基本不変量理論と最大散逸速度の原理による 磁性流体の構成方程式の誘導*

井 門 康 司*¹, 棚 橋 隆 彦*²

Determination of Constitutive Equations for Magnetic Fluids by Using the Theory of Integrity Bases and the Principle of Maximal Dissipation Rate

Yasushi IDO and Takahiko TANAHASHI

Constitutive equations for magnetic fluids have been investigated by some researchers. However, these equations cannot describe the phenomena of magnetic fluids perfectly for lack of some elements with which constitutive equations should satisfy, for example, considering viscoelastic effects, satisfying the principle of material frame-indifference, being formulated by using the thermodynamic method. We introduce a new way of determining constitutive equations for magnetic fluids. That is the method which is a combination of the theory of integrity bases and the principle of maximal dissipation rate based on the thermodynamic discussions. Compared with previous ways, this has such merits as follow: all equations satisfy the principle of material frame-indifference and only include the terms which are permitted by thermodynamics: non-Newtonian effects except magnetic effects can be described because of considering nonlinear terms, we can obtain the constitutive equations not only in the case of the compound process but of the complex process as well.

Key Words: Magnetic Fluid, Constitutive Equation, Thermodynamic Method, Principle of Maximal Dissipation Rate, Integrity Bases

1. 緒 言

現在市販されている磁性流体は高分子などの界面活性材によって表面処理を施された粒子径約 10 nm 程度の強磁性体微粒子を水やケロシンなど非導電性の液体中に安定に分散させたけん濁液である。微粒子の分散性はよく、重力などの作用によって凝集や沈降は起こらない。磁性流体はその磁気的特性を利用して、すでに磁気インク、軸封装置、ダンパなどに応用されている。また、現在開発途上にある液体金属を母液とする導電性磁性流体のエネルギー変換機、MHD 発電機への応用はエネルギー工学的に重要である。

磁性流体の流動特性を記述する支配方程式系あるいは構成方程式に関する研究は、これまで Neuringer-Rosensweig⁽⁴⁾, Shliomis⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾, Hsieh⁽³⁾ あるいは志澤・棚橋^{(5)~(8)}らによってなされてきている。これらの理論においては、粘弾性効果が考慮されていないもの、または熱力学的議論がなされていないもの、あるいは標構無差別性の原理を満足しない構成方程式が含まれ

るものなどそれぞれに不備があるため、それらは磁性流体の流動特性を必ずしも十分に表現しているとは言えない。そこで、ここでは志澤・棚橋による熱力学的手法を基礎としてそれに Spencer-Rivlin の基本不変量の理論^{(11)~(13)}と最大散逸速度の原理⁽¹⁶⁾による方法を導入して構成方程式を決定する手法を新たに提案する。すなわち、まず保存則から直接基礎方程式を導出し、Tarapov⁽¹⁵⁾によって示されている熱力学の第 1 法則の式を粘弾性効果を考慮して一般化する。次に、標構無差別性の原理より散逸関数および自由エネルギーをその引数で作られる不変量の多項式で表し、構成方程式の散逸部分は最大散逸速度の原理を、準保存部分は熱力学の関係式をそれぞれ用いて決定して構成方程式が最終的に導出される(図 1 参照)。このような構成方程式の決定方法は前述のような従来の方法による不備を補うことができる。磁性流体の流動特性を正確に表すためには内部自由度を考慮しなければならないが、ここでは手法の提案を主眼とし、準備段階として内部自由度を考慮せず、非極性の場合に対して非導電性磁性流体の構成方程式を決定することにする。また、磁性粒子は母液の粒子に比べてかなり大きいため、流体を連続体とみなせるような限界スケールでの微視的体積要素を考えると、磁性粒子は離散量として扱わなけ

* 平成元年 4 月 4 日 第 66 期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和 63 年 11 月 21 日。

*¹ 正員、慶應義塾大学大学院 (〒223 横浜市港北区日吉 3-14-1)。

*² 正員、慶應義塾大学理工学部。

ればならない。そこで導出に際して、装置の寸法に比べれば非常に小さいが磁性粒子を多く含む巨視的体積要素を考えることによって磁性流体を連続体として扱う。

記 号 表

B : 磁束密度ベクトル

C_m : 実質検査線

c : 光速

D : 電束密度ベクトル

d : 変形速度テンソル $= \{\nabla v + (\nabla v)^t\}/2$

E : 電界ベクトル

e : Green のひずみテンソル

F : 変形こう配テンソル $= \partial x / \partial X$

f : 単位質量当たりの体積力

H : 磁界ベクトル

H : 磁界の大きさ $= |H|$

I : 恒等テンソル

j : 電流密度ベクトル

M : 磁化ベクトル

n : 検査面の外向き単位法線ベクトル

P : 分極ベクトル

p : 圧力

Q : 単位時間当たりの熱供給

図 1 熱力学的手法を用いた構成方程式の誘導

- q : 単位質量当たりの熱流束密度ベクトル
 r : 単位質量当たりの熱源の強さ
 S_m : 実質検査面
 s : ポインティング・ベクトル
 s : 単位質量当たりのエントロピー
 $s^{(i)}$: 単位質量当たりの内部エントロピーの生成
 T : 応力テンソル
 $T' = T - T^{(M)}$
 $T^{(d)}$: 応力テンソルの散逸部分
 $T^{(M)}$: Maxwell の応力テンソル
 $T^{(q)}$: 応力テンソルの準保存部分
 T : 絶対温度
 t : 時間
 u : 単位質量当たりの内部エネルギー密度
 V_m : 実質検査体積
 v : 流速ベクトル
 X : 物質座標
 x : 空間座標
 γ : Lorentz 変換の係数 $= \{1 - (v/c)^2\}^{-1/2}$
 ϵ : 3 階の交代テンソル (Levi-Civita の記号)
 ϵ_0 : 真空中の誘電率
 η : セン断粘性係数
 η_2 : 第 2 粘性係数
 χ : 熱伝導率
 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$: 弾性係数
 μ_0 : 真空中の透磁率
 ρ : 磁性流体の密度
 ρ_e : 電荷密度
 σ : 電気伝導率
 Φ : 単位体積当たりの散逸関数
 χ : 磁化率
 ψ : 単位質量当たりの自由エネルギー
 Ψ : 単位質量当たりの熱力学的ポテンシャル
 $= \psi - M \cdot H / \rho$

2. 仮定およびひずみテンソル

2.1 仮定 磁性流体の挙動を支配する基礎方程式系および構成方程式を導出するにあたって次のような仮定を設ける。

- ① 磁性流体は非極性であるものとする。すなわち内部自由度を無視する。
- ② 磁性流体は非導電性である ($\sigma=0$)。
- ③ 時間的に速やかに変動する磁場、およびあらゆる電場の印加がないものとして分極を無視する ($E=0, P=0$)。
- ④ 流速は光速に比べて十分遅い ($(v/c)^2 \ll 1$)。

仮定③および④より電束密度および電流密度は零であり、Lorentz 変換の係数は 1 であるとみなせる。すなわち、 $D=0, j=0$ および $\gamma \approx 1$ である。

2.2 ひずみテンソル いま、物質座標および空間座標をそれぞれ X, x とすると

$$dx = F \cdot dX$$

が成り立つ。ここで F は変形こう配テンソルで $F = \partial x / \partial X$ である。したがって巨視的体積要素の変形前後における線素の長さの二乗の差は

$$(dx)^2 - (dX)^2 = 2dX \cdot e \cdot dX \quad \dots\dots\dots (1)$$

となる。ここで e は Green のひずみテンソルであり、次のように定義される。

$$e = (F^t \cdot F - I) / 2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

一方、

$$\frac{d}{dt}(dx) = (\nabla v)^t \cdot dx \quad \dots\dots\dots (3)$$

が成り立つ⁽¹⁾。式(1)および(3)より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ (dx)^2 - (dX)^2 \} \\ = 2dX \cdot F^t \cdot d \cdot F \cdot dX \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

が得られる。ここで d は変形速度テンソルで

$$d = \frac{1}{2} \{ \nabla v + (\nabla v)^t \} \quad \dots\dots\dots (5)$$

のように定義される。これより次の関係式が得られる。

$$\frac{de}{dt} = F^t \cdot d \cdot F \quad \dots\dots\dots (6)$$

いま、微小変位理論の範囲で議論するものとする、 $F=I$ が成立するため式(6)は次のようになる。

$$\frac{de}{dt} = d \quad \dots\dots\dots (7)$$

3. 電磁場の方程式

実質検査面に対する Maxwell の方程式は次のようになる。

$$\oint_{C_m} H^* \cdot dx = \frac{d}{dt} \int_{S_m} n \cdot D^* da + \int_{S_m} n \cdot j^* da \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\int_{S_m} n \cdot B^* da = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\oint_{C_m} E^* \cdot dx = - \frac{d}{dt} \int_{S_m} n \cdot B^* da \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\int_{S_m} n \cdot D^* da = \int_{V_m} \rho_e^* dv \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで $*$ は静止座標系に対して速度 v で並進運動する動座標系における電磁場の物理量であることを表す。また、静止座標系における電磁場の物理量と動座標系におけるそれらの量との関係式は相対性理論によると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} E^* &= \gamma(E + v \times B) \\ H^* &= \gamma(H - v \times D) \\ B^* &= \gamma(B - v \times E/c^2) \\ D^* &= \gamma(D + v \times H/c^2) \\ P^* &= \gamma(P - \epsilon_0 v \times M) \\ M^* &= \gamma(M + \mu_0 v \times P) \\ j^* &= \gamma(j - \rho_e v) \\ \rho_e^* &= \gamma(\rho_e - v \cdot j/c^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ただし, γ は Lorentz 変換の係数で

$$\gamma = \{1 - (v/c)^2\}^{1/2}$$

である。仮定④を考慮すると $(v/c)^2$ は無視することができて $\gamma=1$ とおくことができる。さらに仮定②および③を考慮すると静止座標系における電磁場の物理量と動座標系における量との前述の関係式(12)の第1, 2, 3および6式は以下ようになる。

$$E^* = v \times B \dots\dots\dots (13)$$

$$H^* = H \dots\dots\dots (14)$$

$$B^* = B \dots\dots\dots (15)$$

$$M^* = M \dots\dots\dots (16)$$

また, 電束密度, 分極および電流密度は静止座標系と動座標系の両方で零となる。このとき, Maxwell の方程式(8), (9), (10)および(11)は式(13), (14), (15)および(16)を用いて静止座標系で表すと以下のようになる。

$$\nabla \times H = 0 \dots\dots\dots (17)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

$$\rho_e = 0 \dots\dots\dots (20)$$

式(20)より磁性流体は電氣的に中性である。また, 磁束密度に対する構成方程式は一般に

$$B = \mu_0 H + M \dots\dots\dots (21)$$

で与えられる。

4 釣合いの方程式

4.1 質量保存則 変形する連続体中に実質検査面を考えると, この検査面内において次のような質量保存則が成立する。

$$\frac{d}{dt} \int_{v_m} \rho dv = 0 \dots\dots\dots (22)$$

式(22)に Reynolds の輸送定理および Gauss の定理を適用すると連続の方程式が次のように得られる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \dots\dots\dots (23)$$

また, 式(23)を書き換えると

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} = -I : \nabla v \dots\dots\dots (24)$$

となる。

4.2 運動量の釣合い方程式 系の運動量の時間的変化は, 力の総和, すなわち面積力と体積力の総和に等しい。したがって, 前述の仮定を考慮すると電磁運動量が零になることから運動量の保存則は次式のように表される。

$$\frac{d}{dt} \int_{v_m} \rho v dv = \int_{s_m} t^{(n)} da + \int_{v_m} \rho f dv \dots\dots\dots (25)$$

ここで $t^{(n)}$ および f はそれぞれ応力ベクトルと単位質量当たりの体積力である。式(25)に Cauchy の基本定理 $t^{(n)} = n \cdot T$ を代入し, Gauss の定理および Reynolds の輸送定理を適用して連続の方程式(23)を用い, さらに体積要素は任意にとれることから積分記号を外すと次式のような Cauchy の運動方程式を得る。

$$\rho \frac{dv}{dt} = \nabla \cdot T + \rho f \dots\dots\dots (26)$$

4.3 角運動量の釣合い方程式 系の角運動量の時間的変化は, 面積力のモーメントと体積力のモーメントの総和に等しい, というのが角運動量に対する力学の基本法則である。したがって, 仮定を考慮すると電磁運動量が零であるから角運動量の釣合い方程式は次式のようになる。

$$\frac{d}{dt} \int_{v_m} x \times \rho v dv = \int_{s_m} x \times t^{(n)} da + \int_{v_m} x \times \rho f dv \dots\dots\dots (27)$$

式(27)に Cauchy の基本定理, Gauss の定理, Reynolds の輸送定理を適用し, 式(23)および(26)を考慮すると次式が得られる。

$$\epsilon : T = 0 \dots\dots\dots (28)$$

ϵ は3階の交代テンソルであるから式(28)より応力テンソル T は対称テンソルであることがわかる。

4.4 エネルギーの釣合い方程式 エネルギーの釣合い方程式は, 系の全エネルギーの時間的変化が力のなした仕事と系に供給されるエネルギーとの総和に等しいという基本法則から得られる。すなわち前述の仮定のもとで

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v_m} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} + \frac{\mu_0}{2\rho} H^2 \right) dv &= \int_{s_m} t^{(n)} \cdot v da \\ &+ \int_{v_m} \rho f \cdot v dv - \int_{s_m} n \cdot q da - \int_{s_m} n \cdot s da + \int_{v_m} \rho r dv \end{aligned} \dots\dots\dots (29)$$

である。ここで s はポインティング・ベクトルであり, $s = E^* \times H^*$ である。また, u は単位質量当たりの内部エネルギー密度であるが, これには電磁エネルギーのうち具体化できない磁化による部分が含まれている。式(13)および(14)より

$$\nabla \cdot \mathbf{s} = \mathbf{B} \mathbf{H} : \nabla \mathbf{v} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{I} : \nabla \mathbf{v} - \mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (30)$$

が得られる。Cauchy の基本定理を代入して Reynolds の輸送定理および Gauss の定理を適用し式(23), (26) および(30)を考慮すると式(29)は次式となる。

$$\rho \frac{du}{dt} = \mathbf{T}' : \nabla \mathbf{v} + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{I} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{M}}{dt} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \quad (31)$$

ここで $\mathbf{T}'$ は応力テンソルから Maxwell の応力テンソルに相当する部分を引いたもので

$$\mathbf{T}' = \mathbf{T} - \mathbf{B} \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{H}^2 \mathbf{I} / 2 \quad (32)$$

である。 $\mathbf{T}'$ には電磁圧力の部分が含まれている。応力テンソル $\mathbf{T}$ が対称テンソルであることから $\mathbf{T}'$ もまた対称テンソルであること、および

$$\mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \rho \mathbf{H} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{M}}{\rho} \right) - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{I} : \nabla \mathbf{v}$$

を用いて式(31)を書き換えると次のような式を得る。

$$\rho \frac{du}{dt} = \mathbf{T}' : \mathbf{d} + \rho \mathbf{H} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{M}}{\rho} \right) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \quad (33)$$

4.5 エントロピーの不等式 連続体において、熱力学の第2法則は次式で表される。

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho s^{(i)} dv = \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho s dv - \left(- \int_{S_m} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}}{T} da + \int_{V_m} \frac{\rho r}{T} dv \right) \geq 0 \quad (34)$$

式(34)に Reynolds の輸送定理および Gauss の定理を適用し、式(23)を考慮すると

$$\rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{\rho r}{T} \geq 0 \quad (35)$$

が得られる。

5. 熱力学的関係式

5.1 熱力学の第1法則 エネルギーの釣り合い方程式(33)は式(7)より次式のようになる。

$$\rho \frac{du}{dt} = \mathbf{T}' : \frac{d\mathbf{e}}{dt} + \rho \mathbf{H} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{M}}{\rho} \right) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \quad (36)$$

一方、熱力学の第1法則より

$$Q = \rho T \frac{ds}{dt} - \mathbf{T}'^{(d)} : \frac{d\mathbf{e}}{dt} \quad (37)$$

が得られる。ただし、 Q は単位時間当たりの熱供給であり、 $\mathbf{T}'^{(d)}$ は応力テンソル $\mathbf{T}'$ の散逸部分を表す。式(37)を式(36)に代入すると次式が得られる。

$$\rho \frac{du}{dt} = \mathbf{T}'^{(q)} : \frac{d\mathbf{e}}{dt} + \rho \mathbf{H} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{M}}{\rho} \right) + \rho T \frac{ds}{dt} \quad (38)$$

ここで

$$\mathbf{T}'^{(q)} = \mathbf{T}' - \mathbf{T}'^{(d)} \quad (39)$$

である。 $\mathbf{T}'^{(q)}$ は応力テンソル $\mathbf{T}'$ の準保存部分である。式(38)の両辺に dt を掛けると Gibbs の式が次のように得られる。

$$du = \frac{\mathbf{T}'^{(q)}}{\rho} : d\mathbf{e} + \mathbf{H} \cdot d \left(\frac{\mathbf{M}}{\rho} \right) + T ds \quad (40)$$

これは $\mathbf{B}$ による磁気エネルギーの一部が u の中に含まれており、応力テンソルの準保存部分に弾性効果の項を含んでいる点を除けば Tarapov⁽¹⁵⁾ の式に一致する。

5.2 熱力学的ポテンシャル 自由エネルギー ψ は

$$\psi = u - Ts$$

である。これを全微分形にすると

$$d\psi = du - Tds - sdT \quad (41)$$

となる。式(40)を式(41)に代入すると次式を得る。

$$d\psi = \frac{\mathbf{T}'^{(q)}}{\rho} : d\mathbf{e} + \mathbf{H} \cdot d \left(\frac{\mathbf{M}}{\rho} \right) - sdT \quad (42)$$

ここで熱力学ポテンシャル Ψ を

$$\Psi = \psi - \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} / \rho \quad (43)$$

のように定義する。式(43)の全微分形をとり、それに式(42)を代入すると

$$d\Psi = -sdT + \frac{\mathbf{T}'^{(q)}}{\rho} : d\mathbf{e} - \frac{\mathbf{M}}{\rho} \cdot d\mathbf{H} \quad (44)$$

が得られる。したがって、式(44)より以下の式が得られる。

$$s = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial T} \right)_{\mathbf{e}, \mathbf{H}} \quad (45)$$

$$\mathbf{T}'^{(q)} = \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}} \right)_{T, \mathbf{H}} \quad (46)$$

$$\mathbf{M} = - \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{H}} \right)_{T, \mathbf{e}} \quad (47)$$

5.3 散逸関数 式(38)より

$$\frac{du}{dt} = \frac{\mathbf{T}'^{(q)}}{\rho} : \frac{d\mathbf{e}}{dt} + \frac{\mathbf{H}}{\rho} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{M}}{\rho} \right) + T \frac{ds}{dt}$$

である。この式に式(36)を代入すると次式を得る。

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \Phi - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \quad (48)$$

ここで Φ は散逸関数で

$$\Phi = \mathbf{T}'^{(d)} : \mathbf{d} \quad (49)$$

である。

5.4 Clausius-Duhem の不等式 エントロピーの不等式(35)の両辺に絶対温度 T を掛けると

$$\rho T \frac{ds}{dt} + T \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \rho r \geq 0 \quad (50)$$

となる。式(50)に式(48)を代入すると次式のような Clausius-Duhem の不等式を得る。

$$\Phi + \mathbf{q} \cdot \{ \nabla (-\ln T) \} \geq 0 \quad (51)$$

したがって、任意の現象に対して熱力学的な項とその他の項に分解できることが知られているから⁽¹⁴⁾、式(51)より以下の式が得られる。

$$\phi \geq 0, \quad \phi_{th} \geq 0 \quad \dots\dots\dots (52)$$

ただし

$$\phi_{th} = q \cdot \nabla (-\ln T) \quad \dots\dots\dots (53)$$

ϕ および ϕ_{th} より最大散逸速度の原理を用いてそれぞれ応力テンソルの散逸部分 $T^{(d)}$ と熱流束密度ベクトル q を決定することができる。

6. 構成方程式

6・1 標構無差別性の原理 まだ具体的表示が得られておらず、これから決定すべき構成量は応力テンソル T あるいは T' 、熱流束密度ベクトル q 、磁化ベクトル M 、熱力学的ポテンシャル Ψ および散逸関数 ϕ である。構成量が満たさなければならない基本原理として標構無差別性の原理がある。これは、一般に物質の性質を表すスカラー、ベクトルおよびテンソルは座標系に無関係でなければならない、というものである。したがって、前述の構成量は標構に無差別なテンソル、ベクトルおよびスカラーから構成されていなければならない。すなわち、 Ψ および ϕ はそれぞれの引数から作られる基本不変量の多項式として表せる。 Ψ と ϕ の形が決まると構成量の準保存部分は Ψ から式(46)および(47)によって決定され、散逸部分は ϕ から次に述べる最大散逸速度の原理によって決定される。

6・2 最大散逸速度の原理 いま、純粋に散逸的な系を考える。巨視的力 A_n の散逸部分を $A_n^{(d)}$ とし、運動学的座標を a_n とすると散逸関数 ϕ は

$$\phi = A_n^{(d)} \frac{da_n}{dt} \quad (n=1, 2, \dots, N)$$

である。最大散逸速度の原理⁽¹⁶⁾は、散逸力 $A_n^{(d)}$ が与えられるならば、実際の速度 $(d/dt)a_n$ は付帯条件

$$\phi = A_n^{(d)} \frac{da_n}{dt} = L^{(d)} \geq 0$$

のもとで散逸速度 $L^{(d)} = A_n^{(d)}(d/dt)a_n$ を最大にする、というものである。この最大散逸速度の原理は次の垂直性条件に等価である⁽¹⁶⁾。すなわち

$$A_n^{(d)} = \nu \frac{\partial \phi}{\partial \{(d/dt)a_n\}} \quad \dots\dots\dots (54)$$

となる。ただし、 ν は

$$\nu = \phi \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \{(d/dt)a_p\}} \cdot \frac{da_p}{dt} \right\}^{-1} \quad \dots\dots\dots (55)$$

で決定される比例定数である。

6・3 準保存部分の決定 構成方程式の準保存部分は熱力学的ポテンシャル Ψ から決定することができる。いま、式(44)より $\Psi = \Psi(T, e, H)$ であるから、

標構無差別性の原理より Ψ はベクトル H とテンソル e とから作られる基本不変量の多項式として表される。Spencer-Rivlin^{(11)~(13)}の理論を参考にしてこれらの基本不変量を求めると以下の6個となる。

$$I_1 = H \cdot H / 2, \quad I_2 = \text{tr } e_{..}, \quad I_3 = \text{tr } e^2 / 2$$

$$I_4 = \text{tr } e^3 / 3, \quad I_5 = H \cdot e \cdot H, \quad I_6 = H \cdot e^2 \cdot H$$

..... (56)

Ψ はこれら6個の基本不変量の多項式として表されるから式(46)および(47)は次のようになる。

$$T^{(q)} = \sum_{i=1}^6 a_i \frac{\partial I_i}{\partial e} \quad \dots\dots\dots (57)$$

$$M = - \sum_{i=1}^6 a_i \frac{\partial I_i}{\partial H} \quad \dots\dots\dots (58)$$

ただし

$$a_i = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial I_i}$$

式(57)および(58)に式(56)で与えられる6個の基本不変量を代入して式(28)より応力テンソルが対称であることを考慮すると、構成方程式の準保存部分が次のように決定される。

$$T^{(q)} = a_2 I + a_3 e + a_4 e \cdot e + a_5 H H + a_6 (H \cdot e H + H e \cdot H) \quad \dots\dots\dots (59)$$

$$M = \chi H \quad \dots\dots\dots (60)$$

ただし

$$\chi = -a_1 - \frac{1}{H^2} (a_5 H \cdot e \cdot H + a_6 H \cdot e^2 \cdot H) \quad \dots\dots\dots (61)$$

式(61)より磁化率 χ は温度 T 、磁界 H およびひずみテンソル e の関数であり、場所によって値が異なることに注意しなければならない。

6・4 散逸部分の決定 式(49)より散逸関数 $\phi = \phi(d)$ であるから ϕ はテンソル d が作る基本不変量の多項式として表される。 d によって作られる基本不変量は次の3個である。

$$\hat{I}_1 = \text{tr } d, \quad \hat{I}_2 = \text{tr } d^2 / 2, \quad \hat{I}_3 = \text{tr } d^3 / 3 \quad \dots\dots\dots (62)$$

応力テンソルの散逸部分 $T^{(d)}$ は前述の最大散逸速度の原理より散逸関数 ϕ から決定される。垂直性条件の式(54)より次式が得られる。

$$T^{(d)} = \sum_{i=1}^3 \beta_i \frac{\partial \hat{I}_i}{\partial d} \quad \dots\dots\dots (63)$$

ただし

$$\beta_i = \nu \frac{\partial \phi}{\partial \hat{I}_i}$$

である。式(63)に基本不変量(62)を代入すると応力テンソルの散逸部分が次のように決定される。

$$T^{(d)} = \beta_1 I + \beta_2 d + \beta_3 d \cdot d \quad \dots\dots\dots (64)$$

同様にして Φ_{th} から q が決定できて次のようなよく知られた Fourier の法則を得る。

$$q = -x \nabla T \quad \dots\dots\dots (65)$$

6・5 構成方程式の決定 式(32)および(39)より応力テンソル T は

$$T = T^{(q)} + T^{(d)} + T^{(M)} \quad \dots\dots\dots (66)$$

となる。ただし $T^{(M)}$ は Maxwell の応力テンソルに相当する部分で次式で定義される。

$$T^{(M)} = BH - \mu_0 H^2 I / 2 \quad \dots\dots\dots (67)$$

式(59), (64)および(66)より応力テンソル T は最終的に次式のように決定される。

$$\begin{aligned} T = & (\alpha_2 + \beta_1)I + \alpha_3 e \cdot e + \alpha_4 e \cdot e + \alpha_5 HH \\ & + \alpha_6 (He \cdot H + H \cdot eH) + \beta_2 d + \beta_3 d \cdot d \\ & + BH - \mu_0 H^2 I / 2 \quad \dots\dots\dots (68) \end{aligned}$$

これまでは複合過程を考えていたが、ここで結合過程の仮定を導入して構成方程式を書き直す。このとき、磁化 M および熱流束密度ベクトル q の形はそれぞれ式(60)および(65)のままであるが、式(60)における係数である磁化率は $\chi = -\alpha_1$ となり、応力テンソル T は次のようになる。

$$\begin{aligned} T = & (\alpha_2 + \beta_1)I + \alpha_3 e \cdot e + \alpha_4 e \cdot e + \beta_2 d \\ & + \beta_3 d \cdot d + BH - \mu_0 H^2 I / 2 \quad \dots\dots\dots (69) \end{aligned}$$

ただしこの場合、係数 α_i は基本不変量 I_2, I_3 および I_4 の多項式として表される。従来の理論⁽⁸⁾と比較すると係数も含めて構成方程式は最終的に以下になる。

$$\begin{aligned} T = & -pI + \lambda_1 (\text{tr } e)I + 2\lambda_2 e \cdot e + \lambda_3 e \cdot e \\ & + \eta_2 (\text{tr } d)I + 2\eta d + 4\eta_3 d \cdot d + BH \\ & - \mu_0 H^2 I / 2 \quad \dots\dots\dots (70) \end{aligned}$$

$$M = \chi H \quad \dots\dots\dots (60)$$

$$q = -x \nabla T \quad \dots\dots\dots (65)$$

ここで、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は弾性係数、 η, η_2, η_3 は粘性係数、 χ は磁化率、 x は熱伝導率である。また、圧力 p は磁化による電磁圧力部分および熱膨張を表す部分も含んでいる。これらの磁性流体の構成方程式は粘弾性を考慮して熱力学的に許される項のみを含んでおり、また、従来の構成方程式にはなかった非線形項をも含んでいる。すなわち、式(70)の右辺第4項 $\lambda_3 e \cdot e$ および第7項 $4\eta_3 d \cdot d$ である。これらの項を含むことから、磁性流体の持つ磁性効果以外の非 Newton 性をも表すことができる。また、基本不変量から最大散逸速度の原理を用いて構成方程式を決定する手法は、結合過程の場合のみならず複合過程を仮定して構成方程式を決定する場合にも用いることができる。この手法によると基本不変量から表示定理^{(11)~(13)}を用いて構成方程式を決定する場合と比較して、構成方程式を構成する項の

数が少なくなっている。これは表示定理が単に数学的に導出されたものであるのに対して、最大散逸速度の原理は熱力学による物理的な制限条件であるためである。以上のように、熱力学的手法を基礎とした基本不変量理論と最大散逸速度の原理による構成方程式の決定方法は従来の手法に比べて非常に優れているといえる。

7. 支配方程式系

前章までに得られた結果をまとめ、結合過程の場合について基礎方程式を具体化しておく。式(5)および(49)を考慮すると、非導電性磁性流体の基礎方程式系は以下のようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv}{dt} = & -\nabla p + \lambda_1 \nabla (\text{tr } e) + \lambda_2 \nabla \cdot e \\ & + \lambda_3 \{ (\nabla \cdot e) \cdot e + e \cdot \nabla e \} \\ & + (\eta + \eta_2) \nabla (\nabla \cdot v) + \eta \nabla^2 v + \eta_3 \{ \{ \nabla v \\ & + (\nabla v)^t \} : \nabla (\nabla v) + \nabla (\nabla v) : \{ \nabla v + (\nabla v)^t \} \\ & + \{ \nabla^2 v + \nabla (\nabla \cdot v) \} \cdot \{ \nabla v + (\nabla v)^t \} \} \\ & + M \cdot \nabla H + \rho f \quad \dots\dots\dots (71) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho T \frac{ds}{dt} = & \eta_2 (\text{tr } d)^2 + 2\eta d : d \\ & + 4\eta_3 d^2 : d - x \nabla^2 T + \rho r \quad \dots\dots\dots (72) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\nabla \times H = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$B = \mu_0 H + M \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$M = \chi H \quad \dots\dots\dots (60)$$

8. 結 言

前章までの結果、以下のような結論を得た。

(1) 基本不変量から最大散逸速度の原理を用いて磁性流体の構成方程式を熱力学的に厳密に導出する方法を提案した。

(2) 最大散逸速度の原理に基づく構成方程式の決定手法は従来の方法と比較して以下のような特徴を持っている。

(a) 構成方程式には熱力学的に許される項のみが含まれている。

(b) 標構無差別性の原理が満足されるように構成方程式が決定される。

(c) 線形項のみならず非線形項をも含めて導出できる。このため磁性流体の持つ磁性効果以外の非 Newton 性をも表現できる。

(d) 従来の結合過程の場合のみならず、複合過程を仮定した場合においても構成方程式を導出することができる。

最後に、本研究において、慶応義塾大学理工学部・志澤一之氏の適切な助言を得たことを感謝する。

文 献

- (1) Eringen, A. C., *Nonlinear Theory of Continuous Media*, (1962), 135, McGraw-Hill, New York.
- (2) Eringen, A. C., *Continuum Physics*, 4 (1971), 240, Academic Press.
- (3) Hsieh, R. K. T., *J. Mag. Mag. Mat.*, 39 (1983), 1.
- (4) Neuringer, J. L. and Rosensweig, R. E., *Phys. Fluids*, 7-12 (1964), 1927.
- (5) Shizawa, K. and Tanahashi, T., *Bull. JSME*, 28-234 (1985), 1924.
- (6) Shizawa, K. and Tanahashi, T., *Bull. JSME*, 29-250 (1986-a), 1171.
- (7) Shizawa, K. and Tanahashi, T., *Bull. JSME*, 29-255 (1986-b), 2878.
- (8) 志澤・棚橋, 機論, 52-480, B (1986-c), 2905.
- (9) Shliomis, M. I., *Sov. Phys. JETP*, 34-6 (1972), 1291.
- (10) Shliomis, M. I., *Sel. Phys. Usp.*, 17-2 (1974), 153.
- (11) Spencer, A. J. and Rivlin, R. S., *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 2 (1959-a), 309.
- (12) Spencer, A. J. and Rivlin, R. S., *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 2 (1959-b), 435.
- (13) Spencer, A. J. and Rivlin, R. S., *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 4 (1960), 214.
- (14) 棚橋, 機械の研究, 35 (1983), 930.
- (15) Tarapov, I. E., *Magnt. Gidrodin.*, No. 1 (1972), 3.
- (16) Ziegler, H., *An Introduction to Thermomechanics*, (1983), 245, North-Holland Publishing Co..

討 論

〔質問〕 神 山 新 一〔東北大学高速力学研究所〕

(1) 貴研究での基礎式を実際の磁性流体の流動特性を求めるのに用いる場合には、実験条件に合せて係数 $\lambda \sim \lambda_3$, $\eta \sim \eta_3$ を決定せねばならず、粒子の微視的な振舞いを考慮していない貴解析ではその適用が難しいのではないか。

(2) 著者が先に提案した粘弾性を考慮した基礎式〔文献(8)〕ではどういう不都合が生じるのかを具体的に示していただきたい。

〔回答〕 (1) ご指摘のように本研究では極性を無視しているため、粒子の微視的な振舞い、特にその内部回転による効果が顕著に現れるような場合には適用できないものと考えられる。したがって、本研究における構成方程式あるいは基礎方程式の適用範囲はこのような磁性粒子の影響がほとんど無視できるような場合に限られる。より一般的に磁性流体の流動特性を記述するためには極性を考慮する必要があると言え

る。しかし、本研究では、特に従来の多くの理論において問題となっている標構無差別性の原理を満足するように構成方程式を決定する新しい手法の紹介が主眼であり、前述のようなより一般的な磁性流体の構成方程式あるいは基礎方程式の誘導は次の課題である。

(2) 著者らが先に提案した粘弾性を考慮した磁性流体の基礎方程式において特に問題があると言えるのは、粘弾性の効果は一応考慮されているが十分ではないということである。粘弾性、特にその弾性部分は固体的な性質であるが、従来の極性固体の理論などにおいてもそうであるように、応力テンソルのみならず偶応力テンソルも弾性部分を有していなければならない。また、内部回転における弾性効果も考慮される必要がある。したがって、先に提案した構成方程式においてはこの偶応力テンソルの弾性部分および内部回転の弾性効果が無視されているため、弾性効果が十分に考慮されているとは言えない。