非等方 k - ϵ モデルによる矩形管内乱流の数値解析*西 島 勝 —*¹A Numerical Study of Turbulent Square-Duct Flow Using an Anisotropic k - ϵ Model

Shoiti NISIZIMA

Turbulent square-duct flow is studied numerically using an anisotropic k - ϵ model in which the deviation of the Reynolds stress from its isotropic eddy-viscosity representation plays a central role. The noslip boundary condition on the wall is satisfied with the aid of a wall damping function. Various computed turbulent quantities of square-duct flow are compared with experimental and numerical results. This comparison shows that the present anisotropic k - ϵ model can give reasonable result to important properties in duct flows such as the anisotropy of turbulent intensities and the secondary flow.

Key Words: Turbulent, Anisotropic k - ϵ Model, Duct Flow, Turbulent Intensity

非等方 k - ϵ モデルを用いて矩形管内乱流を数値解析した。このモデルの特徴はレイノルズ応力の非等方渦粘性表現にあり、溝乱流においても乱流強度の非等方性を再現できることにある。数値計算にあたっては、壁上で滑りなしの境界条件を課せられるようにただ1種類の壁減衰関数を組み入れた。得られた結果は、実験値や他の数値解析結果と比較し、矩形管内乱流での非等方性の特徴であるレイノルズ応力の非対称な分布や主流方向と垂直な面に誘発される二次流もよく再現されている。

1. はじめに

近年、スーパー・コンピュータ等の大形計算機的发展により、乱流の数値シミュレーションが重視され、種々の乱流モデルが考案されてきている⁽¹⁾。工学的問題ではこれらの中、モデルの簡単さと計算時間が比較的少ないことなどによって、 k - ϵ モデルが非常によく用いられている。しかし、 k - ϵ モデルはレイノルズ応力の等方的渦粘性表現を基礎としているため、溝乱流では乱流強度の非等方性を評価できない。この欠点は

矩形管内乱流では、特徴的な主流方向と垂直な面に誘発される二次流を再現することができない。なぜなら、二次流の発生は乱流強度の非等方性に起因しているからである。このことは k - ϵ モデルが工学的に重要とされている乱流（例えば、矩形管内乱流・後方ステップ乱流）の解析に適当でないことを示している。

この困難を救うために応力モデルや代数モデルが工夫されてきており⁽¹⁾⁽²⁾、それらは矩形管内乱流の数値解析にも多く適用されている^{(3)~(10)}。その結果は、これら応力モデル等が乱流強度の非等性の強い流れに有効であることを示している。しかし、これらのモデルは例えば矩形管内乱流の解析において、壁上で滑りなし境界条件の使用がほとんどなされていない。

このような各乱流モデルの特徴を考慮すれば、比較的単純である k - ϵ モデルの性質を保ちつつ、それに乱流強度の非等性と滑りなし境界条件を課せられるように改良を加えることは有益である。著者と吉澤は最近、非等方 k - ϵ モデルを提起し、溝乱流やクエット乱流・矩形管内乱流に適用して妥当な結果が得られることを示した^{(11)~(13)}。このモデルは吉澤により統計理論的に導出されたものであり、レイノルズ応力の非等方性渦粘性表現に大きな特徴をもっている⁽¹⁴⁾。さらに最近、これと類似なモデルが Speziale によっても提起され

* 昭和63年10月19日 第66期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和63年3月14日。

*¹ 正員、東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木7-22-1)。

ている⁽¹⁵⁾。

本論文では、上述の非等方 k - ε モデルを矩形管内乱流の数値解析に適用する。数値計算にあたっては、壁上で滑りなしの境界条件を課せられるようにただ1種類の壁減衰関数を組み入れる。得られた結果を実験値や他の数値解析結果と比較し、妥当であることを示す。特に矩形管内乱流での非等方性の特徴であるレイノルズ応力の非対称な分布や主流方向と垂直な面に誘発される二次流等もよく再現できることが明らかにされる。

2. 非等方 k - ε モデル

速度、圧力（密度で割ったもの）の平均部分とそれからのずれを示す擾乱部分をそれぞれ $(\bar{v}, \bar{p})$ と (v', p') で表すと三次元非圧縮・粘性流体に対する平均部分の基本方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{v}_a}{Dt} &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_a \frac{\partial}{\partial x_a} \right) \bar{v}_a \\ &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_a} + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(R_{aa} + \nu \frac{\partial \bar{v}_a}{\partial x_a} \right) \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{v}_a}{\partial x_a} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

で与えられる（アルファベットの下付き添字については1から3まで和をとることにする）。ここで、 ν は動粘性率であり、 $R_{a\beta}$ はいわゆるレイノルズ応力で、

$$R_{a\beta} \equiv -\langle v'_a v'_\beta \rangle \dots\dots\dots (3)$$

で与えられる（ $\langle \rangle$ はアンサンブル平均を表す）。式(1)は、 $R_{a\beta}$ と $\bar{v}$ との間になんらかの関係づけを与えなければ解くことができない。そのため、非等方 k - ε モデルでは擾乱場の基本的統計量として乱流エネルギー k とエネルギー散逸率 ε を選び、前論文^{(11)~(13)}に基づきレイノルズ応力を、

$$\begin{aligned} R_{a\beta} &= -\frac{2}{3} k \delta_{a\beta} + \nu_e \left(\frac{\partial \bar{v}_a}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_a} \right) \\ &+ \frac{1}{3} \left(\sum_{m=1}^3 \tau_m S_{maa} \right) \delta_{a\beta} + R'_{a\beta} \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

渦粘性率 ν_e 等を、

$$\nu_e = C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon} \dots\dots\dots (5)$$

$$\tau_m = C_{\tau m} \frac{k^3}{\varepsilon^2} \dots\dots\dots (6)$$

$$S_{1a\beta} = \frac{\partial \bar{v}_a}{\partial x_a} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_a} \dots\dots\dots (7)$$

$$S_{2a\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_a}{\partial x_a} \frac{\partial \bar{v}_a}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_a} \frac{\partial \bar{v}_a}{\partial x_a} \right) \dots\dots\dots (8)$$

$$S_{3a\beta} = \frac{\partial \bar{v}_a}{\partial x_a} \frac{\partial \bar{v}_a}{\partial x_\beta} \dots\dots\dots (9)$$

$$R'_{a\beta} = - \sum_{m=1}^3 \tau_m S_{maa} \dots\dots\dots (10)$$

と表す。ただし、上式中の $\delta_{a\beta}$ はクロネッカのデルタ記号である。以上の式は以下の k と ε の方程式⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾と連立させる事により解くことができる。

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} &= R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(C_{kk} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_a} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_a} \left(C_{k\varepsilon} \frac{k^3}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_a} \right) + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_a^2} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} &= C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(C_{\varepsilon \varepsilon} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_a} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_a} \left(C_{\varepsilon k} k \frac{\partial k}{\partial x_a} \right) - C_{\varepsilon 3} k \left(\frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - \frac{\partial \bar{v}_a}{\partial x_b} \right)^2 \\ &+ \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_a^2} \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

式(11)、(12)は通常の k - ε モデル方程式に各々右辺第4項が付加されており、その上、式(12)の第5項も加えられている。第4項の二つの拡散項については、竹光によりその重要性が指摘されており⁽¹⁸⁾、第5項の渦度に関する項の付加については半場により示唆されたものである⁽¹⁹⁾。

$C_\nu, C_{kk}, C_{k\varepsilon}, C_{\varepsilon n}, C_{\varepsilon \varepsilon}, C_{\varepsilon k}, C_{\tau n}$ ($n=1, 2, 3$) はモデル定数であり、すでに溝乱流の解析で次のとおり最適化されている⁽¹³⁾。

$$\begin{aligned} C_\nu &= 0.09, \quad C_{kk} = 0.08, \quad C_{k\varepsilon} = -0.03 \\ (C_{\varepsilon 1} C_\nu - 2 C_{\varepsilon 3}) &= 0.072, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.9, \quad C_{\varepsilon \varepsilon} = 0.1 \\ C_{\varepsilon k} &= -0.1, \quad C_{\tau 1} = 0.057, \quad C_{\tau 3} = -0.0067 \end{aligned} \dots\dots\dots (13)$$

なお、溝乱流の解析で未定であった定数は本矩形管内乱流の解析計算のなかで、実験値と比較し以下のよう最適化した。

$$C_{\varepsilon 1} = 1.022, \quad C_{\varepsilon 3} = 0.01, \quad C_{\tau 2} = -0.33 \dots\dots (14)$$

3. 壁上での滑りなし境界条件の適用

通常の k - ε モデルでは式(5)、非等方モデルではさらに式(6)の渦粘性表現がモデルの重要な基礎となっているが、これは壁のごく近くでは成立しない。そのままでは壁上で滑りなし境界条件を課することができないので、壁減衰関数を導入してこの困難を解決する工夫が多くの研究者によりなされてきている^{(20)~(24)}。

LES (Large Eddy Simulation) による溝乱流の解析においても同様な試みがなされている⁽²⁵⁾⁽²⁶⁾。ここでは、渦粘性に関わる各項のみに壁減衰関数を導入する。ただし、二対の壁で構成されている図1の矩形管内乱流では、一対の壁の溝乱流に適用した壁減衰関数⁽¹³⁾、

$$f_{dc} = 1 - \exp(-y^+/23) \dots\dots\dots (15)$$

を二つ掛け合わせたものを用いる。すなわち、

$$f_d = [1 - \exp(-y^+/23)][1 - \exp(-z^+/23)] \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$y^+ = v^* x_2' / \nu, \quad v^* = \sqrt{\nu \left(\frac{d\bar{v}_1}{dx_2} \right)_{x_2=\pm D}} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$z^+ = w^* x_3' / \nu, \quad w^* = \sqrt{\nu \left(\frac{d\bar{v}_1}{dx_3} \right)_{x_3=\pm D}} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ただし、 x_2' , x_3' はそれぞれ図 1 の $x_2 = \pm D$, $x_3 = \pm D$ (壁) からの最短距離であり、 y^+ , z^+ はそれぞれ壁座標、さらに v^* , w^* は摩擦速度である。

なお、吉澤により統計理論的に導かれた式(11), (12)はその導出過程から考えて、乗ずるべき壁減衰関数は二つの方程式に必ずしも同一のものでなくても差支えない。そこで、ここでは溝乱流の解析と同様に ν , k 方程式のみに用い、 ε 方程式すなわち式(12)へは導入しない。

以上の関数を導入して整理すると式(5), (6), (11)はそれぞれ次のようになる。

$$\nu_e = C_\nu f_d \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\tau_m = C_{\tau m} f_d \frac{k^3}{\varepsilon^2} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} = & R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(C_{kh} f_d \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_a} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(C_{ke} f_d \frac{k^3}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_a} \right) + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_a^2} \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

これにより、壁上での境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \bar{v}_3 = 0, \quad k = 0 \\ \varepsilon = \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_2^2} \text{ or } \varepsilon = \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_3^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

となる。この最後の条件は式(11)を壁上に適用することで得られたが、これは数値的安定性から、次のように 1 階微分に置き換えて適用した。すなわち、壁からの距離を x' とすると、壁近くで $k \sim x'^2$ となるため $(\partial^2 k / \partial x'^2) \sim 2(\partial \sqrt{k} / \partial x')^2$ と書け、 $\varepsilon \sim 2\nu(\partial \sqrt{k} / \partial x')^2$ と

図 1 座標

近似できる⁽²⁷⁾⁽²⁸⁾。

4. 正方形管内乱流への適用

A. 流れ関数の導入

図 1 のような正方形管内乱流では、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad (f = \bar{v}, k, \varepsilon), \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} = \text{const.} \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} = 0 \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、連続の式(2)を恒等的に満たし、圧力項を省くために、次のように流れ関数を導入する：

$$\bar{v}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, \quad \bar{v}_3 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\omega \equiv -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \psi = -\Delta_{yz} \psi \quad \dots\dots\dots (25)$$

以上の各式を、速度 $\sqrt{-(d\bar{p}/dx_1)D}$ と長さ D を基本量として無次元化して整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} = & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} + 1 + (\nu + \nu_e) \Delta_{yz} \bar{v}_1 + \frac{\partial \nu_e}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \nu_e}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \left(\tau_1 + \frac{\tau_2}{2} \right) \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \left(\tau_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} - \frac{\tau_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ \left(\tau_1 + \frac{\tau_2}{2} \right) \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \left(\tau_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} - \frac{\tau_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} = & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \omega}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + (\nu + \nu_e) \Delta_{yz} \omega + 2 \frac{\partial \nu_e}{\partial x_2} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial \nu_e}{\partial x_3} \frac{\partial \omega}{\partial x_3} - \left(\frac{\partial^2 \nu_e}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \nu_e}{\partial x_3^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} \right) \\ & - 4 \frac{\partial^2 \nu_e}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \left\{ (\tau_1 - \tau_3) \omega \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3} + \tau_3 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \right\} \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \left\{ -(\tau_1 - \tau_3) \left(\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right]^2 - \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} \right]^2 \right) + \tau_3 \left(\left[\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right]^2 - \left[\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \right]^2 \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} = & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial k}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \frac{\partial k}{\partial x_2} + E_p - \varepsilon + C_{kh} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(f_d \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial k}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(f_d \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial k}{\partial x_3} \right. \\ & \left. + f_d \frac{k^2}{\varepsilon} \Delta_{yz} k \right\} + C_{ke} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(f_d \frac{k^3}{\varepsilon^2} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(f_d \frac{k^3}{\varepsilon^2} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_3} + f_d \frac{k^3}{\varepsilon^2} \Delta_{yz} \varepsilon \right\} + \nu \Delta_{yz} k \quad \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_p = & \nu_e \left\{ \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} \right)^2 \right\} + \tau_1 \left\{ -\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right) \right. \\
& + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3} \left(\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right]^2 - \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} \right]^2 \right) + \omega \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} \right) \Big\} \\
& - \frac{\tau_2}{2} \left\{ \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3} \right) \right\} \\
& + \tau_3 \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3} \left(-\left[\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right]^2 + \left[\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \right]^2 - \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right]^2 + \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} \right]^2 \right) + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} \right) \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} - \omega \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3} \right) \right\} \dots (29) \\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} E_p - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + C_{\varepsilon 3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_3} + \frac{k^2}{\varepsilon} \Delta_{yz} \varepsilon \right\} \\
& + C_{\varepsilon k} \left\{ \frac{\partial k}{\partial x_2} \frac{\partial k}{\partial x_2} + \frac{\partial k}{\partial x_3} \frac{\partial k}{\partial x_3} + k \Delta_{yz} k \right\} - 2 C_{\varepsilon 3} k \left\{ \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \right)^2 + \omega^2 \right\} + \nu \Delta_{yz} \varepsilon \dots \dots \dots (30)
\end{aligned}$$

となり、これらと式(25)を連立させることにより解が得られる。

壁上での境界条件は、式(22)より次のようになる：

$$\begin{aligned}
\bar{v}_1 = 0, \quad \psi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \text{ or } -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2}, \quad k = 0, \\
\varepsilon = \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_2^2} \text{ or } \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_3^2} \dots \dots \dots (31)
\end{aligned}$$

なお、式(31)の ω に関しても、数値的安定性から ε と同様に式(24)を用いて $\bar{v}_2, \bar{v}_3$ の1階微分として適用した。

B. 数値計算法

差分方法は空間に関しては⁽²⁹⁾⁽³⁰⁾,

$$\left(\frac{dv}{dx} \right)_i = \frac{1}{x_{i+1} - x_{i-1}} \left\{ \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_i} (v_{i+1} - v_i) + \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i - x_{i-1}} (v_i - v_{i-1}) \right\} \dots \dots \dots (32)$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)_i = & 2 \left\{ \frac{v_{i-1}}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_i - x_{i-1})} - \frac{v_i}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} \right. \\
& \left. + \frac{v_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} \right\} \dots \dots \dots (33)
\end{aligned}$$

を、時間差分には Adams-Bashforth すなわち、

$$\frac{dv}{dt} = f \dots \dots \dots (34)$$

に対し、

$$v^{n+1} = v^n + \tau \frac{3f^n - f^{n-1}}{2} \dots \dots \dots (35)$$

を用いた。ただし、 τ は時間刻み幅、添字 n, i はそれぞれ n 番めの時刻、 i 番めの空間位置を表す。時間刻み幅は等間隔、空間に関しては x_2, x_3 を、

$$x_2 = \tanh(Y), \quad x_3 = \tanh(Y), \quad (-3.3 < Y < 3.3) \dots \dots \dots (36)$$

のように表し、 Y を等間隔に60分割した。式(25)は逐次過緩和法(SOR)を用いて解いた。

初期値は等方的な $k-\varepsilon$ モデルで得られたものを用い、二次流れについてはただ1格子点上の ψ を最初の1時間ステップだけ少し変化させて、擾乱を起こさせ

発展を促進させた。

式(36)の格子配分は、粘性底層 ($y^+ \sim 5$) 内に3個、 $y^+ < 100$ に16個の格子点を置くこととなり、これ以上点を増やしても結果がほとんど改善されない数である。このように細かい格子間隔を用いたことが、壁のごく近くを含め実験結果や他の数値計算の結果と比較して良い一致を得ることのできた一因である。

5. 結 果

図2～10に、 $Re = 43\,379$ (Bulk 速度 $\bar{v}_b$ と Hydraulic Diameter $= 2D$ に基づくレイノルズ数)の発達した乱流 ($x_1/D_h > 100$) の解析結果と実験ならびに他の数値解析結果を示す。なお、本解析は正方形管内乱流であるから、対称性を考慮して1/4面 ($-D < x_2 < 0, -D < x_3 < 0$) のみの計算を主に行い、最終的にそこで得られた数値をもとに全矩形管内計算を行い点検するという方法をとった。このレイノルズ数の計算を選んだ理由は Melling and Whitelaw の $Re = 42\,000$ の実験値⁽³¹⁾との比較を考慮したためであるが、実測は完全に発達し切った時点のものでないことに注意を要する必要がある。

図2は主流方向の流速分布図であるが、実験値に比べて少し大きめの値となっている。しかし、二次流により等高線が角(corner)へ引き込まれる現象が、他の数値解析結果より良く再現されている。

図3は二次流 $\bar{v}_3/\bar{v}_{1cl}$ ($\bar{v}_{1cl}$ は矩形管中心線上の主流速)を示しているが、最大値と最小値の位置等矩形管内乱流の特徴をよく表している。しかし、その値(絶対値)は多少小さく表現されている。 $\bar{v}_2$ と $\bar{v}_3$ のベクトルを図4に示してあるが、流れの状況は実験のそれと良く一致している。

図5は乱流エネルギーで、その各成分を知るために図6、7に乱流強度の分布を示してあるが、全体的な分布は実験のそれとよく対応している (v'_2 と v'_3 は対角線に対して対称)。例えば、 v'_1 の等高線の角への張り出しが顕著に表現されており、他の数値解析の結果に比

べてより明りょうである。

図 8, 9 のレイノルズ応力の分布は, 閉じた等高線の部分を除いて実験値をよく再現している。閉じた等高線の部分は他に比べて値が小さいとはいえ再現されておらず, 今後改良が必要であろう。

最後に, 応力モデルや代数モデルによる数値解析との比較を行ってみる。図 2~9 (記号 $\circ$, $+$, $\triangle$) から明らかとなり, これらのモデルは矩形管内乱流解析に有効であることが実証される。しかし, 三次元乱流への適用を考えた場合, 応力モデルや代数モデルは方程式の数とモデル定数が多くなり, この点では非等方 $k-\epsilon$ モデルのほうが扱いやすいであろう。さらに, 応力モデル等による数値解析では, 壁上の境界条件としては経験則の使用が一般的に行われ, 滑りなし境界条件の使用はほとんどなされていない。図 10 は本数値解析において壁近くで対数速度則がどの程度まで成立しているかを示したものである。これによると, 管中央付

- * Melling and Whitelaw⁽³¹⁾ ($Re=42\,000$)
 $\square$: Isotropic $k-\epsilon$ model from Demuren and Rodi⁽⁶⁾ ($Re=83\,000$)
 $\circ$: Demuren and Rodi⁽⁶⁾ ($Re=83\,000$)
 $+$: Nakayama et al⁽⁷⁾⁻⁽⁹⁾ ($Re=83\,000$)
 $\triangle$: Baker and Orzechowski⁽¹⁰⁾ ($Re=83\,000$)
 (図 3~9 も同記号)

図 2 主流速 $\bar{v}_1/\bar{v}_{1cl}$

図 3 二次流 $\bar{v}_3/\bar{v}_{1cl}$

図 4 二次流 $\sqrt{\bar{v}_2^2 + \bar{v}_3^2}/\bar{v}_{1cl}$

近では経験則がよく再現されているが、両壁の交差する角付近では計算値が対数速度則と大きく異なっていくことがわかる。この結果は、このような管内乱流を壁法則を境界条件として数値解析をする時の注意点を提起しており、壁上で滑りなし境界条件の使用が望ましいことを示唆している。

6. 結 論

非等方 $k-\varepsilon$ モデルによる本研究は、溝乱流のシミュレーションにおいて最適化されたモデル定数、壁減衰関数を修正させることなく、二次流を伴うより複雑な乱流場をシミュレートできることを示した。特に、等方 $k-\varepsilon$ モデルでは再現できない二次流の諸特性、また、それより生じる主流への影響等が定量的にも明らかにされた。本非等方 $k-\varepsilon$ モデルが二次流および乱流強度の非等方性を再現できることを考えると、このモデルははく離を伴う乱流、噴流等の、等方 $k-\varepsilon$ モデルが必ずしもよい結果を与えない流れに有効に適用できる可能性がある。

謝 辞

この研究を進めるにあたり吉澤徹、竹光信正、堀内

(a)

(b)

図 6 乱流強度 $v_1/\bar{v}_{1cl}$

(a)

(b)

図 5 乱流エネルギー $(k/\bar{v}_{1cl}^2) \times 10^3$

(a)

(b)

図 7 乱流強度 $v_2/\bar{v}_{1cl}$

図 8 レイノルズ応力 $(-\langle v_1'v_2' \rangle / \bar{v}_{\tau}^2) \times 10^3$ 図 9 レイノルズ応力 $(-\langle v_1'v_3' \rangle / \bar{v}_{\tau}^2) \times 10^3$ 図 10 壁近くの主流速 $\bar{v}_1/v^*$

潔の各博士に有益な討論と助言を、数値計算に当たっては東京大学生産技術研究所電子計算機室の各氏から多大な援助と協力をいただきました。ここに報告するとともに、感謝の意を表明します。

文 献

- (1) Bradshaw, P., Cebeci, T. and Whitelaw, J. H., *Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow*, (1981), 37, Academic Press.
- (2) Lumley, J. L. (Kollmann, W. 編), *Second-Order Modeling of Turbulent Flows, Prediction Methods for Turbulent Flows*, Hemisphere, (1980), 1.
- (3) Gessner, F. B. and Emery, A. F., *J. Fluids Eng.*, **98** (1976), 261.
- (4) Gessner, F. B. and Po, J. K., 文献(3)の269ページ.
- (5) Gessner, F. B. and Emery, A. F., *J. Fluids Eng.*, **103** (1981), 445.
- (6) Demuren, A. O. and Rodi, W., *J. Fluid Mech.*, **140**

- (1984), 189.
- (7) Nakayama, A., Chow, W. L. and Sharama, D., *J. Fluid Mech.*, **128** (1983), 199.
- (8) Nakayama, A., Chow, W. L. and Sharma, D., *Bulletin JSME*, **27** (1984), 1438.
- (9) Nakayama, A. and Chow, W. L., *Encyclopedia of Fluid Mechanics*, Gulf Publishing Company, **1** (1986), 638.
- (10) Baker, A. J. and Orzechowski, J. A., *AIAA J.*, **21** (1983), 524.
- (11) 西島・吉澤, なばれ, 5-2 (昭61), 147.
- (12) Nisizima, S. and Yoshizawa, A., *AIAA J.*, **25** (1987), 414.
- (13) 西島, 機論, 53-495, B (昭62), 3166.
- (14) Yoshizawa, A., *Phys. Fluids*, **27** (1984), 1377.
- (15) Speziale, C. G., *J. Fluid Mech.*, **178** (1987), 459.
- (16) Yoshizawa, A., *Phys. Fluids*, **28** (1985), 59.
- (17) Yoshizawa, A., *Phys. Fluids*, **30** (1987), 628.
- (18) Takemitsu, N., Revised $k-\varepsilon$ Model, submitted to *J. Fluid Eng.*
- (19) Hamba, F., *J. Phys Soc, Japan*, **56** (1987), 3771
- (20) Patel, V. C., Rodi, W. and Scheuerer, G., *AIAA J.*, **23** (1984), 1308.
- (21) Jones, W. P. and Launder, B. E., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **15** (1972), 301.
- (22) Jones, W. P. and Launder, B. E., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **16** (1973), 119.
- (23) Lam, C. K. G. and Bremhorst, K., 文献(5)の456ページ.
- (24) Chien, K-Y., *AIAA J.*, **20** (1982), 33.
- (25) Moin, P. and Kim, J., *J. Fluid Mech.*, **118** (1982), 341.
- (26) Horiuti, K., *J. Comp. Phys.*, **71** (1987), 343.
- (27) Hanjalic, K. and Laundar, B. E., *J. Fluid Mech.*, **74** (1976), 593.
- (28) Nakao, S., *AIAA J.*, **22** (1984), 303.
- (29) Horiuti, K., *Theore Applied Mech.*, **31** (1981), 407.
- (30) Briley, W. R., *J. Comp. Phys.*, **14** (1974), 8.
- (31) Mellling, A. and Whitelaw, J. H., *J. Fluid Mech.*, **78** (1976), 289.

討 論

〔質問〕 河村 洋〔東京理科大学理工学部〕

従来この種の解析では、管断面内の垂直応力の分離 ($\overline{v_3^2} - \overline{v_2^2}$) の再現がむずかしいことが知られているが、これについて貴解析ではどのような結果が得られているか、ご教示いただければ幸いです。

〔回答〕 ご指摘の $\langle v_3^2 \rangle - \langle v_2^2 \rangle$ については Mellling-Whitelaw の実験値⁽³¹⁾ に合せた $\langle v_2^2 \rangle$

$-\langle v_3^2 \rangle / \bar{v}_{cl}^2 \times 10^3$ 図を次ページに示す。なお、付図1(a)が本数値解析結果、付図1(b)の*が実験値、+は Makayama ら⁽⁷⁾⁻⁽⁹⁾の数値解析値を表している。これによると、実験結果は対称性が十分でないことが示されており、本解析の数値は実験値と Makayama らの数値との中間になっている。なお、これに関する問題点についてご教授下されれば幸いです。

(a) 本数値解析値

(b) 実験値と他の数値解析結果

付図1 $[(\langle v_2^2 \rangle - \langle v_3^2 \rangle) / \bar{v}_{cl}^2] \times 10^3$