境界要素法の高精度化に関する研究*
(第1報, 相対量を用いた積分方程式の導入)木須博行*¹, 河原哲也*²A Study of Accurate Analysis System
through the Boundary Element Methods
(1st Report, Introduction of Integral Equation with Relative Quantity)

Hiroyuki KISU and Tetsuya KAWAHARA

In the usual boundary element method, some special numerical techniques have been developed in order to get accurate solutions at internal points near a boundary where the singularity of the integral equation becomes very strong. However, such superior devices have not succeeded in completely removing the singularity except the analytical integral scheme which tends to contain bigger errors due to discretization. From this point of view, a boundary integral equation is newly formulated. In the implementation, a relative quantity of potential or displacement function is used. In this report, we confirm the excellence of the present device, and equivalence of the present formulation with relative quantity to the rigid body condition and to the constant potential condition is verified.

Key Words: Boundary Element Method, Boundary Integral Equation, Relative Quantity, Singular Integral, Rigid Body Condition

1. 緒 言

近年, 計算力学の分野における境界要素法(BEM)への期待はますます大きくなり, 種々の工学上の問題がBEMにより解かれるようになってきた。しかしBEMにもいまだに基礎的な未解決の問題がいくつか残されており, その解決がBEMの今後の発展のために必要不可欠なものが多い。その一つに特異性に起因する著しい精度の低下がある。これはよく知られているように, 境界上を含む境界近傍においてポテンシャル(弾性問題では変位に相当するが, 以下いちいち断わらず両方の意味を持たせる)またはフラックス(弾性問題における表面力ないし応力の意味も含ませることとする)を境界積分表示から数値積分により求める際に生じるが, この原因は境界近傍では核関数の特異性が非常に強くなるためであるとされている。これに対して従来より種々の対策が開発されてきた。主なものとしては, 二種指数関数形積分公式を用いる方法⁽¹⁾⁽²⁾, 解析的積分法⁽³⁾, べき関数写像を用いる方法⁽⁴⁾, 表面上の計算結果と精度のよい内点部分の計算結果とを内

挿する方法, 部分積分により核関数の特異性を下げる方法⁽⁶⁾⁽⁷⁾, などを挙げることができよう。さらには表面での要素分割を省く方法⁽⁸⁾, 仮想境界法⁽⁹⁾などもこの対策の一面を持つと考えられる。これらのうち, 解析的積分法は現在のところ, 低次の内挿にのみ適用され離散化誤差が避けられず, またはん用性にも問題がありできれば数値的解析法が望ましい⁽¹⁰⁾。また部分積分による方法では積分方程式の中にポテンシャルの微分が現れる。さらに他の方法も, プログラムの複雑化は別にしても特異性の問題を完全に解決できたわけではなく, 例えば表面上のフラックスの数値積分が発散するなど, この問題はBEMのはん用システム化と高精度化を進めるうえでなお大きな障害となっている。以上の観点から, 本研究では積分方程式に相対量を用いる定式化を導入し, 上述の特異性の問題に関する一連の考察を行うとともにその改善方法を提案するものであり, 本報ではまずポテンシャル問題の境界積分方程式を導入する。

従来の積分方程式は内点, 境界上, および外点でいわゆる位置定数が異なり, 方程式の移行に伴いジャンプが生じるが, 本報で示すように相対量を用いた積分方程式によれば内点から外点まで連続した積分方程式が得られる。また, フラックスの核関数の特異性を1

* 平成元年1月25日 第955回講演会において講演, 原稿受付 昭和63年6月24日。

*¹ 正員, 長崎大学工学部(〒852 長崎市文教町1-14)。

*² 学生員, 長崎大学大学院。

階だけキャンセルでき、内点の値を求める場合も通常のガウス数値積分公式により高精度の解が求まるようになる。本論文では以上のような議論に関する証明と数値検証例のほか、相対量を用いた定式化と等ポテンシャル条件(剛体変位条件)との等価性についても議論する。相対量を用いた定式化では、表面上のポテンシャルこう配またはフラックスの積分方程式が自然に得られるが、これについては次報で報告する。

2. 相対量を用いた積分方程式

2.1 核関数の特異性と特異積分 ここではまずポテンシャル問題を例にとり説明するが、まったく同様な議論が弾性問題またはその他の問題についても成立する(ただしフラックスの正負の定義は適当に行う必要がある)。ポテンシャル問題の境界積分方程式と内点のポテンシャルを与える積分方程式はそれぞれ次式で与えられる。

$$c(P)u(P) = \int \{-u^*(P, Q)q(Q) + q^*(P, Q)u(Q)\}ds(Q) \quad \cdots(1)$$

$$u(p) = \int \{-u^*(p, Q)q(Q) + q^*(p, Q)u(Q)\}ds(Q) \quad \cdots(2)$$

ここに u : ポテンシャル関数, q : フラックス, c : 境界形状により定まる位置定数, s : 物体境界, P, p : 物体境界上および内部のソース点, Q : s 上を動く動点である。また u^*, q^* はそれぞれポテンシャルとフラックスに関する基本解であり, 2点 PQ 間の距離 r の関数である。 $r \rightarrow 0$ のとき u^* と q^* はそれぞれ次のような特異性を有している。

$$\left. \begin{aligned} u^* &\rightarrow O(\ln r), & (\text{二次元}) \\ &\rightarrow O(1/r), & (\text{三次元}) \end{aligned} \right\} \quad \cdots(3)$$

$$\left. \begin{aligned} q^* &\rightarrow O(1/r), & (\text{二次元}) \\ &\rightarrow O(1/r^2), & (\text{三次元}) \end{aligned} \right\} \quad \cdots(4)$$

以上の特異性はたかだか Cauchy の主値程度である。この特異性のため, 式(2)により内点のポテンシャル(無論フラックスも)を求める際, 点 p が境界に近くなると非常に高次の数値積分が必要となる。この困難を克服するため, 特異積分法としていくつかの巧妙な数値解析手法が開発されている⁽¹⁾⁽²⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾。例えば二次元問題では二重指数関数形積分公式を用いる方法⁽¹⁾⁽²⁾, べき関数写像法⁽⁴⁾ など, 三次元問題では三角形に細分する方法⁽⁵⁾ などである。これらの手法はそれなりに成功をおさめたといえるが, その共通の理由としては, いずれも変数変換(座標変換)により被積分関数の特異性を下げる点にあると思われる。具体的にいえば, べ

き関数写像法と三角形細分法について付録に示すように, これらの手法の適用により, 二次元問題ではたかだか $1/r^n (n < 1)$, 三次元問題では $1/r$ の特異性をキャンセルすることができる。したがって式(1), (2)の右辺第1項の特異性は完全に除去できることになる。

しかし, このような変数変換法では上述したものより高次の特異性をキャンセルすることは一般に不可能であると思われる, 第2項の特異性は完全には除去されない。このため, これらの手法の適用によっても表面のごく近傍でなお精度の低下を免れなかった⁽¹⁰⁾。しかし以上のことからすると, 第2項の特異性を1階だけキャンセルできれば, 前述の特異積分の手法と併用することにより式(1), (2)の被積分関数をすべて正則化できることが示唆される。このことはポテンシャルの相対量を用いることにより可能であり, 以下にその詳細を示す。

2.2 境界積分方程式 Lachat ら⁽⁵⁾ によって初めて利用されたように, 式(1), (2)は領域内すべての点に等しいポテンシャルを与えても成立するはずである。このときフラックスは零となるから, 有限領域問題では次式が成立する。

$$c(P)U = \int q^*(P, Q)U \, ds(Q) \quad \cdots(5)$$

$$U = \int q^*(P, Q)U \, ds(Q) \quad \cdots(6)$$

ここに U はポテンシャルの任意の定数値である。上式(5)は等ポテンシャル条件(弾性問題では剛体変位条件⁽⁵⁾)として知られ, これまで $c(P)$ を与える式として利用されてきた。しかしここでは式(5)を積分方程式の中に組み込んでしまうことを考える。

式(5)において, U は任意の定数値であるから, U としてソース点のポテンシャルを具体的に与え, $U = u(P)$ において式(1)の両辺から差引くと次式が得られる。

$$0 = \int \{-u^*(P, Q)q(Q) + q^*(P, Q)(u(Q) - u(P))\}ds(Q) \quad \cdots(7)$$

一方, 無限領域問題では, 等ポテンシャル条件は式(5)にかわり次式となる。

$$c(P)U = \int q^*(P, Q)U \, ds(Q) + U \quad \cdots(8)$$

したがって有限領域問題と同様に, $U = u(P)$ において式(1)の両辺から差引くと式(7)にかわり次式が得られる。

$$u(P) = \int \{-u^*(P, Q)q(Q) + q^*(P, Q)(u(Q) - u(P))\}ds(Q) \quad \cdots(9)$$

さて式(7), (9)にはソース点のポテンシャル値 $u(P)$ を基準とした相対量 $u(Q)-u(P)$ が現れてくる。本研究では式(1)にかわって式(7), (9)を境界積分方程式として導入する。このポテンシャル相対量は以下に示すように第2項 q^* の特異性を1階だけキャンセルすることができる。ポテンシャル関数は連続関数であるから、 $u(Q)$ はP点近傍でテーラー展開可能で $u(Q)-u(P)$ について次式が成立している。

$$\begin{aligned} u(Q)-u(P) &\cong \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_P dx + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_P dy \\ &\leq \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_P + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_P \right) \sqrt{dx^2+dy^2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(10)$$

すなわち、相対量 $u(Q)-u(P)$ は二次元、三次元にかかわらず点P近傍で次のような漸近特性を持つ。

$$u(Q)-u(P) \rightarrow O(r), \quad Q \rightarrow P \quad \dots\dots\dots(11)$$

したがって核関数 q^* の特異性を1階キャンセルすることができ、式(7), (9)に加えて前述した特異積分法を併せて用いれば、残りの特異性をすべて除去できる。以上により二次元、三次元、あるいは有限領域、無限領域の問題にかかわらず境界積分方程式を正則化することに成功したことになる。

式(1)は当然ながら等ポテンシャル条件の解を含んでおり、Lachatらの用いた等ポテンシャル条件は単に $c(P)$ の計算を省略した意味しか持たない。式(1)のかわりに式(7), (9)を用いるということは、これと同様に積分方程式を位置定数を用いずに表示することにほかならない。したがって従来の方法と式(7), (9)を用いることはまったく等価であって、境界積分方程式を解く段階においては式(7), (9)の特別な意義はないといえよう。このことは2・3節でより明らかとなる。しかし後述するように、式(7), (9)中の相対量が特異性を1階下げた効果は、内点、あるいはフラックスの境界積分方程式に関しても本質的に重要な意義を持っている。

解の一意性については式(1)と式(7), (9)との間で本質的な差異はない。すなわち、有限領域問題の場合は $u(Q)$ が式(1), (7)の解とすれば、 $u(Q)+U$ (U は任意の定数値)も式(1), (7)の解となり、ポテンシャルを指定する境界条件が必ず必要である。一方、無限領域問題では式(1), (9)とも今のことは成立せず、ポテンシャルを指定する境界条件はなくても解は一意に定まる。

2・3 離散化と等ポテンシャル条件 式(7)を離散化すると次式となる。

$$h_1(u_1-u_p)+h_2(u_2-u_p)+\dots=g_1q_1-g_2q_2+\dots$$

$$\therefore h_1u_1+\dots+(-h_1-h_2-\dots)u_p+\dots=g_1q_1+\dots \quad \dots\dots\dots(12)$$

また無限領域問題については式(9)を離散化して

$$h_1u_1+\dots+(-1-h_1-h_2-\dots)u_p+\dots=g_1q_1+\dots \quad \dots\dots\dots(13)$$

となる。ここに h, g は係数マトリックス、添字は節点番号、添字 p はソース節点、したがって対角項を表す。上2式からわかるように、対角項の係数は他の項の係数の総和から求められ(すなわち、係数の総和が有限板では零、無限板では -1)、従来の等ポテンシャル条件(剛体変位条件)として対角項を定める方法と手続き上はまったく変わるところはない。このことは逆にいうと、Lachatらの剛体変位条件で対角項を定める方法は q^* の特異性を1階下げた効果を持っており、このため極めて高精度の結果を与えるものと考えられる。ただし u^* の特異性については影響がなく、他に何らかの特異積分法を併用することが必要なものというまでもない。

2・4 内点の積分方程式 内点のポテンシャルを式(2)により求める場合(フラックスも同様であるが本報ではポテンシャルについてのみ述べる)、式(2)は正則な方程式であるが、内点が境界に非常に近いときは特異に近い状態となり、解の精度が著しく低下する。2・3節までに示したように、境界積分方程式を解く段階では相対量を用いたものと等価な方法(等ポテンシャル条件)が適用されるため式(7), (9)の新たな意義は乏しい。しかしそのような方法が内点のポテンシャルを求める場合にも拡張されていないため、境界積分方程式を解く段階のように内点では高精度の解析結果が得られなかった。しかし相対量表示によれば内点の場合も特異性を1階下げた積分方程式が導かれ、高精度の解析結果を得ることができる。

内点の場合、2・2節と同様に等ポテンシャル条件を適用しても単に式(2)が得られるのみである(すでに $c(p)$ は消去してあるから)。この場合、図1に示すように、内点 p から最も近い境界上の点 P を選び、すでに既知となっている $u(P)$ を基準ポテンシャルとすればよい。すなわち、式(6)において $U=u(P)$ とおき、式(2)から両辺差引くと、有限領域問題では

図1 内点と境界上の点

$$u(p) = \int [-u^*(p, Q)q(Q) + q^*(p, Q)\{u(Q) - u(P)\}]ds(Q) + u(P) \quad \dots\dots\dots(14)$$

となる。また無限領域問題では次式となる。

$$u(p) = \int [-u^*(p, Q)q(Q) + q^*(p, Q)\{u(Q) - u(P)\}]ds(Q) \quad \dots\dots\dots(15)$$

これらが式(2)にかわる相対量を用いた内点ポテンシャルの積分方程式となる。上式のような相対量 $u(Q) - u(P)$ を導入しておけば、点 P と点 p がいくら近付いても $r = \overline{pQ} > \overline{PQ}$ であるから式(10)ないし式(11)の関係は成立し、特異に近い状態となることを避けることができる。

ここでは従来の積分方程式(1), (2)を介して相対量を用いた積分方程式(7), (9), (14), (15)を別々に導いたが、従来の方法にならい、まず内点の式(14), (15)を求め、 $p \rightarrow P$ の極限として境界積分方程式(7), (9)を導くことができるのは無論である。また積分方程式中に位置定数 c が現れず、内点と境界とで積分方

程式が不連続とならない点にも注目すべきであろう。実際、 $p \rightarrow P$ の極限としてみると容易にわかるように、式(2)から式(1)への移行に伴いジャンプが生じるが、式(14), (15)から式(7), (9)への移行は連続的かつ滑らかである。さらに式(7), (9)中の点 P を外点と考えれば、これはそのまま外点に関する積分方程式となり、内点から外点まで滑らかに連続した積分方程式が得られたことになる。このような連続性は次報で述べる境界上のフラックスの積分方程式を導くうえで重要である。

3. 境界要素解析システム

2章で導入した、相対量を用いた積分方程式に基づいて作成した解析システムを簡単に紹介する。前述したように積分方程式を解く段階ではこれまでのプログラム⁽¹⁰⁾をなんら変更する必要はない。内点を計算するルーチンでは相対量の基準点となる境界上の最短点を求める必要がある。しかしもともと内点と要素との距離に応じて特異積分を行うべき状態か否かを調べる必要があり、また Lahhat ら⁽⁵⁾に従いガウス数値積分次数をあらかじめ見積もる必要もあることから、それほど計算時間は増えないですむ。以下に本解析で用いたプログラムの概略⁽¹⁰⁾を説明しておく。

(1) 数値積分にガウス数値積分を用い、必要精度に応じて積分次数を変える方式を採用した。

(2) 特異積分法として二次元ではべき関数写像法、三次元では三角形細分法を用いた。

(3) 二次元では3節点二次要素、三次元では8節点二次要素を用いた。

(4) フラックスの不連続の処理として積分要素パ

表1 図2の解析結果

X (Y=5)	Present Result	Exact Solution
14.9	99.3333335°C	99.3333333°C
14.95	99.6666689	99.6666667
14.99	99.9333267	99.9333333
14.995	99.9666755	99.9666667
14.999	99.9933438	99.9933333
14.9995	99.9966591	99.9966667
14.9999	99.9993376	99.9993333
14.99994	99.9995966	99.9996000
14.99997	99.9997964	99.9998000
14.99999	99.9999361	99.9999333
14.999994	99.9999616	99.9999600
14.999997	99.9999795	99.9999800
14.999999	99.9999925	99.9999933
15	100.000000	100.000000

図2 二次元一様熱流束場の解析モデル

図3 図2の解析結果

ラメータ法⁽¹⁰⁾ ないしはソース点内挿法⁽¹⁰⁾ を用い、二重節点の定義を不要とした。

4. 数値計算例

ここでは簡単な熱伝導問題を解き、相対量を用いた積分方程式による解の精度を従来の積分方程式による解と比較して検証する。解析は離散化誤差のない一様熱流束場とそうでない非一様熱流束場とについて行い、内点から表面までの温度分布の解の挙動を調べた。

表 2 図 6 の解析結果

Z (X=5, Y=5)	Present Results	Exact Solution
9.9	85.8974°C	85.8992°C
9.95	86.2466	86.2497
9.99	86.5439	86.5318
9.995	86.5781	86.5672
9.999	86.5987	86.5955
9.9995	86.6007	86.5990
9.9999	86.6022	86.6018
9.99994	86.6023	86.6021
9.99997	86.6024	86.6023
9.99999	86.6025	86.6024
9.999994	86.6025	86.6025
9.999997	86.6025	86.6025
9.999999	86.6025	86.6025
10	86.6025	86.6025

図 4 二次元非一様熱流束場の解析モデル

図 6 三次元非一様熱流束場の解析モデル

図 2 は二次元の一様熱流束場の問題の解析モデルであり、等長要素で 10 要素、20 節点に要素分割した。内点は図 2 中、破線で示す $y=L$ の線に沿って計算した。この解析結果を図 3 に示す。相対量を用いない場合は、内点の表面からの距離が要素寸法に対し 10^{-4} までは高精度の解が得られているものの、これ以上表面に近付くと解が振動を始め、誤差が大きくなっていく。ただし表面点では正解の $1/2$ となり、誤差はなくなる。一方、相対量を用いた場合は、内点がどんなに表面に近付いても解の乱れはなく、表面点まで高精度の解が得られる。表 1 に相対量を用いて得られた結果を数値的に示すが、離散化誤差がほとんどないため正解と 7~8 けたの範囲で一致している。

図 4 は二次元の非一様熱流束場の解析モデルで、境界条件以外は図 2 とすべて同一モデルである。解析結

図 5 図 4 の解析結果

図 7 図 6 の解析結果

果は図5に示す。解の挙動は一樣流束場の結果とほとんど同様の傾向を示している。

図6は三次元の非一樣熱流束場の解析モデルで、図4のモデルにさらに $y=0$ の面に断熱条件、 $y=L$ の面に対称条件を加え三次元化したものである。一辺の長さが図2, 4の要素と同じ長さの要素により、16要素、59節点に要素分割した。内点の温度分布は図6中A-Aの線に沿って計算した。解析結果を図7に示す。三次元の場合も相対量を用いることによって表面まで高精度の解が得られている。いっぽう、相対量を用いないと表面に近づくにつれ次第に正解から離れ、振動というよりはむしろ正解の50%の値に漸近していくようである。表2に相対量を用いた場合の結果の数値を示しておく。この場合、三次元の非一樣場のため離散化誤差がやや大きく見込まれ、一樣場の結果より精度が落ちるが、それでも正解と3~6けた以上の範囲で一致している。解の精度は表面のごく近傍よりもむしろやや内側、表の数値でいえば $z=9.99$ の付近で最も低下していることが読取れる。

図8は無限領域問題の解析例であり、対称性を利用して、この場合も図8中の破線に沿った温度分布

表3 図8の解析結果

r ($\theta=45^\circ$)	Present Results	Exact Solution
10.1	231.248°C	231.254°C
10.05	230.751	230.757
10.01	230.352	230.358
10.005	230.302	230.308
10.001	230.262	230.269
10.0005	230.257	230.264
10.0001	230.253	230.260
10.00006	230.252	230.259
10.00003	230.252	230.259
10.00001	230.252	230.259
10.000006	230.252	230.259
10.000003	230.252	230.259
10.000001	230.252	230.259
10	230.252	230.259

図8 無限板の熱伝導解析モデル

を求めて解の挙動を調べた。要素分割は4要素9節点とした。解析結果を図9に示す。この場合も結論としては有限領域問題とまったく同じであり、相対量を用いた場合の精度の高さが表面点まで保たれる。表3に解析結果の数値を示しておく。この問題では円弧の形状補間に対して離散化誤差が見込まれるが、正解とは4~5けたの範囲で一致している。

5. 結 言

BEMのはん用システム化と高精度化を進めるうえで積分方程式の特異性の問題は今なお大きな障害となっている。本研究はポテンシャル(弾性問題では変位)の相対量を用いた積分方程式を導入し、特異性の問題の改善方法を提案するとともに、これに伴う一連の考察を行ったものである。以下に主要な結論を列記する。

(1) 相対量を用いた積分方程式は、Lachatらの等ポテンシャル条件(剛体変位条件)を初めから通常の積分方程式の中に組み込むことによって得られる。したがって相対量を用いた境界積分方程式は、従来の境界積分方程式を等ポテンシャル条件を併用して解くこととまったく等価であり、等ポテンシャル値として具体的にソース点の値を与えたことに相当する。

(2) ポテンシャルの相対量はフラックスの核関数の特異性を1階キャンセルし、従来の特異積分法と併用すれば境界積分方程式を正則化できる。また内点が非常に境界に近い場合でも、特異に近い状態となることを避けることができる。

(3) 従来は内点、境界上、外点のポテンシャルに関して、位置定数を定義してそれぞれ互いに不連続となる積分方程式で与えられていたが、ポテンシャルの相対量を用いることにより位置定数が不要となり、内

図9 図8の解析結果

図 10 三角形細分法

点から外点まで連続した積分方程式で与えることができる。

(4) ポテンシャルに関する数値検証例により、従来の積分方程式を用いた場合は境界近傍で解が振動し、大きな誤差を生じることが確かめられた。これに対し、相対量を用いた場合は内点から表面上まで通常のガウス数値積分公式により高精度の解が得られることが確認された。

付 録

ここでは本解析プログラムで用いた特異積分法、すなわち二次元問題ではべき関数写像法⁽⁴⁾、三次元問題では三角形細分法⁽⁵⁾について簡単に記しておく。

(1) べき関数写像

適当に正規化された次のような特異積分を考える。

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x^n} dx \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし n は $n \leq 1$ となる任意の実数、 $f(x)$ は正則な関数とする。上の積分は変数変換

$$x = cz^k \quad \dots\dots\dots (17)$$

により次の積分に変換される。ここに k は任意の実数とする。

$$\int_0^a \frac{f(z^k)ckz^{k-1}}{c^n z^{kn}} dz \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$= \int_0^a \frac{f(z^k)ckz^{k-1-kn}}{c^n} dz \quad \dots\dots\dots (19)$$

ただし a は適当に変換された区間である。変換された積分は z の指数 $k-1-kn$ が正か零であれば特異性が消失することがわかる。このためには $n < 1$ のとき、

$$k \geq 1/(1-n) \quad \dots\dots\dots (20)$$

が成立すればよい。しかし $n=1$ のときは k の値いかににかかわらず z の指数は -1 となり、特異性は消失しない。この方法は計算時間もまったく増えずきわめて効率的な方法であると思われる。

(2) 三角形細分法⁽¹⁰⁾

図 10(a) に示す四辺形においてソース点を P とする。図のように他の 2 点を A, B とし、 $\triangle PAB$ を図 10(b) の線形四角形要素に写像する。写像関係は

$$x = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$y = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここに N は形状関数である。するとヤコビアンは次のようになる。

$$J = (1/8)(1+Y)[X_P(Y_A - Y_B) - Y_P(X_A - X_B)] \quad \dots\dots\dots (23)$$

すなわち、ヤコビアンには特異点からの無次元距離 $1+Y$ が現れる。上記の線形変換によって特異性は変わることはないので、このヤコビアンにより $1/r$ の特異性をキャンセルできることになる。

文 献

- (1) 東町・ほか 3 名, 機論, 51-468, A(昭 60), 1967.
- (2) Jun, L., ほか 2 名, (Brebbia, C. A., ほか 1 名 ed.), *Boundary Elements* VII, (1985), 13-3, Springer-Verlag.
- (3) 例えば文献(1)。
- (4) 結城・佐藤, 生産研究, 39-8(昭 62), 351.
- (5) Lachat, J. C. and Watson, J. O., *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, 10(1976), 991.
- (6) Weaver, J., *Int. J. Solids Struct.*, 13(1977), 321.
- (7) Bui, H. D., *Int. J. Solids Struct.*, 14(1978), 935.
- (8) 木須・ほか 2 名, 機論, 52-480, A(昭 61), 1864.
- (9) 岸田・松田, 機講論 No. 800-10(昭 55-8), 156.
- (10) 結城・木須, 境界要素法による弾性解析, (昭 62), 培風館.

討 論

〔質問〕 東 町 高 雄

〔財〕熊本テクノポリス財団
電子応用機械技術研究所]

BEMの精度向上に関する研究、興味深く拝見した。以下の点についてご教示いただければ幸いである。

(1) 従来の特異積分法と併用されているので、貴法だけの効果が明確でない。相対量だけの導入効果はどの程度か。

(2) 基準ポテンシャルを内点、境界上、外点で使い分けているので、内点から外点まで積分方程式を連続させたことにはならないのではないか。

(3) 内点の場合、境界上の点Pの採り方によって、どの程度精度が変わるのか。

〔回答〕 (1) 従来の特異積分法は u^* の特異性を除去するため、相対量は q^* の特異性を除去するためである。したがって相対量のみでは u^* の特異積分が評価できず、精度は当然低下する。しかし、その低下の程度は大きくない。二次元場について検討するため、図3の問題を解析した結果を付図1に示す。付図1中、 k はべき次数で、 $k=1$ はべき写像を行わない相対量のみ、 $k=2, 4$ の場合はべき写像のみを行い相対量を用いない結果である。これからわかるように、相対量をとれば、べき写像を行わなくてもきわめて高精度である。ただし、 $x=14.9$ における計算値は $99.348\ 529\ 88^\circ\text{C}$ であり、表1の結果($k=4$)と比較するとやはり精度は低下している。

(2) 基準ポテンシャルの位置は、積分経路上においてソース点から最も近い点を探っており、ご指摘のように使い分けているわけではない。なお、外点に関

しては、式(7)、(9)中の $u(P)$ に関する点Pは境界上、 $u^*(P, Q)$ と $q^*(P, Q)$ に関する点Pは境界外にあるソース点と解釈する必要がある。

(3) 内点pと境界上の最短点Pとの距離の程度の範囲であれば、点P以外に基準点を探っても精度にはほとんど影響はなく、それほど基準点の位置に神経質になる必要はない。

〔質問〕 結 城 良 治 [東京大学生産技術研究所]

境界近傍の内点ポテンシャルを高精度かつ効率的に求める新たな技法の開発に敬意を表す。

(1) 図7で境界に近接したポテンシャルは $1/2$ に漸近し、一見数値積分誤差がなくなるように見えるが、この現象をどのように解釈すべきか。

(2) 二次元BEMの相対量を用いない解析では、質問者らが提案しているべき関数写像により特異積分の高精度化を図っておられるが、ここで示している結果は何次の写像を用いたか。また写像なし(一次)、ないし高次にするとどうなるか、資料があれば示していただきたい。

(3) 貴手法と従来行われていた $c(P)$ を補正する方法との相違およびメリットなどをご教示願いたい。

〔回答〕 (1) ご指摘の現象は約50%の誤差を有することを意味しているが、これは以下のように考えられる。

元来、式(1)、(2)の右辺の積分値が、内点→境界に伴い $1 \rightarrow 1/2$ にジャンプするのは、関数 q^* の内点→境界に伴う不連続性が原因である。すなわち、ソース点が内点であれば、図1において $Q \rightarrow P$ に伴い $\partial r/\partial n \rightarrow 1$ となるが、ソース点がPにある場合は $\partial r/\partial n \rightarrow 0$ となる。したがって q^* の積分路に沿う関数形の模式図を描けば付図2のようになり、内点の場合は点P近傍で急激に大きな値となっている(付図2中実線)。これを通常のガウス積分で積分すると、積分点の数が十分でない場合は急激に大きくなる部分が積分値に反映されず、境界上にソース点がある場合(付図2中破線)の値に近い値となる。

(2) 二次元解析に関する各結果はすべて $k=4$ の場合である。 k による影響は相対量を用いない場合顕著で、その様子は付図1に示す。一方、相対量を用いると k の影響はさほど大きくない。図3の問題を $k=2$ で解いた場合、 $x=14.9$ での計算値は $99.333\ 276\ 33^\circ\text{C}$ となった。なお、 $k=1$ の場合は東町氏への回答(1)に記した。また $k=5$ としても顕著な精度の向上は見ら

付図1 図3の解析結果(k の影響)

付図 2 積分路に沿う $q^* = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n}$ の模式図

れなかった。

(3) c を補正する方法とは薦ら(付1)(榎園ら(付2)の方法も同等)の方法と思われる。この方法は、境界近傍の内点においては $c=1$ とせず、 $c = \int q^* ds$ を実際に計算し、得られた値を c の補正值として式(2)右辺の積分値を修正するという方法であり、本方法とは何の関係もない。また、著者(本須)はこの方法は c の補正ではなく、以下のように解釈すべきものであると考える。

式(2)の $\int q^* u(Q) ds$ の積分誤差は、 $u(Q)$ のテーラー展開の高次項を無視すれば $c = \int q^* ds$ の積分の誤差と同程度と見積もられる。すると c を実際に数値積分して誤差(正解は1)を求め、これを用いて式(2)の誤差を修正できる。このためには、(1) u^* の項の誤差が無視できること、(2) c と式(2)の両積分で同一の積分公式、次数を用いること、(3) テーラー展開の高次項の誤差が無視できること、などの条件が必要である。しかし条件(1)、(2)は成立しても(3)は場合により成立せず、薦らの方法は問題により左右されるように思われる。

〔質問〕 田中正隆〔信州大学工学部〕

境界近傍の物理量を境界要素法を用いて精度よく計算する方法について考察されていることに敬意を表する。以下の点につきコメントさせていただく。

積分方程式に現れる発散積分を避けるために相対量を用いるという考えは、質問者の知る限りでは、静弾性問題について Cruse-Vanburen(付3)により初めて与えられた。また、Stern(付4)は同じ考えを板の弾性曲げ問題に用いている。さらに、質問者ら(付5)(付6)は、境界要素法による逆問題解析で現れる同種の発散積分を避けるために相対量を用いる定式化を、Cruse

ら(付3)の論文を引用しつつ与えた。これらの研究は、貴論文のように境界近傍の物理量を精度よく計算することを主目的にしたものではないが、基本的な考え方は貴論文と同じであることを強調しておきたい。貴論文ではこれらの文献が引用されていないので、あえてコメントを加えた次第である。著者らのご意見をお聞かせ願いたい。

〔回答〕 文献のご指摘に感謝する。これらのうち、Cruse ら(付3)の論文は承知している。実は第2報において、表面上の応力(フラックス)の積分方程式についての高精度化に関する論文を投稿予定であるが、この中で引用する予定であった。また他の3個の論文はあまり興味のない分野のことでもあって承知していなかった。以上の論文では目的が異なるとはいえ、相対量のご指摘のとおり特異性を1階下げる方法として使われており、当然本報で引用すべきものであったと考える。ただ、Cruse は特異積分項を相対量そのものでなくこれと等価な微分形で表示しており、表面上の応力の積分表示を求める際に非常に長い面倒な計算過程を要している。一方、相対量そのものの表示からはきわめて簡単に表面応力の積分表示が求まる。このことから相対量そのもので表示することには一つの進歩があるのではないかと考えている。なお、著者らの文献(付7)もここに引用させていただきたい。

〔質問〕 板東 潔〔大阪大学工学部〕

非常に薄い形状、たとえば翼の後縁付近においては、ソース点に対向する要素 i からの誘起ポテンシャルは、式(12)より $h_i(u_i - u_0)$ となる。この場合 h_i の特異性はかなり強く、また一般に $u_i \sim u_0$ ではない。このような形状のものに対しても、本解法により高精度解を得ることは可能か。

〔回答〕 相対量は $1/r \rightarrow \infty$ となる最も大きい特異性を除去するためであり、ご指摘の場合のような強い特異性(擬特異性)をすべて除去できるわけではない。しかし、そのような場合には $1/r \rightarrow \infty$ とはならないので、要素分割を多くしたり積分点を多くすることにより、高精度解を得ることは当然可能である。

(付1) 薦・ほか2名、機講論、No. 800-10 (1980), 104-106.

(付2) 榎園・戸高、電気学会論文誌、A, 106-4 (1986), 149-156.

(付3) Cruse, T. A. and Vanburen, W., *Int. J. Fract. Mech.*, 7-1 (1971), 1.

(付4) Stern, M., *Int. J. Solids Struct.*, 15 (1979), 769.

(付5) Tanaka, M. and Masuda, Y., Yagawa, G. and Atluri, S. N. ed. *Computational Mechanics '86*, 2, (1986), XI-15, Springer-Verlag.

(付6) 田中・山際、機論、54-501, A (1988), 1054.

(付7) Kisu, H. and Kawahara, T., Brebbia, C. A. ed., *Boundary Elements X*, 1, (1988), 111, Springer-Verlag.