応力方程式モデルによる吹出し・吸込み境界層発達の計算*

島 信 行^{*1}Calculation of Turbulent Boundary Layers with
Transpiration Using a Second-Moment Closure

Nobuyuki SHIMA

The development of turbulent boundary layers with blowing or suction in zero or finite pressure gradients is calculated using a second-moment closure that is applicable right up to a wall. The turbulence model was previously shown to give good predictions for several types of flow, including a rotating channel flow. In the present calculation, no special changes are made to deal with transpiration, except for a wall boundary condition for the normal velocity. Published experimental data on the friction coefficient, the mean velocity profiles, and the turbulent normal stress profiles are used to assess the performance of the model calculation. It is shown that the numerical solutions are generally in agreement with the data. This paper thus shows the wide applicability of the turbulence model.

Key Words: Turbulence, Computational Fluid Dynamics, Boundary Layer, Transpiration, Blowing, Suction, Reynolds Stress Model, Second Moment Closure

1. 緒 言

壁面での吹出しや吸込みを伴う乱流境界層は、吹出し冷却や境界層制御に関連して重要であり、乱流モデルの基本的な予測対象の一つである。本研究では、多孔質壁からの垂直かつ連続な吹出し・吸込みの場合を対象とする。1980-81 Stanford 会議⁽¹⁾においては、このような流れに対して 6 種のモデルによる計算結果が提出されている。それらは、零方程式モデル、長さスケール分布をあらかじめ与えた一方程式モデルと応力方程式モデル、二方程式モデル ($k-\epsilon$, $k-\omega$)、高レイノルズ数応力方程式モデルである。計算結果には良好といえる程度のものが含まれているが、その好結果は、長さスケールを代数的に与えていること、壁において特別な境界条件を与えていること、高レイノルズ数モデルにおいて壁近傍境界条件を巧みに与えていることなどに起因している。そのような扱い方を含んでいない低レイノルズ数 $k-\epsilon$ モデルでは、吹出し境界層においてかなり大きすぎる摩擦係数の値を示してしまうことが知られた (この点に関して Rodi⁽²⁾ のレビューを参

照)。

モデルの広い適用性のためには長さスケールは輸送方程式によって定めるのが望ましく、また吹出しや吸込みの効果は、計算において単に壁における速度の境界条件としてのみ現れることが望ましいことは明らかである。本研究は、そのようなモデル計算を応力方程式レベルで行おうとするものである。著者⁽³⁾⁻⁽⁵⁾は先に、壁に至る全領域に適用できる応力方程式モデルを提案し、それが正負の圧力こう配下の境界層や凸面壁に沿う境界層に対して良好な予測結果を与えることを示した。また、そのモデルに若干の修正を加え、(圧力こう配下の境界層に対する予測能力を劣化させずに) コリオリ力の影響を受ける回転チャネル内乱流を (コリオリ力の効果が極めて大きい場合を除いて) 再現できることを示した⁽⁶⁾。本研究では、このモデルを吹出しを伴う零、正、負の圧力こう配下の境界層発達に適用し、その予測性能を検討する。また、吸込み境界層に関しても一例をとりあげ検討を行う。

2. 支配方程式

本研究で用いる応力モデルは、上述のように、著者の既報⁽⁶⁾に示されたモデルである。一般的なテンソル表式は既報にゆずり、ここでは直交デカルト座標にお

* 平成元年 4 月 5 日 第 66 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 63 年 9 月 27 日。

^{*1} 正員、静岡大学工業短期大学部 (〒432 浜松市城北 3-5-1)。

ける定常二次元境界層に対する表現を記述する。壁に沿う流れ方向の座標を x , 壁に直角方向の座標を y , 横方向の座標を z とする。 x, y, z 方向の速度の平均分をそれぞれ U, V, W , 変動分をそれぞれ u, v, w とすれば, 応力輸送モデルは次のように書かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(U\overline{u^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(V\overline{u^2}) = & -2\overline{uv}\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{2}{3}\varepsilon \\ & - C_1^* \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u^2} - \frac{2}{3}k \right) + \frac{4}{3} C_2^* \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \\ & + C_1'^* \frac{\varepsilon}{k} \overline{v^2} \frac{k^{3/2}}{C_1 \varepsilon y} - \frac{2}{3} C_2'^* \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{k^{3/2}}{C_1 \varepsilon y} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} + \nu \right) \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial y} \right] \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(U\overline{v^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(V\overline{v^2}) = & -\frac{2}{3}\varepsilon \\ & - C_1^* \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{v^2} - \frac{2}{3}k \right) \\ & - \frac{2}{3} C_2^* \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - 2C_1'^* \frac{\varepsilon}{k} \overline{v^2} \frac{k^{3/2}}{C_1 \varepsilon y} \\ & + \frac{4}{3} C_2'^* \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{k^{3/2}}{C_1 \varepsilon y} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} + \nu \right) \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} \right] \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(U\overline{w^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(V\overline{w^2}) = & -\frac{2}{3}\varepsilon \\ & - C_1^* \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{w^2} - \frac{2}{3}k \right) - \frac{2}{3} C_2^* \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \\ & + C_1'^* \frac{\varepsilon}{k} \overline{v^2} \frac{k^{3/2}}{C_1 \varepsilon y} - \frac{2}{3} C_2'^* \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{k^{3/2}}{C_1 \varepsilon y} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} + \nu \right) \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial y} \right] \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(U\overline{uv}) + \frac{\partial}{\partial y}(V\overline{uv}) = & -\overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y} - C_1^* \frac{\varepsilon}{k} \overline{uv} \\ & + C_2^* \overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{3}{2} C_1'^* \frac{\varepsilon}{k} \overline{uv} \frac{k^{3/2}}{C_1 \varepsilon y} \\ & - \frac{3}{2} C_2'^* \overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{k^{3/2}}{C_1 \varepsilon y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} + \nu \right) \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} \right] \\ & \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここで, k は乱れエネルギー $[(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2})/2]$, ε はその散逸率, ν は動粘度であり, $\bar{}$ は平均を示している。モデル定数の値は $C_s=0.22$, $C_1=2.5$ である。

モデル関数 $C_1^*, C_2^*, C_1'^*, C_2'^*$ は以下のように定められている。

$$C_1^* = 1 + 2.58 f_{R1} A A_2^{1/4} \dots\dots\dots (5)$$

$$C_2^* = 0.75 A^{1/2} \dots\dots\dots (6)$$

$$C_1'^* = -2C_1^*/3 + 1.67 \dots\dots\dots (7)$$

$$C_2'^* = [2(C_2^* - 1)/3 + 0.5] / 2 \dots\dots\dots (8)$$

ここで, f_{R1} は乱れのレイノルズ数 $R_\tau = k^2/\nu\varepsilon$ の関数として次式で定義されている。

$$f_{R1} = 1 - \exp[-(0.0067 R_\tau)^2] \dots\dots\dots (9)$$

また, A, A_2 はレイノルズ応力非等方テンソルの不変量であり次式で与えられる。

$$A = 1 - \frac{9}{8} A_2 + \frac{9}{8} A_3 \dots\dots\dots (10)$$

$$\begin{aligned} A_2 = & \left(\frac{\overline{u^2}}{k} - \frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{\overline{v^2}}{k} - \frac{2}{3} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\overline{w^2}}{k} - \frac{2}{3} \right)^2 + 2 \left(\frac{\overline{uv}}{k} \right)^2 \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 = & \left(\frac{\overline{u^2}}{k} - \frac{2}{3} \right)^3 + \left(\frac{\overline{v^2}}{k} - \frac{2}{3} \right)^3 + \left(\frac{\overline{w^2}}{k} - \frac{2}{3} \right)^3 \\ & + 3 \left(\frac{\overline{uv}}{k} \right)^2 \left(\frac{\overline{u^2}}{k} + \frac{\overline{v^2}}{k} - \frac{4}{3} \right) \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

応力輸送方程式(1)~(4)は, 各レイノルズ応力成分の実質変化(左辺)が右辺の各項の和によって定まることを示している。右辺において, 第1項はレイノルズ応力の生成を, 第2項は散逸を表しているが, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$ 方程式には生成項がなく, $\overline{uv}$ 方程式には散逸項がない。引き続き4個の項はいわゆる再分配項であり, 前の2項は return-to-isotropy 項, rapid 項, 後の2項は壁効果項である。そして, 最後の項は乱れおよび粘性による拡散を表している。

以上の応力輸送モデルには乱れエネルギーの散逸率 ε が現れているが, その輸送モデルは次のように書かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(U\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial y}(V\varepsilon) = & (C_{\varepsilon 1} + \phi_1 + \phi_2) \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon \tilde{\varepsilon}}{k} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{v^2} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここで, P は乱れエネルギーの生成率であり, 次式で表される。

$$P = -\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \dots\dots\dots (14)$$

また, $\tilde{\varepsilon}$ は次式で与えられる。

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial y} \right)^2 \dots\dots\dots (15)$$

モデル定数 $C_{\varepsilon 1}=1.45$, $C_{\varepsilon 2}=1.9$, $C_\varepsilon=0.18$ であり, モデル関数 ϕ_1, ϕ_2 は次のように与えられる。

$$\phi_1 = 1.5 A(P/\varepsilon - 1) \dots\dots\dots (16)$$

$$\phi_2 = 0.35 f_{R2}(1 - 0.3 A_2) \dots\dots\dots (17)$$

$$f_{R2} = \exp[-(0.002 R_\tau)^{1/2}] \dots\dots\dots (18)$$

ε 輸送方程式(13)は, ε の実質変化(左辺)が, その生成と消滅(右辺第1, 2項)および拡散(第3項)の和によって定まることを示している。

以上で記述した応力輸送モデルと ε 輸送モデルは, 既に述べたように, 回転チャネル内乱流の解析⁽⁶⁾において用いられたものである。それはまた, 零, 正, 負の圧力こう配下の境界層や凸面壁に沿う境界層に適用さ

れたモデル^{(3)~(5)}と大差はない。両者の相違は、ただ、 ε 輸送モデル中のモデル関数すなわち式(16)~(18)中の定数値のみの相違である。なお、本報のモデルによって零、正、負の圧力こう配下の境界層が良好に予測できることは確認されている。これらの点の詳細については、文献⁽⁶⁾の議論を参照されたい。

平均流に関しては、 x 方向の運動量方程式および連続の式を次のように書くことができる。

$$\frac{\partial}{\partial x}(U^2) + \frac{\partial}{\partial y}(VU) = U_e \frac{dU_e}{dx} - \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial y} \right) \dots\dots\dots(19)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(20)$$

ここで、 U_e は主流速である。

以上の方程式系が、既報⁽³⁾で述べた放物形差分解放法によって数値的に解かれる。その際、壁における平均流の境界条件に吹出し・吸込みの効果が現れる。すなわち、壁において

$$U=0, V=V_w \dots\dots\dots(21)$$

であり、 V_w は予測対象の実験データによって定められる ($V_w > 0$: 吹出し, $V_w < 0$: 吸込み)。本モデル計算においては、境界条件(21)を課すことのほかに、吹出し・吸込みの効果に関する特別な扱いはいっさいなされていない。

3. 予測対象の流れ

本研究で計算の対象とするのは、主として吹出しの場合であり、次の3種のCaseを扱う。

Case 1: U_e 一定 (圧力こう配なし)

$V_w/U_e = 0.00375$, Andersen ら⁽⁷⁾の実験

Case 2: $U_e \propto x^{-0.15}$ (逆圧力こう配)

$V_w/U_e = 0.004$, Andersen ら⁽⁷⁾の実験

Case 3: $K \equiv \nu U_e^{-2} dU_e/dx = 2.6 \times 10^{-6}$

(順圧力こう配)

$V_w/U_e = 0.004$, Loyd ら⁽⁸⁾の実験

また、吸込みの場合については、次の一例を取りあげ検討の対象とする。

Case 4: $U_e \propto x^{-0.15}$ (逆圧力こう配)

$V_w/U_e = -0.004$, Andersen ら⁽⁷⁾の実験

以上のうち、Case 1 と Case 4 は 1980-81 Stanford 会議⁽¹⁾で予測の対象とされたものである。

4. 結果と考察

まず、Case 1 の結果を検討する。これは、圧力こう配はなく、壁からの一様な吹出しのみがある場合であ

る。図1に摩擦係数 $C_f = 2\tau_w/\rho U_e^2$ (τ_w は壁せん断応力、 ρ は流体密度) の変化を、図2に排除厚さ δ^* 、運動量厚さ θ の変化を、図3には平均速度分布の変化を示す。周知のように、単純な平板境界層が壁近傍に一定応力層をもつのにに対し、吹出し境界層においてはせん断応力は壁直角方向に正のこう配をもつ。この点で、吹出し境界層は、流れ方向に正の圧力こう配 (逆圧力こう配) を伴う境界層と類似である (同様に、吸込境界層と順圧力こう配境界層とは負のせん断応力こう配をもつ点で類似である)。実際、この場合逆圧力こう配境界層に似て、単純な平板境界層に比して摩擦係数は小さくなり、平均速度分布はよりふくらみの小さい分布へと発達していく。図1、3において、そのような実験データが予測計算によって満足すべき定量性をもって再現されている。速度分布の結果から見て当然のことながら、図2における δ^* 、 θ に関する実験と予測の一致も良好であるといえる。

次に、Case 2 の結果を見よう。これは、吹出し境界層がさらに逆圧力こう配を伴う場合である。上述のように、単純な平板境界層を基準にとると、これは2種の同方向の効果が重なった場合である (全効果はもちろん単純な和というわけにはいかない)。図4に摩擦係数の変化を示す。実験データは、二つの効果によって C_f が相当小さい値をとり境界層は剥離にかなり近い状態に至っていることを示している。計算結果を実験データと比較すれば、 $x \approx 1 \text{ m}$ までは計算値がやや大きく、それより下流ではやや小さい。しかし、摩擦係数が相当小さくなるこのような流れでは、その値を実験的に精度良く定めることはかなり困難なことであり、また流れの三次元性や不規則な長周期の非定常性の影響を受けやすい。1980-81 Stanford 会議で、Andersen ら⁽⁷⁾の測定のうち Case 1 と Case 4 が採用され、Case

図1 摩擦係数 (Case 1)

2 がとりあげられなかったのはこのような事情によっ
 ている（しかし、Case 2 のデータが信頼できないとさ
 れたわけではない）。これらのことを考慮すれば、図 4
 の結果は決して悪いものではない（ $x \leq 0.2 \text{ m}$ の計算結
 果は初期分布の粗さに依存している、図 1 も同様）。図
 5 に排除厚さ、運動量厚さの変化を、図 6 に平均速度
 分布の変化を示す。排除厚さの計算値が下流において
 やや大きすぎるのは、もちろん、計算された速度分布
 が実験データの分布よりもやや大きい欠損をもつこと
 によっている。しかし、ふくらみを失った特徴的な速
 度分布が予測によってよく捉えられている。また定量的
 にも、このケースの困難さを考えれば、まずまずの
 予測結果としてよいのではなかろうか。図 7 に一位置
 におけるレイノルズ垂直応力の分布を示す。前述のよ
 うに、Case 2 では壁から外に向かってせん断応力は増
 大し、それに伴って垂直応力も大きくなる。そのため、
 各成分の分布においてかなり外側に極大が生じるこ
 とになる。 $\overline{u}^2$ については、吹出しや逆圧力こう配の効果が
 比較的小さい場合には、通常の平板境界層の分布の

最大値に相当する極大が壁近傍に存在し、計 2 個の極
 大が存在する。このケースでは 2 種の効果は相当強く、
 図 7 の実験データの分布では壁近傍の極大はわずかに
 痕跡が見られる程度である。計算結果はその点におい
 て実験と一致していないが、（壁近傍の $\overline{u}^2$ を除いて）
 各成分の大きさのレベルが単純な平板境界層に比して
 相当大きくなること、極大値を境界層の中ほどでと
 ることなど、よく実験結果を捉えている。平均流の予測
 に重要なのは $\overline{u}^2$ よりも $\overline{v}^2$ であるが、壁の近傍におけ
 るその計算値はやや低すぎる結果となっている。

次に、Case 3 について検討しよう。これは吹出し境
 界層が順圧力こう配を伴う場合である。せん断応力こ
 う配への影響という点から見れば、これは 2 種の逆方
 向の効果が働く場合である。実験データは加速パラメ
 ータ $K=2.6 \times 10^{-6}$ の sink flow に対するものであり、
 この K の値は、もし吹出しがなければ流れが層流化
 する臨界値に近く、かなり強い加速に相当する⁽⁴⁾⁽⁹⁾。図
 8 に摩擦係数の変化を示す。 K の値がこの程度で吹出
 しない場合には C_f は 0.005 程度の値をとるが⁽⁸⁾、

図 2 排除厚さと運動量厚さ (Case 1)

図 4 摩擦係数 (Case 2)

図 3 平均速度分布 (Case 1)

図 5 排除厚さと運動量厚さ (Case 2)

それが吹出しによって低くおさえられていることが計算によって捉えられている。定量的には、(初期位置近傍を除いても) 計算値は実験データよりかなり低いが、この程度の差の計算値を完全に斥けるほど測定精度が高いわけではない。図9に運動量厚さ、形状係数 $H = \delta^*/\theta$ の変化を、図10に平均速度分布の変化を示す。平均速度分布において予測と実験の一致は良好で、したがって θ, H における一致も良い。図11には二位置における流れ方向乱れ強さ u' の分布を示す。ここで、 $u' = \sqrt{u'^2}, y^+ = U_\tau y/\nu$, U_τ は摩擦速度である。実験データにおいては、下流に進むと全般的にレベルがやや低くなるのに対し、計算結果では $y^+ \geq 10^2$ においてのみ低下が見られる。しかし、全体としての一致はまず良好と言える程度であろう。外層における値のレベルは通常の平板境界層よりやや低く、加速の効果が吹出しの効果に勝っていることを示唆している。

最後に、Case 4 について述べる。これは本研究でとりあげる唯一の吸込み境界層である。逆圧力こう配を伴っており、(Case 3 とは逆の意味で) 2種の逆方向の効果が働く場合である。図12に摩擦係数の変化を示す。初期位置近傍を除いて、予測と実験との一致は極めて良い。吸込みの効果が逆圧力こう配の効果を上回り大きい C_f のもたらされることが予測によってよく再現されている。図13に排除厚さ、運動量厚さの変化を、図14に平均速度分布の変化を示す。計算結果の δ^*, θ は実験データに比して相当大きすぎることがわかる。平均速度分布を見ると、壁の近傍では計算と実験とはよく一致している。外層においては計算された速度の欠損がやや大きく、それが広範囲にわたることが大きすぎる δ^*, θ をもたらしている。この速度分布

の外層における相違は重大な欠陥というほどのものではないであろう。もちろん、その改善が検討されなければならないことは言うまでもないが(前述の Stanford 会議に提出された計算結果の中にも同様のものが見られる)。図15に一位置におけるレイノルズ垂直応力の分布を示す。実験データの特徴は、壁のごく近傍の $\overline{u'^2}$ を除いて、通常の平板境界層の場合に比して各成分が著しく小さくなることである。これはやはり、

図7 レイノルズ垂直応力の分布 (Case 2)

図8 摩擦係数 (Case 3)

図6 平均速度分布 (Case 2)

図9 運動量厚さと形状係数 (Case 3)

吸込みの効果が逆圧力こう配の効果をはるかに上回っていることを示している。計算結果を見ると、壁のごく近傍においてそれぞれの値はやや低いものの、全体としての一貫の程度は満足すべきもののように思われる。

5. 結 言

壁に至る全領域に適用できる応力方程式モデルを用

いて、吹出し・吸込みを伴う境界層発達の数値予測を行った。計算において、吹出し・吸込みの直接的効果は壁における垂直平均速度の境界条件にのみ現れ、その他の特別な扱いはいっさいなされていない。零、正、負の圧力こう配を伴う吹出し境界層、正の圧力こう配を伴う吸込み境界層に対して計算結果が得られ、摩擦係数、平均速度分布、三方向乱れ強さ分布等に関して代表的な実験データとの比較が行われた。その結果、全体として良好と判断される程度の一致が得られた。

緒言で述べたように、本研究で用いたモデルは既にいくつかの基本的な流れの予測に有効であることが示されている。本研究は、そのモデルの適用性を吹出し・吸込み境界層という重要な流れに広げたものであり、広い適用範囲をもつ応力方程式モデルの確立のための一つの寄与である。

最後に、本研究の数値計算は名古屋大学大型計算機センター FACOM M-780/20 によって行ったものであることを付記する。

図 10 平均速度分布 (Case 3)

図 11 流れ方向乱れ強さの分布 (Case 3)

図 12 摩擦係数 (Case 4)

図 13 排除厚さと運動量厚さ (Case 4)

図 14 平均速度分布 (Case 4)

図 15 レイノルズ垂直応力の分布 (Case 4)

文 献

- (1) Kline, S. J., ほか 2 名編, *Proc. 1980-81 AFOSR-HTTM-Stanford Conf. Complex Turbulent Flows*, (1981).
- (2) Rodi, W., *Turbulence models and their applications*, 2 (1984), 297, EYROLLES.
- (3) 島, 機論, 54-505, B (1988), 2317.
- (4) 島, 文献(3)の 2325 ページ.
- (5) 島, 機論, 55-511, B (1989), 598.
- (6) 島, 機論, 55-516, B (1989), 掲載予定.
- (7) Andersen, P. S., ほか 2 名, Rep. No. HMT-15, *Thermosci. Div., Dept. Mech. Eng., Stanford Univ.*, (1972).
- (8) Loyd, R. J., ほか 2 名, Rep. No. HMT-13, *Thermosci. Div., Dept. Mech. Eng., Stanford Univ.*, (1970).
- (9) Launder, B. E., Low-Reynolds-Number Turbulence near Walls, *Thermofluids Div., Dept. Mech. Eng., UMIST*, (1986).