乱流中の点源拡散について*

中 村 育 雄^{*1}

On Turbulent Diffusion from a Point Source

Ikuo NAKAMURA

Key Words: Turbulence, Flow Measurement, Diffusion, Shear Flow, Point Source

1. ま え が き

乱流の特性の一つに物質や熱の拡散が層流に比較して著しく早まることがあげられ⁽¹⁾、これについて多くの研究がなされている。従来、物質拡散は主として環境問題に関連して調べられてきたが、最近は化学反応を伴う流れにも関係した研究が活発に行われている⁽²⁾。多種多様な拡散現象の完全な分類は困難であるが実用的な分類の試みが表1のようになされている。乱流拡散の速さはさまざまなスケールの渦によるものであるが、最近の研究によればラグランジュ的に見た流体粒子のカオスの移動、混合は流れが層流状態であっても生ずる場合があるので、拡散の分類はさらに考察を必要とする^{(3)~(6)}。

流れが存在することが物質拡散に重要なことはレイノルズ数の低い水中の微小生物や生物の微小突起が絶えず動いていることから推定される。生物表面を通しての物質交換が分子拡散のみではその生物の生命化学反応を維持するのには遅すぎることが、この運動がなされる一つの理由であろう。

2. 拡散の表現

拡散の最も基本的考え方は次のように定式化される⁽⁷⁾。物性値が変化しない方法で流体粒子に印が付けれられるものとし、時刻 t_0 で印付き流体がある曲面で残りの無印流体と区分されているものとする。印付き流体と無印流体の間の分子拡散効果を見捨てると、拡散問題は時刻 t で n 個の空間点において印付き流体が

同時に見いだされる確率を求めよと表現される。実際には多数の空間点での同時確率分布を求めることは不可能で、平均濃度分布を求めることに相当する1粒子解析(one particle analysis)しか普通はできない。平均濃度は分子拡散が無視できる時、初期時刻 t_0 で印付き流体粒子の位置が決定論的に知られているとしたら、任意の点 x での時刻 t における印付き流体粒子の存在確率に等しい。これを $P(x, t)$ と書くと、 $P(x, t)$ は次の条件を満たしている。

$$\int P(x, t) dx = V \dots\dots\dots (1)$$

ここに V は非圧縮とした印付き流体の体積であり、積分は全空間にわたるものである。さらに、

$$P(x, t_0) = \begin{cases} 1 & t_0 \text{で } x \text{ が } V \text{ の中} \\ 0 & t_0 \text{で } x \text{ が } V \text{ の外} \end{cases} \dots\dots\dots (2)$$

である。すなわち時刻 t_0 では P は V を他と区別する識別関数である。

表1 流動拡散問題に対する分類
(酒井, 名大学位論文, 昭59.7)

* 原稿受付 昭和63年

*1 名古屋大学工学部(〒464-01 名古屋市千種区不老町)。

これは直観的には図1のように考えられる。印付き流体とは t_0 でのラグランジュ座標がある条件、図1の場合はそれが空間 V の中に存在するという条件、を満たす流体のことを指すが、具体性を持たせるために水の乱流中に、ごく薄く色素を溶かした色付き流体の滴を原点から繰返し放出するとしよう。 t_0 でその滴は空間 V を占め、そこから拡散する。分子拡散はないとしているから、色付き滴は変形しながらも他の流体との境界は鮮明で、その体積は変化せず式(1)が成り立つ(フラクタル界面には別の考察が必要である)。

任意の点 x を中心に体積 ΔV の微小立方体の検査空間をとり、 i 回めの滴の放出で t の時刻に ΔV のうち δV_i が印付き流体で占められるとすると、その瞬間の ΔV での印付き流体の濃度は $\delta V_i / \Delta V$ と定義される。もちろん ΔV 内には t の時刻には i 回め以外の滴の流体に見いだされないとする。 n 回の放出の平均値を考えれば

$$\begin{aligned} (\text{平均濃度}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta V_i / \Delta V \\ &= (\Delta V \text{ 内で印付き流体が見いだされる確率}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。 ΔV を十分小さくすれば前述の平均濃度が確率であることがわかる。

1 個の流体粒子が時刻 t_0 で x' に存在したという条件のもとに t で x に存在する、つまり変位ベクトルが $x - x'$ である条件付き確率密度関数

$$Q(x, t | x', t_0) \dots\dots\dots (4)$$

を導入すると P は次のように表される。

$$P(x, t) = \int P(x', t_0) Q(x, t | x', t_0) dx' \dots\dots (5)$$

積分はやはり全流れ場にわたる。すなわち、 t_0 で x' の位置の印付き流体粒子の存在確率に、その条件のもとで t で x へ印付き流体粒子が移る確率を掛けて加えたものが t で x に印付き粒子が存在する確率となる。特別な場合として位置 x_0 を含む微小体積 V 内で P

$=1$ 、他では $P=0$ とすると上式は

$$P(x, t) = V Q(x, t | x_0, t_0) \dots\dots\dots (6)$$

と書け、したがって t_0 で x_0 にある一つの粒子のみ考察すればよい。すなわち 1 粒子拡散問題となる。

さらに議論を進めればテイラーの定理といわれる粒子の変動速度の自己相関と拡散距離との関係が導かれる。このように拡散の基本はラグランジュ座標におかれるのであるが、これによる解析は理論的にも実験的にも困難である。この難しい実験を行った重要な研究にはビデオカメラで粒子を追跡した Sato らの報告がある⁽⁸⁾。

上記のことから拡散研究も、特に実験的には普通の流体力学と同様にオイラー座標を用いることになる。

3. 吸光濃度計

熱線風速計によって速度乱れの測定が可能となり乱流の研究が飛躍的に進歩したように、物質拡散場においても拡散物質の瞬時濃度の測定が重要である。平均濃度はサンプリング法によって各種の物質について高い精度で測定できる場合が多いが、瞬時濃度は気体、液体、微粒子などそれぞれに困難さがある。これまでに試みられた方法には電気伝導度法⁽⁹⁾、光散乱法⁽¹⁰⁾、吸光度法^{(11)~(13)}、レーザラマン散乱法⁽¹⁴⁾などがある。また熱線も用いられる⁽¹⁵⁾。

著者らはこれらの方法の中で精度が高く、測定点の設定が容易で三次元的測定が可能であり、かつ相対的に安価と思われる吸光度法を利用した。これは最初に Lee と Brodkey によって用いられたが他の研究者にはあまり使用されなかった。彼らの測定法では濃度の変化範囲が狭い場合に限られていたので、著者らはこの測定法について詳細な解析を行い信頼できる手法を開発した⁽¹⁶⁾。この測定系では図2のようにタングステンランプから発した光は光ファイバを通して測定部へ導かれ試料濃度に応じて吸光を受け、いわば変調されて光電子倍增管で検出される。単純な場合には系の出力電圧 $\bar{E}_p$ と試料濃度 $\bar{I}$ の間には $\bar{E}_p \sim \exp(-B l \bar{I})$ の関係がある。ここに B は定数、 l は試料厚さ、すなわちプローブ先端のすきま距離である。しかし実際には各光学要素のスペクトル特性によってこの形からのずれが生ずる。この解析により系の特性が明らかにされた。なお現在では半導体レーザと光素子を使ってもっと容易に測定系を作ることができる⁽¹⁷⁾。

4. 格子乱流中の点源拡散

乱流拡散の基本はやはり格子乱流の場合であるが速度場と異なり、いくつかの形がある。すなわち平均濃

図1 拡散物質の移動

度 Γ は全空間で一様、かつ変動濃度 γ の統計量も一様な拡散場と Γ も γ の統計量も一様でない場合である。後者の基本はある瞬間に色付き流体粒子が放出される瞬時点源であるが、これは実験的には困難である。そこで著者らは実際上も重要で実験もやりやすい連続点源を調べた⁽¹⁸⁾。なお印付き粒子として細線の加熱後流の実験があるが、この方法では線源しかできない⁽¹⁹⁾。

水路は $250 \times 250 \times 1960$ mm の測定断面のもので乱流格子は格子棒直径 $\phi 2$, $M=10$ mm のものと $\phi 4$, $M=20$ のものを用いた。流速 $U_0=14.7$ cm/s, メッシュ寸法によるレイノルズ数 $Re_M=1480, 2970$ である。速度乱れはホットフィルムプローブで測定され、その減衰の状態は図3のごとくであった。これは2種の格子に対し次式で表現される (○, △の実験点)。

$$\overline{u^2}/U_0^2 = 5.66 \times 10^{-2} \times \{x/(M-3)\}^{-1.45} \dots\dots (7)$$

このような単純と思われる乱れの減衰でも諸家の結果はかなり異なっていることが注意される。

濃度測定に用いたプローブの光ファイバの直径は $\phi 0.5$, 測定すきまは 0.7 で検査体積は 1.37×10^{-4} cm³ である。測定された平均濃度分布は図4のように良い相似性を持っている。図4中の実線は次のガウス分布を示す。

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_c} = \exp\{-(\ln 2)\eta^2\}, \quad \eta = \frac{r}{b_r} \dots\dots\dots (8)$$

ここに Γ_c は点源から形成されるプルームの軸上の平均濃度, r は中心軸からの距離で, b_r は平均濃度の半値幅である。この式はプルーム濃度分布方程式の相似解となっている。

変動濃度の rms 値 γ' の分布も相似性を持ち、図5のように示される⁽²⁰⁾。 γ' の Γ に対する比は相対的な間欠性を表すものであるが、その分布は図6のようで

あった。格子乱流中のプルームの実験には風洞を用い煙粒子の光散乱を利用した Gadel-Hak らのものがあ⁽¹⁰⁾、そのデータはかなり散らばっている。

このような分布を解析したものに Uberoi-Corrsin による温度変動が高さと幅は同じで間隔が不規則なく形波列で表せるとした試みがある⁽²¹⁾。これは分子拡散

図3 格子乱流乱れの減衰〔詳細は文献(20)〕

図4 格子乱流中のプルームの平均濃度分布⁽²⁰⁾

図2 吸光濃度計⁽¹⁶⁾

図5 格子乱流中のプルームの変動濃度分布⁽²⁰⁾

を完全に無視したことにあたる。著者らはこれを拡張して高さ、幅、間隔も不規則なく形波列で濃度変動をモデル化してみた⁽²⁰⁾。この概念図は図7である。観測点Qで見られる濃度変動をこのようにおくことは分子拡散を部分的に考慮したことに相当する。 t_i を $t=0$ から数えて*i*番めの濃度の跳躍が起こった時刻とし、 A_i をそのく形波の高さ、 $|J_i|$ を A_i の高さのく形波の継続時間とし、 J_i は次の指示関数とする。

$$J_i(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{その他の } t \end{cases} \quad (9)$$

以上より瞬時濃度 $\tilde{\Gamma}$ の時間に対する分布は

$$\tilde{\Gamma}(t) = A_1 J_1(t) + A_2 J_2(t) + \dots \quad (10)$$

となり T_i を十分長い時間とすれば平均濃度と変動濃度rms値は $J_i J_j = 0 \quad i \neq j; J_i J_i = 1$ を考慮して次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} \tilde{\Gamma}(t) dt = \frac{1}{T_i} \sum A_i |J_i| \\ \overline{\gamma^2} &= \frac{1}{T_i} (\sum A_i^2 |J_i| - \Gamma^2 T_i) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ゆえに

図6 格子乱流中のプルームの相対変動濃度分布, $C; P=3^{(20)}$

図7 拡散の不規則く形波モデル⁽²⁰⁾

$$\frac{\gamma'}{\Gamma} = \left(\frac{\Gamma_c}{\Gamma} P - 1 \right)^{1/2}, \quad P = \frac{1}{\Gamma_c} \frac{\sum A_i^2 |J_i|}{\sum A_i |J_i|} \quad (12)$$

となる。上式で $A_i = A = \text{const.}$ とするとUberoi-Corrsinのモデルとなる。 Γ は式(8)のガウス分布であるから

$$\frac{\gamma'}{\Gamma} = \{P \exp(\eta^2 \ln 2) - 1\}^{1/2} \quad (13)$$

となる。これは図6に示したように P をパラメータとして考えたとき、 $P=3$ が実験とよく一致する。このように単純なモデルであるにもかかわらず、 γ'/Γ の実測値をよく示している。

5. 平均流速分布のせん断の効果

一様乱流中の拡散は基本的ではあるが、実際上の流れから見ればせん断乱流中の拡散現象のほうが重要である。Huntは拡散現象に影響する諸因子を次のように分類している⁽²²⁾。

- (1) 平均流のせん断
- (2) 乱れの非一様性
- (3) 平均流線間隔の拡大、縮小
- (4) 平均流再循環
- (5) 表面の存在

この(5)は拡散源から出た流体粒子が物体の表面とか地上表面に達する場合である。この過程は大きく二つに分けられる。すなわち、平均流と乱れの両方の作用によって、物体のよどみ領域近くの表面上に流体粒子が直接輸送される過程と、平均流が物体表面に平行であるような領域において乱れのみによって流体粒子が表面上に輸送される過程に分けられる。もちろん、どちらの過程においても物体表面近くの流速は零へと減少していくので分子拡散による輸送も重要である。

ここでは(1)の平均流のせん断について述べる。この基本問題は無限空間内での一様せん断流で理論的に多くの研究がなされてきたが、中ではOkubo-Karweitの解が实际的なようである⁽²³⁾。これは Γ を支配する方程式として x 方向平均流速 U が y, z 座標の線形関数で与えられ、各方向の乱流拡散係数が一定の次式を扱ったものである。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + (U_{cl} + \Omega_y y + \Omega_z z) \frac{\partial \Gamma}{\partial x} &= K_x \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} \\ &+ K_y \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} \quad (14) \end{aligned}$$

ここに、 $U_{cl}: y=z=0$ における中心軸上の平均流速、 $\Omega_y, \Omega_z: y, z$ 方向の平均速度こう配、 $K_x, K_y, K_z: 各方向の乱流拡散係数である。Okuboらは原点で物質を瞬時に放出した場合の解⁽²⁴⁾の重ね合わせとして $U_{cl}$$

$= \text{一定}$, $K_x = K_y = K_z (=K_t)$, $\Omega_y = 0$ の条件下の解を求めている。

他にせん断乱流中の拡散場の理論として Hwang らや⁽²⁵⁾, Huang⁽²⁶⁾の研究がある。しかし Hwang らの解は実際に応用するためには変動速度場に対する詳細なデータを必要とする形であるし, Huang の理論は壁面上のせん断流を扱ったもので著者らの実験には妥当しない。

実験は前述の格子乱流中の拡散実験に用いた水槽の格子をせん断流作成用の不等間隔格子に交換して行った⁽²⁷⁾。作り出された平均速度こう配は 3 種類であり, いずれも良好な直線速度分布と水路幅方向へのよい一様性を示した。測定された平均濃度分布の一例として最もせん断の弱い場合の結果を図 8 に示す(以下 z 方向はせん断面, y 方向は対称面である)。Okubo らの解のパラメータを適切に選択すれば図 8 に描かれているように実験とのよい一致が得られる。しかし, 速度こう配の大きい他の二つの場合には, 特に濃度場外縁部で実験とのずれが大きかった。どの場合も平均濃度の z 方向分布は低速側にひずむが, これはある x 断面で見たとき, 低速側で観測される流体粒子は平均として長い拡散時間を経ているためであると解釈できる。

変動濃度分布の一例を図 9 に示した⁽²⁸⁾。縦軸は濃度変動 rms 値 γ' を試料濃度 Γ_j で, 横軸は z, y 座標を代表長さ L (これは速度こう配から定まる)で無次元

図 8 せん断乱流中のブルームの平均濃度分布⁽²⁷⁾

化してある。平均濃度分布と同様に z 方向では低速側にひずみ, y 方向には対称的である。全体的に濃度変動 rms 値の分布は Γ_j に対する相対的値が平均濃度分布より大きく, 広がった形を示しているのが特徴である。このようなせん断乱流中の拡散でも前述のく形波モデルが適用できる⁽²⁸⁾。

変動速度場については条件付き測定結果は多くあるが濃度場についての結果は少ないようである。連続点源ブルームの間欠性はブルームの蛇行や, ブルーム内への周囲流体の巻込み(entrainment)によって生ずる⁽²⁹⁾。このため, ある点 x で観測される拡散物質の瞬時濃度 $\tilde{I}(x, t)$ に対し次の間欠関数 $\tilde{I}(x, t)$ が定義できる。

$$\tilde{I}(x, t) = \begin{cases} 1; \tilde{I}(x, t) > 0 \\ 0; \tilde{I}(x, t) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

間欠係数 $I_r(x, t)$ は $\tilde{I}$ の期待値として定義され, これは $\tilde{I}$ が正となる確率であり次式が成り立つ。

$$I_r(x, t) \equiv E[\tilde{I}] = \text{Prob}[\tilde{I} > 0] \quad (16)$$

定常場であれば I_r は時間の関数ではなくなる。

条件付き平均濃度は $\tilde{I}(x, t) > 0$ の条件下での平均濃度を意味し, $\langle I' \rangle$ で示す。条件付き変動濃度の rms

図 9 せん断乱流中のブルームの変動濃度分布⁽²⁸⁾

図 10 $I_r, \langle \Gamma \rangle$ の分布の例⁽³¹⁾

値を $\langle \gamma' \rangle$ と書くと通常平均量との間に次式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= I_r \langle \Gamma \rangle \\ \gamma'^2 &= I_r \langle \gamma'^2 \rangle + I_r (1 - I_r) \langle \Gamma \rangle^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

O'Brien は確率密度関数や条件付き統計量の支配方程式を導き、それを閉じた形にすることについて論じている⁽³⁰⁾。

ここでは著者らの実測した条件付き統計量の代表例としてせん断乱流中のブルームの $I_r, \langle \Gamma \rangle$ の z 方向分布を図 10 に示した⁽³¹⁾。図の $I_{rm}, \langle \Gamma \rangle_m$ は各測定断面の Γ の最大位置での値であり b_{rz} は平均濃度の半値幅である。図中 M10 とした曲線はメッシュ 10 の格子乱流中のブルームの条件付き測定値である。図のようにせん断乱流中の $I_r, \langle \Gamma \rangle$ 分布は非対称で、特に低速側 ($z - z_m < 0$) で M10 の場合との差が大きくなっている。これらも拡散時間の差によるものと解釈できる。

次にブルームの下流方向への発達に関連した諸量として図 11 に I_r および $\langle \Gamma \rangle$ のそれぞれの z 方向半値幅 $b_{I_r}, b_{\langle \Gamma \rangle}$ の変化を b_{rz} と比較して示した。図 11 中の式はべき乗則が成立するものとして求めたものであり、 $b_{\langle \Gamma \rangle}$ は b_{rz} の 2 倍近く大きくなっている。下流方向発達の考察には拡散時間スケールが重要であるが⁽³²⁾、これには通常の拡散時間 $\tau = (x - x_0)/U_{cl}$ ； $x - x_0$ は仮想原点 x_0 からの x 方向拡散距離、 U_{cl} はブ

図 11 各半値幅の発達⁽³¹⁾

ルーム中心軸上の速度、の無次元化拡散時間 τ^* が有効である。ここに τ^* は

$$d\tau^* = d\tau / T_{cl}(\tau) \dots\dots\dots (18)$$

で定まり、 T_{cl} は中心軸上の積分特性距離 L_{cl} と rms 値 u'_{cl} より $T_{cl} = L_{cl}/u'_{cl}$ で決まる時間スケールである⁽³¹⁾。

6. む す び

一様乱流、均一せん断流の次に問題になるのは乱流境界層中や物体周りの流れ場の中の拡散である。前者については Fackrell らの研究が注目され⁽³³⁾、後者については Hunt の展望がある⁽²²⁾。著者らは円柱によるブルームのかく乱について測定した⁽³⁴⁾。以上では実験的研究が比較的少ないことを考え、著者らの結果について詳しく述べたが理論的研究は多い。中でも Pope は pdf(確率密度関数)の微分方程式に基礎をおく多くの論文を発表している⁽³⁵⁾。特に Pope の総説は重要である⁽³⁶⁾。さらに確率微分方程式のシミュレーションも行われ⁽³⁷⁾、これについては Durbin の解説が参考になる⁽³⁸⁾。実用的な $k-\varepsilon$ 法にもとづく計算では最近の Yoshizawa の論文が注目される⁽³⁹⁾。ナビア・ストークス方程式の直接シミュレーションに基礎をおく計算もなされている⁽⁴⁰⁾。

ここで述べたのは受動的(passive)スカラ量の拡散であるが、このほかに能動的(active)スカラ量の拡散、ベクトル量の拡散問題も多く今後の研究の発展が予想される。

本稿をまとめるに際しては共同研究者の山梨大学 宮田勝文教授、名古屋大学 酒井康彦講師、同学角田博之博士にご協力いただいた。ここに厚く謝意を表する。

文 献

- (1) Tennekes, H., and Lumley, J. L., *A First Course in Turbulence*, (1978), 8. The MIT Press.

- (2) 例えば, Bennani, A., ほか 2 名, *AIChE J.* **31**-7(1985), 1157.
- (3) Wiggins, S., *Nature*, **333**-2(1988), 395.
- (4) Ottino, J. M., ほか 3 名, *Nature*, **333**-2(1988), 419.
- (5) Chevray, R., ほか 2 名, 機誌, **81**-840(1988), 1130.
- (6) Jones, S. W. and Aref, H., *Phys. Fluids*, **31**-3(1988), 469.
- (7) Batchelor, G. K. and Townsend, A. A., *Turbulent Diffusion in Surveys in Mechanics*, (1956), Cambridge Uni. Press.
- (8) Sato, Y. and Yamamoto, K., *J. Fluid Mech.*, **175**(1987), 183.
- (9) 白樫・富田, 機論, **45**-396, B (1979), 1234.
- (10) Gad-el-Hak, M. and Morton, J. B., *AIAA J.*, **17**-6 (1979), 558.
- (11) Nye, J. O. and Brodkey, R. S., *J. Fluid Mech.*, **29**-pt. 1 (1967), 151.
- (12) Lee, J. and Broadkey, R. S., *Rev. Sci. Instrum.*, **34**-10 (1963), 1086.
- (13) Batt, R. G., *J. Fluid Mech.*, **82**-pt. 1(1977), 53.
- (14) Dibble, R. W., ほか 2 名, *Combust. Flame*, **67**(1987), 189.
- (15) 例えば, Era, Y., *Rep. Sci. Tech. Nihon Uni.*, **21**(1977), 9.
- (16) 中村・宮田・酒井, 機論, **48**-436, B, (1982), 2484.
- (17) 田村・ほか 3 名, 機論, **53**-490, B (1987), 1691.
- (18) 中村・ほか 3 名, 機論, **50**-453, B(昭 59), 1254.
- (19) 例えば, Kyong, N. H. and Chung, M. K., *KSME J.*, **1**-1 (1987), 24.
- (20) Nakamura, I., Sakai, Y. and Miyata, M., *J. Fluid Mech.*, **178**(1987), 379.
- (21) Uberoi, M. S., and Corrsin, S., *NACA. Rep.*, No. 1142 (1953).
- (22) Hunt, J. C. R., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **17**(1985), 447.
- (23) Okubo, A. and Karweit, M. J., *Limno. Oceanogr.*, **14**-4 (1969), 514.
- (24) Canter, H. H. and Okubo, A., *Final Rep. U. S. At. Energy Comm. Contract*, No. AT(30-1)-2973(1965).
- (25) Hwang, B. C., ほか 2 名, *J. Atmos. Sci.*, **36**-10(1979), 1955.
- (26) Huang, C. H., *Atmos. Environ.*, **13**-4(1979), 453.
- (27) 中村・ほか 3 名, 機論, **51**-468, B (1985), 2554.
- (28) 中村・ほか 3 名, 機論, **51**-468, B (1985), 2773.
- (29) Wilson, D. J., ほか 2 名, *Atmos. Environ.*, **19**-7(1985), 1053.
- (30) O'Brien, E. E., *J. Fluid Mech.*, **89**-pt. 2(1978), 209.
- (31) 中村・ほか 2 名, 機論, **54**-498, B (1988), 345.
- (32) Batchelor, G. K., *J. Fluid Mech.*, **3**-pt. 1(1957), 67.
- (33) Fackrell, J. E. and Robin, A. G., *J. Fluid Mech.*, **117** (1982), 1.
- (34) 角田・ほか 2 名, 機論, **54**-503, B (1988), 1581.
- (35) 例えば, Pope, S. B., *Proc. 21st. Symp. Combust.*, (1986), 1341, The Combust. Inst.
- (36) Pope, S. B., *Prog. Energy Combust. Sci.*, **11**(1985), 119.
- (37) 例えば, Chien-Cheng Chang., *Math. Comput.*, **49**-180 (1987), 523.
- (38) Durbin, P. A., *NASA Ref. Pub.*, 1103(1983).
- (39) Yoshizawa, A., *J. Fluid Mech.*, **195**(1988), 541.
- (40) Eswaram, V., and Pope, S. B., *Phys. Fluids*, **31**-3(1988), 506.