が順方向、逆方向に繰返し回転した時に生じる非定常流を解析し、過渡的な渦の発生、消滅のパターンをシミュレーションすることができた。

文 献

- (1) 三木・高木・梅垣, 機誌, 89-810 (昭 61), 549.
- (2) Thompson, J. F., Thames, F. C. and Mastin, C. W., *J. Comput. Phys.*, **15** (1974), 299.
- (3) Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A. and Mastin, C. W., *Numerical Grid Generation*, North-Holland, (1985).
- (4) Thames, F. C., Thompson, J. F., Mastin, C. W. and Walker, R. L., *J. Comput. Phys.*, **24** (1977), 245.
- (5) Vanka, S. P., Chen, B. C. J. and Sha, W. T., *Numerical Heat Transfer*, **3** (1980), 1.
- (6) Takagi, T. and Miki, K., *Proceedings of the 6th GAMM-Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics*, Vieweg, (1986), 351.
- (7) Shyy, W., *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **53** (1985), 47.
- (8) Shyy, W. and Braaten, M. E., *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **6** (1986), 861.
- (9) Haussling, H. J. and Coleman, R. M., *J. Fluid Mech.*, **92** (1979), 767.
- (10) Hiraoka, S., Yamada, I. and Mizoguchi, K., *J. Chemical Eng. Japan*, **11** (1978), 487.
- (11) Harvey, P. S. and Greaves, M., *Trans. IChemE*, **60** (1982), 195.
- (12) Umegaki, K. and Uchikawa, S., *Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow*, (1985), 1735, Pitman Press.
- (13) Sood D. R. and Elrod Jr., H. G., *AIAA J.*, **12** (1974), 636.
- (14) Kamal, M. M., *J. Basic Eng.*, (1966), 717.
- (15) Korczak, K. Z. and Patera, A. T., *J. Comput. Phys.*, **62** (1986), 361.
- (16) 梅垣・三木, 第 1 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (昭 62), 37.