高レイノルズ数乱流場の統計的性質*

(第1報, 局所等方性理論の検証)

蒔田秀治*¹, 飯田明由*²Statistical Properties of High Reynolds-Number Turbulent Flow Fields.
(1st Report; Verification of the Theory of Local Similarity.)

Hideharu MAKITA, Akiyoshi IIDA

The local similarity hypothesis was verified in quasi-isotropic turbulent flow fields with turbulence Reynolds numbers of over 3000. The quasi-equilibrium range was known to exist in a turbulence field with turbulence Reynolds numbers of $Re_\tau > 60$. The lowest wave number of the quasi-equilibrium range in the energy spectrum was dependent on T_L/T_0 : the ratio between the time scale of decay of turbulence energy and the characteristic time scale of an energy-containing eddy. Turbulent eddies with characteristic time scales of less than $T_L/4$ were statistically stable. The energy dissipation rate was theoretically determined as $\epsilon = C_1(q^2/2)^{3/2}/l_0$, and the scales of turbulence were estimated from C_1 and Re_λ .

Key Words: Turbulent Flow, Flow Measurement, Fluid Dynamics, Reynolds Number
Turbulent Eddy, Equilibrium Range, Local Similarity Hypothesis.

1. 緒言

乱流場のモデルとして最も成功した例は、Taylorによる等方性乱流の概念⁽¹⁾およびKolmogorovによる局所等方性理論⁽²⁾である。局所等方性理論によればレイノルズ数の十分に大きな乱流中では、乱流エネルギーの大半を保有する低波数領域の渦が非一様、非等方であっても、それらから十分離れた大きな波数領域の渦には影響を及ぼさないため、小さな渦は統計的に独立であるとされている。すなわち非一様乱流や、せん断乱流のようなより一般的な乱流場においても局所的には等方性乱流の理論が適用できることになる。局所等方性理論は波数空間における乱流エネルギーの伝達がカスケード的であることから、エネルギースペクトルの相似性や有名なKolmogorovの $-5/3$ 乗則等を導き、乱流を理解する上での最も基本的な概念の一つとなっている。しかし局所等方性を適用する場合、最大渦に対してどの程度小さな渦が等方的かは明らかでなく、実

際に解析の行われる乱流場の種類によっては対象とした渦スケールが本当に局所等方であるか疑問である場合も多い。

Corrsin⁽³⁾およびStewartとTownsend⁽⁴⁾はスペクトル中に慣性小領域が存在し、波数空間における乱流エネルギー移送が平衡状態に達するのに必要な乱流レイノルズ数を理論的に推定したが、実証されたわけではなく、オーダ的推論にとどまっている。しかし、乱流場の条件を示さずに局所等方性の概念を適用した解析例もあり、そのような解析は乱流の本質的な性質を無視したものとなる恐れがある。したがって、乱流場の解析をより一般的なものにするためにも局所等方の適用条件を明らかにする必要がある。局所等方の適用条件についてあまり検討されてこなかったのは、その数学的および物理的条件を厳密に検証する事が困難であったこと、レイノルズ数が大きい場合、厳密に局所等方性を確かめなくとも一見、実験データに大きな矛盾を生じなかったこと、および、風洞中では局所等方を厳密に調べるのに十分な大きさのレイノルズ数を持った乱流場を実現することが困難であったことなどによる。しかし現在のようにコンピュータが発達し、複雑

* 平成元年4月5日 第66期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和63年10月3日。

*¹ 正員、豊橋技術科学大学(〒440 豊橋市天伯町字雲雀ヶ丘1-1)。

*² 准員、豊橋技術科学大学大学院。

な乱流に対する高度なシミュレーションが行われるようになると、局所等方の概念の適用範囲の検証を行うことは工学的に極めて大きな意味を有する。本研究は局所等方理論の適用条件と局所等方的な渦スケールの大きさを実験および理論的に求め、それらから、局所等方性の概念に対する考察を行った。また等方性乱流場の渦スケールと乱流レイノルズ数の関係についても報告する。

主な記号

- A_0 : 乱流場の大規模構造を表す定数
 C, C', C_1, C_2 : 散逸 ε に関する定数
 k : 波数
 l_0 : 局所等方的な渦スケール
 l_0 : エネルギーを含む渦のスケール
 L_{xx}, L_{yy}, L_{zz} : 主流方向、横方向インテグラルスケール
 M : 乱流発生装置のメッシュ寸法
 m, n : べき指数
 q^2 : 乱流エネルギー ($=u'^2 + v'^2 + w'^2$)
 q_0^2 : 局所等方的な乱流エネルギー
 Re_T : エネルギーを含む渦に基づく乱流レイノルズ数
 Re_L : インテグラルスケールに基づく乱流レイノルズ数
 Re_λ : テイラーのマイクロスケールに基づく乱流レイノルズ数
 T_L : 乱れの寿命時間
 T_0 : 局所等方的な渦の特性時間
 T_0 : エネルギーを含む渦の特性時間
 U_c : $X/M=120$ における主流方向平均流速 (代表速度)
 u_1 : 特性速度 ($=\sqrt{q^2/3}$)
 u', v', w' : X, Y, Z 方向速度変動成分のRMS値
 X, Y, Z : 主流方向、鉛直方向、水平方向座標
 α : 3次元Kolmogorov定数 (1.94)
 ε : エネルギー散逸率 ($=dq^2/2dt$)
 η : Kolmogorovの散逸スケール ($=(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$)
 λ : Taylorのマイクロスケール ($=\sqrt{15u'^2\nu/\varepsilon}$)
 ν : 動粘性係数

2. 実験装置および乱流場の性質

著者らは小型風洞中 (測定胴長さ6m、断面積0.7×0.7 m²) に乱れ強度10%以上、一様性および等方度が格子乱流場と同程度の準等方性乱流場を実現することが可能な乱流発生装置を開発し、高乱流レイノルズ数乱流場の統計的性質に関する研究を続けてきた。^{(5)~(8)}

本研究の実験データは、それらの一連の研究から得られたものである。乱流発生装置によって得られた乱流渦 (Turbulent eddy) の最大スケールは同程度の格子サイズの乱流格子を用いた乱流場の場合の数倍の大きさであり、乱流レイノルズ数はエネルギースペクトル中に2桁以上の波数領域に渡って慣性小領域が存在する $Re_L > 3000$ (または $Re_L > 200$) 以上である。したがって格子乱流場に比べ”大規模な乱流場”であると言える。以後、本論文では、主にこの乱流場に関する考察を行い、この乱流場を”本乱流場”と呼ぶ。乱流発生装置および乱流場の基本的性質の詳細については上記の文献を参考にされたい。

3. 渦のヒエラルキー的構造について

3.1 普遍平衡の条件 Bradshaw⁽⁹⁾ はKolmogorov普遍定数が一定になるレイノルズ数から慣性小領域の存在条件を推定したが、彼の論文の主目的はスペクトルから散逸 ε を決定することであり、必ずしも慣性小領域の存在条件を決定するものとして適切なものではない。Batchelor⁽¹⁰⁾ は乱流場が局所一様、等方であるためには、最大渦と最小渦の比が十分大きくなくてはならないことから、局所等方性が成り立つには乱流レイノルズ数が $Re_T^{3/4} = (u l_0 / \nu)^{3/4} \gg 1$ を満たさなくてはならないとしたが、1より”十分大きい”という事の数値的な解釈は実験的に求めるしかないと考えていた。本乱流場の実験から慣性小領域が少なくとも2桁程度の波数領域に渡って存在するには $Re_L > 3000$ (または $Re_L > 200$) の条件を満たさなければならない。これはCorrsin⁽³⁾ の推定値 $Re_L > 4000$ ($Re_L > 250$) に近い値である。StewartとTownsend⁽⁴⁾ の計算では $Re_L > 18500$ ($Re_L > 1730$) であるが、本乱流場の測定結果などはこれほど乱流レイノルズ数が大きくなくとも慣性小領域が存在することを示しており、Stewartらの条件は必ずしも満たさなくともよいと考えられる。

薛田ら⁽¹¹⁾ はエネルギーを含む渦 l_0 を測定可能な流れ方向および鉛直方向の積分特性距離 $L_{xx}, 2 \times L_{yy}$ ($=2 \times L_{zz}$) を長軸、短軸とする回転楕円体と同一の体積を持つ球体の直径であると仮定し、

$$l_0 = 0.82 \sim 0.95 L_{xx} \quad (1)$$

となることを示した。Batchelor⁽¹⁰⁾ によれば、等方性乱流では、 l_0/L_{xx} は1のオーダーである。また、慣性小領域が存在するためには平衡領域が存在するために必要なレイノルズ数の自乗程度のレイノルズ数が必要であるから、平衡領域が存在し乱流場が局所一様、局所等方であるためにはエネルギーを含む渦をもとにした乱流レイノルズ数 $Re_T = (u l_0 / \nu) \sim Re_L > \sqrt{3000}$

$\approx 55 \sim 60$ でなければならない。StewartとTownsendは $Re_\tau = 60 (Re_\lambda = 30)$ ではKolmogorovスケール(最小渦) η が統計的に安定であることを示した。 η より小さな渦に対しては粘性による影響が大きくなり、乱流の本質的な性質である慣性による影響が小さくなるため、 η より大きな渦が統計的に安定な場合を乱流中に平衡領域が存在するとすれば、 $Re_\tau \sim 60$ が乱流中に統計的に安定な渦の存在するための条件であると考えられる。

Frischら⁽¹²⁾と同様に乱流場が離散的な渦の集合からなり、波数空間で1オクターブごとにほぼ同一の特性を持つヒエラルキ的な構造を持つならば、第*i*世代の渦のスケールは $l_i = 2^{-i} l_0$ であらわせる。平衡領域が存在する $Re_\tau \sim 60$ では3-3節で述べるように $l_0/\eta \sim 2^4$ であるから $l_0 \sim \eta$ の間に4世代程度の渦が存在すると考えられる。平衡領域が存在するためには、大きな渦に含まれる乱流エネルギーが粘性によって熱にかえられるまでに少なくとも4世代以上に渡ってエネルギー伝達が行われなければならない事がわかる。

3.2 エネルギー散逸 一様な乱流場のエネルギー散逸 ε は、速度変動成分 u_i を用いて、

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} \frac{d \overline{u_i u_i}}{dt} = \nu \frac{(\partial u_i \partial u_i)}{(\partial x_i \partial x_i)} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2)$$

と定義される⁽¹⁰⁾。ここで $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w, x_1 = X, x_2 = Y, x_3 = Z$ である。Schedvinら⁽¹³⁾によれば、散逸 ε を速度変動を直接微分して求める方法は、プローブ

表1. 乱流エネルギーの減衰率

U_c (m/s)	1	3	5	7	X/M
n	1.01	0.78	0.66	0.58	< 40
	1.35	1.31	1.23	1.21	> 40

注：乱流エネルギーの減衰は $q^2 \propto (X/M - X_0/M)^{-n}$ と表せる⁽¹¹⁾。ただし、 n の値は $X/M \sim 40$ 付近を境に変化する。

図1. 散逸 ε の下流方向変化
△: 1m/s, □: 3m/s, ○: 5m/s, ◇: 7m/s

の空間分解能の影響および微分による不確かさのため十分な精度を持たない。

一般に等方性乱流場では、乱流エネルギーが下流方向距離 X の n 乗に比例して減衰すると仮定し、散逸 ε を次式を用いて求めることが多い。

$$\varepsilon = \frac{n U q^2}{2(X - X_0)} \quad (3)$$

ただし X_0 は仮想原点である。本乱流場や格子乱流場では n は下流方向に一定ではないが、局所的には乱流エネルギーは下流方向距離の n 乗に比例して減衰するとみなせる。また本乱流場の仮想原点は0である。

(3)式から散逸 ε を求める方法は微分を行わずに良いため精度がよくなる⁽¹¹⁾が、等方性乱流場と同様な減衰特性を持つ乱流場にしか適用できないため、常に(3)式を適用することができるわけではなく、大気乱流場等では ε の計算に(2)式を用いるため十分な精度で ε を求めることが難しかった。本乱流場は減衰特性が格子乱流場とほぼ同じであり、また風洞実験であるため測定上の制約が少なく、再現性もよいため、大気乱流の実験に比べより正確な ε の決定が行なえる。

図1に(3)式より求めた散逸 ε を示す。エラーバーは(2)式から求めた値であり $X/M > 40$ では(3)の結果と良く一致する。また、次報に示すエネルギー散逸スペクトルを全波数空間で積分して求めた ε の値も(3)式より求めた値とよく一致する。

カスケードモデルによれば高波数領域のスペクトル成分は低波数領域に存在する非一様性、非等方性の影響を受けない。乱流場の各世代の渦は、渦スケールに比例した大きさの自己を調整するのに必要な固有の時定数⁽¹⁰⁾(渦の特性時間)を持っており、大きな渦の特性時間は小さな渦の特性時間に比べ十分大きく、大きな渦は小さな渦からみると定常的なエネルギー供給源とみなせる。また小さな渦は特性時間が短く、大きな渦からほぼ定常的なエネルギーの供給を受けるため自己を再調整し統計的に安定な状態に達する。したがって高波数のエネルギースペクトル分布関数は普遍的な形を持ちうると考えられている。

Frischら⁽¹²⁾と同様に各世代の時定数、特性速度を

$$T_i \sim l_i / v_i \quad (4)$$

$$v_i^2 = \int_{k_i}^{k_{i+1}} E(k) dk$$

とおくと、 l_i のスケールの渦に単位時間当りに流れ込むエネルギーは、次式のように表せる。

$$\Delta E_i \sim v_i^2 / T_i \quad (5)$$

慣性小領域でのエネルギー伝達量 ΔE は散逸 ε に等しいから、(4)、(5)式より、

$$\varepsilon \sim v_i^3 / L_i \quad (6)$$

となる。(6)式は基本的には1935年にTaylor⁽¹¹⁾が実験的に導いた式であり、高レイノルズ数乱流場のエネルギー散逸は動粘性に依存せず、渦スケールと乱れ強度に依存することを示している。TennekesとLumley⁽¹⁴⁾は(6)式は高レイノルズ数乱流場の最も基本的な仮定であり、乱流解析の基礎をなす重要な式であると述べている。BatchelorとTownsend⁽¹⁵⁾およびComte-BelloteとCorrsin⁽¹⁶⁾は(6)式より散逸は近似的に、

$$\varepsilon = C \frac{(3u^2/2)^{3/2}}{l_0} \quad (7)$$

と表せる事を示した。ここでCは無次元定数である。本乱流場や格子乱流場の u^2 と l_0 はそれぞれXの-n, m乗で変化する⁽⁶⁾⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾から、Cが下流方向に一定であるためには、 $n+2m=2$ でなければならない。本乱流場ではほぼ等方的とみなせる $X/M > 40$ においては、表2に示すように $n+2m < 2$ となるが、図2に示すように(7)式から求めた定数Cの値は各流速について、下流方向にほぼ一定であり、(7)式が近似的に成立することがわかる。Rotta⁽¹⁸⁾はCは Re_λ の関数であり、 Re_λ の増加にともなって減少し、 Re_λ が非常に大きい場合、次式で表せる事を示した。

$$\lim_{Re_\lambda \rightarrow \infty} C_\kappa = \left(\frac{A_\sigma}{0.998} \cdot \frac{18}{55\alpha} \right)^{3/2} \quad (8)$$

表2. 散逸に関する経験定数

U_c (m/s)	C	A_σ	C_κ	C_c	$2m+n$	α
1	0.673	0.630	0.182	0.199	1.99	1.95
3	0.482	0.635	0.222	0.213	1.77	1.87
5	0.439	0.673	0.197	0.192	1.61	2.00
7	0.489	0.746	0.244	0.203	1.47	1.93
(Average)	0.522	0.685	0.211	0.201	1.70	1.94

注: C_κ , C_c はそれぞれ $Re_\lambda \rightarrow \infty$ としたときのRotta⁽¹⁸⁾, Corrsin⁽¹⁶⁾の計算値を示す。Cは各流速における平均値を表す。

図2. 経験定数Cの下流方向変化
▲; 1m/s, □; 3m/s, ●; 5m/s, ◇; 7m/s

ここで A_σ は大規模運動の構造に依存する定数であり、 $r \ll L_0$ の時、縦相関関数 $R_{0,x}$ と次式の関係がある。

$$R_{0,x} = 1 - A_\sigma (r/L_0)^{2/3} \quad (9)$$

本乱流場の A_σ は表1に示すように0.6~0.8である。また α は3次元Kolmogorov普遍定数である。等方性の仮定から1次元Kolmogorov普遍定数 $\alpha_1 = (18/55)\alpha$ であるから、著者が1次元エネルギースペクトルより実験的に求めた $\alpha_1 = 0.64$ ⁽⁸⁾より $\alpha = 1.94$ とした。 $A_\sigma = 0.6 \sim 0.8$, $\alpha = 1.94$ を(8)式に代入することにより、表1に示すように $C_\kappa = 0.18 \sim 0.24$ を得た。

Corrsin⁽¹⁹⁾は Re_τ が無限大の時、乱流エネルギーの大部分は乱流エネルギーの大部分を含む渦スケールに相当する波数 k_0 から、Kolmogorovスケールに相当する波数 k_0 の範囲にあると仮定し、 $C_c = (3\alpha/2)^{-3/2}$ であることを示した。 $\alpha = 1.94$ より $C_c \sim 0.201$ である。

本研究ではCをレイノルズ数の関数として求めるためCorrsinの方法を拡張し、スペクトルをHeisenbergの近似式⁽²⁰⁾を用いて積分しCを求めた。Heisenbergの近似式は粘性散逸領域では必ずしもよい近似を与えるものではないが、粘性散逸領域の全波数領域の寄与はあまり大きくないため、乱流場全体を考える場合、比較的よい近似式であると考えられる。

$$q^2/2 = \int_0^\infty \alpha \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} [1 + \sigma(k\eta)^4]^{-4/3} dk \quad (10)$$

ここで $\sigma = 3.375\alpha^3$ である。積分範囲を波数 $k_0 \sim k_s = \sigma^{-1/4}/\eta$ および $k_s \sim \infty$ までの2つの領域にわけ、 $k_0 \sim k$ ($\lim(k) \rightarrow k_s$)の範囲では $\sigma(k_s\eta)^4 < 1$ であり、(10)式はマクローリン展開可能である。ゆえに、

$$\begin{aligned} & \int_0^{k_s} \alpha \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} [1 + \sigma(k\eta)^4]^{-4/3} dk \\ &= [1 + \sigma^{1/4} (l_0/\eta)^{-2/3} (\sum \rho_n) - \sum \chi_n (l_0/\eta)^{-4n}] \\ & \times \frac{3}{2} \alpha \varepsilon^{2/3} l_0^{2/3} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \rho_0 &= -1, & \chi_0 &= 0 \\ \rho_n &= \frac{1}{(6n-1)} \binom{-4/3}{n}, & \chi_n &= \frac{\sigma^3}{(6n-1)} \binom{-4/3}{n} \end{aligned}$$

ただし

$$\binom{j}{n} = \frac{j(j-1)(j-2)\cdots(j-(n-1))}{n!}$$

である。(10)式より $k > \sigma^{-1/4}/\eta$ の領域では近似的に $E(k) = \alpha \varepsilon^{2/3} \sigma^{-4/3} \eta^{-16/3} k^{-7} = \omega k^{-7}$ であるから、

$$\begin{aligned} \int_{k_s}^\infty \omega k^{-7} dk &= [(1/9) \sigma^{1/4} (l_0/\eta)^{-2/3}] \\ & \times \frac{3}{2} \alpha \varepsilon^{2/3} l_0^{2/3} \end{aligned} \quad (12)$$

と表される。(10)式に(11)式、(12)式および $\Sigma \chi_n \sim -1.1789$ を代入すると、

$$q^2/2 = [1 - 1.067 \sigma^{1/6} (l_0/\eta)^{-2/3} - \Sigma \chi_n] \times \frac{3}{2} \alpha \varepsilon^{2/3} l_0^{2/3} \quad (13)$$

ここで、 l_0/η が十分大きければ $\Sigma \chi_n \sim 0$ である。

$\sigma^{1/6} = 1.225 \alpha^{1/2}$ を代入して、

$$q^2/2 = [1 - 1.307 \alpha^{1/2} (l_0/\eta)^{-2/3}] \frac{3}{2} \alpha \varepsilon^{2/3} l_0^{2/3} \quad (14)$$

となる。ゆえに散逸 ε は

$$\varepsilon = C_c (1 - 1.307 \alpha^{1/2} (l_0/\eta)^{-2/3})^{-3/2} \frac{(q^2/2)^{3/2}}{l_0} \quad (15)$$

と表せる。理論計算による定数 C を C_1 とすると、

$$C_1 = C_c (1 - 1.307 \alpha^{1/2} (l_0/\eta)^{-2/3})^{-3/2} \quad (16)$$

となる。 $Re_\tau \rightarrow \infty$ では、 $(l_0/\eta)^{-2/3} \sim 0$ となりCorrsinの式と一致する。(15)式より $C_1 < 0$ のとき $\varepsilon < 0$ になるが、乱流エネルギーは粘性により必ず熱に変換されること、および非粘性散逸が存在すること⁽²¹⁾から、3次元乱流場では散逸 ε は常に正であり、 C_1 も常に正となる。したがって(15)式は $l_0/\eta < 2.45$ の場合、物理的には意味を持たない。しかし、(15)式が適用できるのは、少なくともエネルギースペクトル中に平衡領域が存在する程度の乱流レイノルズ数を持った乱流場であり、平衡領域が存在する $Re_\tau > 60$ では、 $l_0/\eta > 2^4$ であるから、そこでは常に $C_1 > 0$ となる。

C_1 と格子乱流場^{(15)(16)(22)~(25)}および強い乱流場の実験結果から求めた C の値を図3に示す。一点鎖線と二点鎖線はそれぞれCorrsinによる計算とRottaの計算により求めた $Re_\tau \rightarrow \infty$ における C の漸近値である。

慣性小領域はエネルギーを含む渦に相当する波数 k_0 から $k_0 \sim 1/(8\eta)$ の波数に渡って存在すると考えられる⁽²⁶⁾。したがって、レイノルズ数が非常に大きければ、乱流エネルギーのほとんどは慣性小領域内にあると考えられる。 $k_0 \sim k_0$ の範囲で(10)式を積分し、(15)式と同じ形に整理し、 C の値($=C_2$)を求めると、

$$C_2 = C_c (1 - 4 (l_0/\eta)^{-2/3})^{-3/2} \quad (17)$$

となる。 C_2 の計算結果を図3に破線で示す。 C_1 と C_2 の違いはエネルギースペクトルに対する散逸領域の寄与の見積り方であり、慣性小領域がエネルギースペクトルの大部分を占めるとき、 C_1 と C_2 は一致する。図3に示すように C_1 と C_2 の差は通常の格子乱流場の乱流レイノルズ数の範囲($Re_\tau = 60 \sim 600$)では10~20%程度あるが、著者らの示した慣性小領域の存在条件⁽⁸⁾である $Re_\tau \sim 3000$ に相当する $l_0/\eta = 380$ では1%以下になり、ほぼ一致する。本研究で提言された慣性小領域の存在

条件($Re_\tau > 3000$)および平衡領域の存在条件($Re_\tau > 60$)が妥当なものであることがわかる。大気乱流場におけるレイノルズ数⁽²⁷⁾($Re_\tau > 1000$ 程度)およびStewartとTownsendが示した十分広い波数領域に渡って慣性小領域が存在する条件 $Re_\tau > 1730$ では C_1 と C_2 の差はほとんど見られない。

実験的に求めた C の値は本乱流場だけでなく格子乱流場等の場合を含め計算結果に比べ大きいのが、これらは低波数領域における異方性の影響によるものと考えられる。本解析では乱流エネルギーはエネルギーを含む渦 l_0 にほとんど全てのエネルギーが集中しているとし、より小さな波数領域における非平衡状態の影響を無視しているが、次報で示すように、本乱流場のエネルギーを含む渦のもつエネルギーは全乱流エネルギーの約80%程度であり、エネルギーを含む渦は、より低波数領域の非平衡状態の渦の影響を受け、必ずしも統計的に独立ではない。また、主として低波数領域に含まれる非等方的な20%以上のエネルギーは各成分間でエネルギー交換を行いながら減衰するため等方性乱流場に比べ複雑である。したがって、実際の乱流場では C と C_1 は完全には一致しないが、定性的にはほぼ一致していると言える。このことはレイノルズ数が十分大きければ異方性乱流やせん断乱流場であっても粘性散逸 ε を q^2 と l_0 だけの関数として表すことが可能であることを意味している。本乱流場は通常の格子乱流場に比べ、異方性がやや大きい⁽⁵⁾($u'/v' = 1.25 \sim 1.30$)が、乱流レイノルズ数が大きいため、局所等方とみなせる

図3. C の乱流場のスケールに対する依存性($C > 0$)

本実験結果, C : $\triangle$; $U_c = 1\text{m/s}$, $\square$; 3m/s , $\circ$; 5m/s , $\diamond$; 7m/s .
 本実験結果, C_2 : $\blacktriangle$; $U_c = 1\text{m/s}$, $\blacksquare$; 3m/s , $\bullet$; 5m/s , $\blacklozenge$; 7m/s .
 $\square$: Batchelor & Townsend⁽¹⁵⁾, $\triangle$: Comte-Bellot & Corrsin⁽¹⁶⁾
 $\diamond$: Gad-el-Hak & Corrsin⁽²²⁾, $\circ$: Kistler & Vrebalovich⁽²³⁾
 $\bullet$: Van Atta & Chen⁽²⁴⁾, ∇ : Uberoi⁽²⁵⁾, $\cdots$: Rotta⁽¹⁸⁾
 —: C_1 , (16)式, $\cdots$: C_2 , (17)式, $\cdots$: Corrsin⁽¹⁹⁾

波数領域は格子乱流場よりも広く、局所等方的な領域内の渦スケールおよび乱流エネルギーをもとにした係数 C は、 C_1 の値と一致することが予想される。

Batchelor⁽¹⁰⁾によればエネルギーを含む渦の特性時間および乱流エネルギーの寿命時間はそれぞれ、

$$T_0 = l_0 / u, \quad T_L = u_1^2 / (-du_1^2/dt) \quad (18)$$

で表される。(7)式に(18)式を代入すると、

$$T_L/T_0 = (\sqrt{2/3})/C \quad (19)$$

となり、エネルギーを含む渦の特性時間は乱流エネルギーの寿命時間に比例することがわかる。

本乱流場の C の値は0.4~0.7程度であり、 $T_L/T_0=1.1\sim 2$ となる。通常の格子乱流場の場合、 $T_L/T_0=0.8\sim 1.25$ 程度⁽¹⁰⁾⁽¹⁶⁾であるから、本乱流場の T_L/T_0 は格子乱流場の場合よりはやや大きい。しかし、乱れの寿命はエネルギーを含む渦の寿命と同程度であり、エネルギーを含む渦の減衰は乱れの減衰そのものであることがわかる。したがって、Batchelorが述べているようにエネルギーを含む渦と同程度か、より大きな渦は統計的に安定な状態に達するのに十分な時間を持ち得ない。しかし、乱れの寿命時間に比べ十分小さな特性時間を持ったより高波数領域の渦は統計的に安定であると言うことができる。

(16)式より $Re_\tau \rightarrow \infty$ (すなわち $l_0/\eta \rightarrow \infty$)の時、 $C_1 \sim 0.2$ である。このときは、ほとんど全ての波数領域に渡って平衡状態にある極限の場合と考えられるから、等方性乱流場の場合(19)式の C に C_1 を代入すると、 $T_L/T_0 \sim 4$ 程度と考えられる。すなわち、エネルギーを含む渦が平衡状態に達するには乱れの寿命が渦の特性時間の約4倍は必要である。逆に乱れの寿命時間の約1/4以下の特性時間を持つ渦は統計的に安定であるとも言える。 C_1 と C_2 の比較から乱流レイノルズ数 $Re_\tau > 20000$ では、等方性乱流の場合、ほとんど全ての渦が平衡状態にあると見なせると考えられるが、工学的な対象となる乱流場では、スペクトルの低波数領域に見られる異方性により、理論計算よりもさらに小さな渦でなければ統計的に安定ではないため、 C_1 と実験値 C に差が生じる。統計的に安定とみなせるようになる渦の特性時間 T_0 は T_L の約1/4であるとすれば、(19)式より

$$T_0/T_L = (4/\sqrt{2/3})C \quad (20)$$

となる。また(4)、(6)式より渦のスケールは特性時間の3/2乗のオーダーであるから、統計的に安定な渦スケール l_0 とエネルギーを含む渦 l_e の比は(20)式より

$$l_0/l_e \sim (T_0/T_L)^{3/2} = (4C/\sqrt{2/3})^{3/2} \quad (21)$$

程度であると考えられる。本実験や格子乱流の場合、 $C=0.4\sim 1$ より $l_0/l_e=3\sim 10$ となる。

表3. 局所等方領域における乱流エネルギーとスケール($X/M=50$)

U_c (m/s)	q_0^2/q^2	l_0/l_e	C'	$\bar{C}'$	C_1
1	0.30	7.80	0.614	0.210	0.231
3	0.50	3.73	0.365	0.238	0.211
5	0.58	3.36	0.308	0.236	0.208
7	0.60	3.78	0.282	0.205	0.207

(5)式から求めた局所等方的な渦スケール l_0 と、それに含まれる乱流エネルギー q_0^2 を(7)式に代入した場合の定数 C を C' とする。表2に示すように q_0^2 は q^2 の約30~60%である。 C' は C よりは C_1 に近いが、 C_1 よりやや大きく、厳密には l_0 は局所等方ではない。しかし、局所等方的な渦スケール l_0 より小さく、(6)式が成立すると考えられる8 η 程度の渦スケールより大きな渦スケールと、そのような渦に含まれる乱流エネルギーを(7)式に代入して求めた局所等方的とみなせる領域での定数 C' の平均値 $\bar{C}'$ は、図3(黒印)に示すように C_1 とほぼ一致し、弱い異方性を持った乱流場の ε は等方性乱流場の関係式である(15)式によって近似的に表せることから、スケール l_0 の渦は局所等方であると見なすことができる。上記の事柄に関する実験的な検証および q_0^2 の求め方については、次報において3次元エネルギースペクトル等の測定と合わせて報告する。

通常の格子乱流場($30 < Re_\tau < 100$)では $C=0.6\sim 1$ 程度であるから、(17)式より局所等方領域 G はエネルギーを含む渦の約1/5~1/10程度の直径の球の内側であると推定される。格子乱流場の乱流レイノルズ数の範囲では $l_0 \sim 2^{4\sim 7} \eta$ であるから l_0 は η の2~25倍程度の大きさである。空気流では η は0.2mm程度であるから、局所等方的な渦のスケールは大きくとも5mm程度であり、通常の熱線(直径5 μ m、長さ1mm程度)を用いて乱流場を測定し、周波数解析を正確に行う事はかなり困難である。本乱流場のように2桁程度の波数領域に渡って慣性小領域が存在するのに十分な乱流レイノルズ数をもつ乱流場($200 < Re_\tau < 1000$)の場合、 $l_0/l_e \sim 4$ 、 $l_0 \sim 2^{8\sim 12} \eta$ であるから、 $l_e \sim 2^{6\sim 10} \eta$ 、すなわち、少なくとも最小渦の50倍以上のスケールの渦は統計的に安定である。 η は格子乱流場と同程度であるから、数センチのオーダーのスケールの渦は統計的に安定であり、本研究に用いたプローブの空間分解能0.2 $\times$ 0.8 $\times$ 0.8mm³に対して十分な大きさを持つ事がわかる。

$Re_\tau \sim 60$ (または $Re_\tau = 30\sim 35$)は平衡領域が存在する下限であると考えられるが、乱流レイノルズ数が小さい場合、図3より C が大きくなり、(21)式より非常に小さな渦においてのみ平衡領域が存在することになる。Kolmogorovスケールより極端に小さな渦は一般に乱流

として考えないから $Re_\tau = 30$ 付近において平衡状態が観測されないことになる。しかし、GibsonとShwarz⁽²⁸⁾が格子乱流場のようにエネルギー領域と散逸領域があまり離れておらず、局所等方性理論の要請と反すると考えられる場合でもスペクトル分布の普遍性が統計的な許容範囲内で保証され、局所等方性理論が現象の記述に対して有効な手段であることを示していることや、StewartとTownsendが $Re_\tau = 30$ のとき、波数 $1/\eta$ の渦は近似的に安定とみなせる事を示している事などから、平衡領域が η より小さな渦にしか存在しないとしても、 η 程度の渦の平衡状態からのずれは極わずかであり、 η と同程度の渦を近似的に平衡状態とみなしても大局的には問題はないと考えられる。平衡領域の存在条件に対する議論より、実験的な乱流解析の最も基礎をなす格子乱流場はエネルギースペクトルの自己相似的な振る舞いを実証するための最低限の乱流レイノルズ数を持っているが、慣性小領域を持った乱流場を作ることは極めて大型の風洞を用いないかぎり困難である事を示している。このことは、通常の格子乱流場は乱流場の自己相似性を実証するうえで極めて優れた乱流場であったことを示すとともに格子乱流場による実験的な乱流解析の限界も示している。乱流発生装置により発生した乱流場は慣性小領域が存在するのに十分な乱流レイノルズ数を持ち実験的な乱流解析に関する新たな可能性を見いだすものと考えられる。

3.3 乱流レイノルズ数と渦のスケール 乱流レイノルズ数は乱流場の規模を表すものであり、それから乱流場の各スケールが推定できる。等方性乱流では散逸 ϵ は、

$$\epsilon = 15 \nu u_1^2 / \lambda^2 \quad (22)$$

と書ける⁽²⁹⁾、(7)式を代入して、

$$\begin{aligned} Re_\tau &= B_\tau \cdot Re_\lambda^2 \\ l_o / \lambda &= B_\lambda \cdot Re_\lambda \\ l_o / \eta &= B_\eta \cdot Re_\lambda^{3/2} \end{aligned} \quad (23)$$

ここで B_τ 、 B_λ 、 B_η はそれぞれ (15) 式と (23) 式から以下のように表される定数である。

$$\begin{aligned} B_\tau &= 1 / (15 \alpha^{3/2}) f(l_o / \eta) \\ B_\lambda &= 1 / (15 \alpha^{3/2}) f(l_o / \eta) \\ B_\eta &= 1 / (7.62 \alpha^{3/2}) f(l_o / \eta) \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、 $f(l_o / \eta) = (1 - 1.307 \alpha^{1/2} (l_o / \eta)^{-2/3})^{-3/2}$ である。 $Re_\tau \rightarrow \infty$ の時、 $f(l_o / \eta) = 1$ である。Hinze⁽²⁹⁾ は次元解析により B_τ 、 B_λ 、 B_η を、それぞれ 0.067、0.067、0.131 としている。

図4(a)~(c)に(23)式の関係を調べた実験結果を示す。各図において破線は(24)式から求めた係数を(23)式に代入して求めた計算値、一点鎖線はHinzeの係数

をもとにして求めた値である。本乱流場の実験結果から決定した(23)式の各係数の値は、

$$\begin{aligned} B_\tau &= 0.0625 \\ B_\lambda &= 0.0625 \\ B_\eta &= 1/8.65 = 0.116 \end{aligned} \quad (25)$$

である。図中の実線は(25)式に示す係数に、修正係数 $f(l_o / \eta)$ を掛けて求めた計算値である。(25)式は高レイノルズ数のものであり、レイノルズ数の低いところでは修正が必要である。 $C_1 (= C_\epsilon \cdot f)$ と C が定性的に一致することから、関数 f は乱流場の性質を定性的にはよく表しており、実験値と関数 $f(l_o / \eta)$ を用いて乱流場スケールの関係をうまく表すことが可能であると考えられる。

Re_τ の Re_λ の依存性を図4(a)にTatsumiとKida⁽³⁰⁾の

図4(a) Re_τ の Re_λ 依存性

▲: 1m/s, □: 3m/s, ●: 5m/s, ◇: 7m/s
: (23)式, ---: Hinze⁽²⁹⁾, ----: Tatsumi & Kida⁽³⁰⁾
 —: 実験値を関数 f を用いて修正した結果

図4(b) l_o / λ の Re_λ 依存性

▲: 1m/s, □: 3m/s, ●: 5m/s, ◇: 7m/s
: (23)式, ---: Hinze⁽²⁹⁾, ----: Tatsumi & Kida⁽³⁰⁾
 —: 実験値を関数 f を用いて修正した結果

図4(c) l_0/η の Re_λ 依存性

▲: 1m/s, □: 3m/s, ●: 5m/s, ◇: 7m/s
: (23)式, —: Hinze^(2.9)
: Driscoll et al.^(3.1) ($\alpha=1.6$)
 —: 実験値を関数 f を用いて修正した結果

修正キムラント理論による計算結果 ($B_r=2.6\sim 2.8$, 2点鎖線) を合わせて示す。 B_r は本実験の結果とやや異なるが、その差はそれほど大きくはなく、Hinzeの結果ともよく一致することから(23)、(25)式より一般に大気乱流や工学的な乱流場では測定が困難であるとされている Re_τ を Re_λ の関数として推定する事が可能であると思われる。

図4(b)に示すように l_0/λ の Re_λ の依存性の実験結果はHinzeの式と比較的よく合う。(24)式と実験結果は Re_λ が小さくなると直線から上方にずれる傾向は一致するが、(24)式の値は実験値より小さい。(24)式と(25)式が一致するには、(24)式よりKolmogorov普遍定数を1と見なさなくてはならないが、Kolmogorov普遍定数の信頼のおける実験値は1.7~2.0程度であり⁽⁸⁾ 実験と計算の間に差が生じる主な理由は不明である。図4(c)に l_0/η の Re_λ 依存性を示す。Driscollら^(3.1) の計算結果 ($B_r=0.114$) を2点鎖線で示す。Driscollらの計算でも $Re_\lambda < 100$ では修正が施されており、本研究の結果とはほぼ一致する。したがって、準等方性乱流場では乱流レイノルズ数 Re_λ から l_0/η を求めることができるため定数 C_l は Re_λ の関数とみなせる。(24)式はやや実験と異なったが、(25)式は等方性乱流場のスケールとレイノルズ数の関係をを比較的よく表している。先述したように大気乱流や工学装置内部の複雑な乱流場では乱流レイノルズ数 Re_τ や l_0 等を求めることが困難である事も多く、特に、大気乱流中の最大渦やエネルギー散逸等の正確な測定は困難である。そのような乱流場では等方性が常に保証されているわけではなく、等方性を仮定した(25)式を用いて Re_λ から Re_τ や、各ス

ケールを求めることは、まだ多くの問題を含んでいるが、工学的にはオーダーさえわかれば良い場合も多く、慣性小領域が存在する程度にレイノルズ数が高くなる乱流場では、かなり良い近似で乱流場のスケールを決定できると考えられる。

4. 結論

強い乱流場の測定データと理論計算から高レイノルズ数局所一様等方性乱流場の統計的性質についての考察を行い、以下の知見を得た。

(1) 乱流場が局所等方であり、スペクトル中に自己相似領域が存在するためには乱流レイノルズ数 Re_τ は少なくとも60はなくてはならない。

(2) 平衡領域が存在する時、乱流エネルギーが粘性散逸するまでには、4世代以上に渡ってエネルギー伝達が行われる。

(3) 散逸は乱流エネルギーとエネルギーを含む渦の関数であり、比例定数 C_ϵ はレイノルズ数に依存する。

(4) 比例定数 C_l をレイノルズ数の関数として理論的に求めた。局所等方領域では定数 C_l は理論値に一致し、レイノルズ数が大きくなると一定値に漸近する。

(5) 乱れの寿命時間の約1/4の特性時間を持った渦は統計的に安定であり、それより小さな渦は局所等方的である。

(6) 等方性乱流場の渦スケールと乱流レイノルズ数の関係を理論と実験から求め、比較的測定の容易な Re_λ から乱流場のスケールを推定する方法を示した。

文献

- (1) Taylor, G. I., Proc. Roy. Soc. London A151 (1935), 288.
- (2) Kolmogorov, A. N., C. R. Acad. Sci. USSR, 40 (1941), 401.
- (3) Corrsin, S., NACA RM 58B11 (1958).
- (4) Stewart, R. W., & Townsend, A. A., Phil. Trans. Roy. Soc., A243 (1951), 359.
- (5) 藤田・ほか3名, 機論, 53, 495, B(昭62), 3173.
- (6) 藤田・ほか3名, 機論, 53, 495, B(昭62), 3180.
- (7) 藤田・ほか3名, 機論, 54, 497, B(昭63), 37.
- (8) 藤田・ほか2名, 機論, 54, 505, B(昭63), 2333.
- (9) Bradshaw, P., N. P. L. Aero. Report 1220 (1967).
- (10) Batchelor, G. K., *The Theory of Homogeneous Turbulence*, (1953), Cambridge Univ. Press.
- (11) 藤田・ほか2名, 機論, 投稿中(論文No. 88, 1991).
- (12) Frisch, U., Sulem, P. L., & Nelkin, M., J. Fluid Mech., 87 (1978), 719.
- (13) Scheldvin, J., Stegen, G. R., & Gibson, C. H., J. Fluid Mech., 61 (1971), 561.
- (14) Tennekes, H., & Lumley, J. L., *A First Course in Turbulence*, (1972), MIT Press.
- (15) Batchelor, G. K., & Townsend, A. A., Proc. R. Soc., Ser. A193 (1943), 539.
- (16) Comte Bellot, G., & Corrsin, S., J. Fluid Mech., 18 (1971), 273.
- (17) Comte Bellot, G., & Corrsin, S., J. Fluid Mech., 25 (1966), 657.
- (18) Rotta, J. C., *Turbulent Strömungen* (1972), 大隅武, 岩波.
- (19) Corrsin, S., J. Atmos. Sci., 20 (1963), 115.
- (20) Heisenberg, W., Z. Physik, 124 (1948), 628.
- (21) Kida, S., & Murakami, Y., Phys. Fluids, 30(7) (1987), 203.
- (22) Gad-el-Hak, M., & Corrsin, S., J. Fluid Mech., 62 (1974), 115.
- (23) Kistler, A. I., & Vrebalovich, T., J. Fluid Mech., 26 (1966), 37.
- (24) Van Atta, C. W., & Chen, W. Y., J. Fluid Mech., 44 (1970), 145.
- (25) Uberoi, M. S., Phys. Fluids, 6 (1963), 1048.
- (26) Monin, A. C., & Yaglom, A. M., *Statistical Fluid Mechanics Vol. 2* (1975), MIT Press.
- (27) Sheih, C. M., Tennekes, H., & Lumley, J. L., Phys. Fluids, 14 (1971), 201.
- (28) Gibson, C. H., & Schwarz, W. H., J. Fluid Mech., 62 (1963), 365.
- (29) Hinze, J. O., *Turbulence 2nd ed.* (1975), McGraw-Hill.
- (30) Tatsumi, T., & Kida, S., J. Phys. Soc. Japan, 49 (1980), 2014.
- (31) Driscoll, R. J., & Kennedy, L. A., Phys. Fluids, 26(5) (1983), 1228.