改定 k - ε モデルの自由せん断乱流への適用* (第3報, モデル定数の実験データによる総合的評価)

竹 光 信 正*¹

An Application of Revised k - ε Model to the turbulent Shear Flow (3Rd Report, A Synthetic Estimation of Model Constants)

Nobumasa TAKEMITSU

A synthetic estimation of the range of model constants in the revised k - ε model is made using the results of previous papers. The range of all model constants in the revised k - ε model is estimated using the analytical similarity solution, experimental data and a LES data base. It is necessary to make the range narrower from the viewpoint of numerical stability and numerical agreement with experiments by applying this model to many turbulent flows.

Key Words: Turbulence, Revised k - ε Model, Grid Turbulence, Wall Turbulence Free Turbulent Shear Flow

1. 緒 言

工学的観点からよく使われている乱流モデルとして標準 k - ε モデル⁽¹⁾をあげることができる。実際、標準 k - ε モデルは、物理的観点からもよくできているモデルであり、またモデル定数の吟味もよくなされている。しかし、不幸なことに、標準 k - ε モデルを最も簡単な乱流場の一つである二次元平行平板間の乱流場に適用した場合、2次の漸近解が発散項をもつので数学的に適性なモデルではない⁽²⁾。

そこで、物理的根拠もあり、数学的にも適性な乱流モデルとして、Yoshizawa⁽³⁾⁽⁴⁾の統計理論の結果を利用した改定 k - ε モデルを提案した⁽⁵⁾。ところが、この改定 k - ε モデルのモデル定数の存在範囲は極めて広く、これを工学的観点から使える形にするためにはもっとモデル定数の範囲を狭める必要がある。

この観点にたつて、著者は改定 k - ε モデルを自由せん断乱流に適用し、解析的研究と実験データによってモデル定数の範囲を狭くした⁽⁶⁾⁽⁷⁾。しかし、これまでの研究によると、乱流エネルギー方程式のモデル定数の

範囲は定めることができたが、エネルギー散逸率の方程式のモデル定数の範囲をすべて定めることはできなかった。

本論文において、これまでの研究結果と主流が一方向流の乱流場の結果⁽⁸⁾を使い、これらのモデル定数の存在範囲をすべて定めることにする。

2. 改定 k - ε モデル

改定 k - ε モデルの一般形は、現在のところ次のように書ける⁽⁵⁾。

$$\frac{DU_a}{Dt} = \frac{\partial U_a}{\partial t} + U_a \frac{\partial U_a}{\partial x_a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_a} + \frac{\partial R_{aa}}{\partial x_a} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$D = \frac{\partial U_a}{\partial x_a} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} = P - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(c_{k1} \nu_e \frac{\partial k}{\partial x_a} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial x_a} \left(c_{k2} \nu_e \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_a} \right) \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = c_{\varepsilon 1} \nu_e \frac{\varepsilon}{k} \left(\frac{\partial U_a}{\partial x_a} \right)^2 + c_{\varepsilon 2} \nu_e \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial U_a}{\partial x_b} \frac{\partial U_b}{\partial x_a} \\ - c_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(c_{\varepsilon 4} \nu_e \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_a} \right) \\ - \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial}{\partial x_a} \left(c_{\varepsilon 5} \nu_e \frac{\partial k}{\partial x_a} \right) - c_{\varepsilon 6} \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_a} \right)^2 \end{aligned}$$

* 平成元年3月10日 東海支部第38期総会講演会において講演、原稿受付 昭和63年9月2日。

*¹ 正員、東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木7-22-1)。

$$+c_{\nu}c_{\varepsilon 7}\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_a}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_a}-c_{\nu}c_{\varepsilon 8}\left(\frac{\partial k}{\partial x_a}\right)^2 \dots\dots\dots (4)$$

$$\nu_e=c_{\nu}\frac{k^2}{\varepsilon} \dots\dots\dots (5)$$

ここで, U_a は平均流の速度ベクトル ($a=1, 2, 3$), x_a は位置ベクトル, t は時間, D/Dt は Lagrange 微分, ρ は流体の密度, p は平均流の圧力, D は膨張速度を表し, 繰返し下付添字は 1 から 3 までの和をとるものとする。また, k は乱流エネルギー, ε はエネルギー散逸率, ν_e は渦粘性率を表し, k と ε は擾乱速度ベクトル u_a , 流体の動粘性率 ν を使うと

$$k=\langle u_a u_a \rangle / 2 \dots\dots\dots (6)$$

$$\varepsilon=\nu\left\langle \frac{\partial u_a}{\partial x_a} \frac{\partial u_a}{\partial x_a} \right\rangle \dots\dots\dots (7)$$

で定義される。 $\langle \rangle$ はアンサンブル平均を表す。

式(1)における R_{ab} は Reynolds 応力で Kronecker のデルタ記号 δ_{ab} を使うと

$$R_{ab}=-\frac{2}{3}k\delta_{ab}+\nu_e\left(\frac{\partial U_a}{\partial x_b}+\frac{\partial U_b}{\partial x_a}\right) \dots\dots\dots (8)$$

とモデル化される。また, 式(3)における P は発生項で

$$P=R_{ab}\frac{\partial U_b}{\partial x_a} \dots\dots\dots (9)$$

と書ける。なお, ε 方程式における第 1 項と第 2 項は, その後の研究⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾により付け加えられた項で, 式(3)~(5)における c_{ν} , c_{k1} , c_{k2} , $c_{\varepsilon 1} \sim c_{\varepsilon 8}$ はモデル定数である。

3. 改定 k - ε モデルの 各種乱流場への適用

この章においては, 改定 k - ε モデルのすべてのモデル定数の存在範囲を明らかにするために, 既報の論文^{(5)~(8)}において得られた結果を列挙する。

3.1 格子乱流⁽⁶⁾ 改定 k - ε モデル式(1)~(9)を格子乱流に適用すると, U を主流速度, x を減衰方向として,

$$U\frac{\partial k}{\partial x}=-\varepsilon+\frac{\partial}{\partial x}\left(c_{k1}\nu_e\frac{\partial k}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(c_{k2}\nu_e\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right) \dots\dots\dots (10)$$

$$U\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}=-c_{\varepsilon 3}\frac{\varepsilon^2}{k}+\frac{\partial}{\partial x}\left(c_{\varepsilon 4}\nu_e\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)-\frac{\varepsilon}{k}\frac{\partial}{\partial x}\left(c_{\varepsilon 5}\nu_e\frac{\partial k}{\partial x}\right)-c_{\nu}c_{\varepsilon 6}\frac{k^2}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)^2+c_{\nu}c_{\varepsilon 7}\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}-c_{\nu}c_{\varepsilon 8}\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)^2 \dots\dots\dots (11)$$

$$\nu_e=c_{\nu}k^2/\varepsilon \dots\dots\dots (12)$$

となる。方程式系(10)~(12)の解は格子乱流の減衰初期において

$$k=AU^2x^{-m}, \quad \varepsilon=mAU^3x^{-m-1} \dots\dots\dots (13)$$

$$A=\text{const.} \approx 1/90, \quad m=1.0 \sim 1.3^{(11)}$$

の形に書ける。ここで, $x-x_0$ (x_0 : 仮想原点) の代わりに x とおいた。

解(13)を式(11)に代入すると, $O(x^{-m-2})$ で

$$c_{\varepsilon 3}=1+1/m \dots\dots\dots (14)$$

が成り立つ。解(13)が減衰終期まで成り立つと仮定すると, 強い条件

$$c_{k1}/c_{k2}=1+1/m \dots\dots\dots (15 \cdot a)$$

$$(m+1)(2m+1)c_{\varepsilon 4}-2m^2c_{\varepsilon 5}-(m+1)^2c_{\varepsilon 6}+m(m+1)c_{\varepsilon 7}-m^2c_{\varepsilon 8}=0 \dots\dots\dots (15 \cdot b)$$

を導くことができる。

3.2 二次元平行平板間の乱流場⁽⁵⁾⁽⁸⁾ 座標系を

図 1 のようにとると, この場合には改定 k - ε モデル(1)~(9)は

$$\nu_e^*\frac{\partial U^*}{\partial y}=1-2y \dots\dots\dots (16)$$

$$\nu_e^*\left(\frac{\partial U^*}{\partial y}\right)^2-\varepsilon^*+\frac{k^2}{\sqrt{c_{\nu}}}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(c_{k1}\nu_e^*\frac{\partial k^*}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(c_{k2}\nu_e^*\frac{k^*}{\varepsilon^*}\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y}\right)\right\}=0 \dots\dots\dots (17)$$

$$c_{\varepsilon 1}\nu_e^*\frac{\varepsilon^*}{k^*}\left(\frac{\partial U^*}{\partial y}\right)^2-c_{\varepsilon 3}\frac{\varepsilon^{*2}}{k^*}+\frac{x^2}{\sqrt{c_{\nu}}}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(c_{\varepsilon 4}\nu_e^*\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y}\right)-\frac{\varepsilon^*}{k^*}\frac{\partial}{\partial y}\left(c_{\varepsilon 5}\nu_e^*\frac{\partial k^*}{\partial y}\right)\right\}+\frac{x^2}{\sqrt{c_{\nu}}}\left\{-c_{\varepsilon 6}\frac{k^{*2}}{\varepsilon^{*2}}\left(\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y}\right)^2+c_{\varepsilon 7}\frac{k^*}{\varepsilon^*}\frac{\partial k^*}{\partial y}\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y}-c_{\varepsilon 8}\left(\frac{\partial k^*}{\partial y}\right)^2\right\}=0 \dots\dots\dots (18)$$

$$\nu_e^*=k^{*2}/\varepsilon^* \dots\dots\dots (19)$$

$$R_{12}^*=\nu_e^*(\partial U^*/\partial y) \dots\dots\dots (20)$$

となる。ただし, 流れ場の代表速度 V , 代表長さ L を使って無次元化

$$x_a \rightarrow Lx_a, \quad U_a \rightarrow VU_a, \quad p \rightarrow \rho V^2 p, \quad \nu_e \rightarrow \nu \nu_e$$

$$k \rightarrow V^2 k, \quad \varepsilon \rightarrow (V^3/L)\varepsilon, \quad R_{12} \rightarrow V^2 R_{12} \dots\dots\dots (21)$$

および変換

$$U=(u_{\tau}/x)U^*, \quad k=(u_{\tau}^2/\sqrt{c_{\nu}})k^*, \quad \varepsilon=(u_{\tau}^3/x)\varepsilon^*$$

図 1 二次元平行平板間の乱流場

$$\nu_e = R_\varepsilon x u_\tau \nu_e^*, R_{12} = u_\tau^2 R_{12}^* \quad (22)$$

を施した。

方程式系(16)～(20)の解は、 y が小さいとき1次までの漸近解で

$$U^* = \ln y^* - (a_1 + 2)y + A^*, y^* = R_\varepsilon u_\tau y \quad (23 \cdot a)$$

$$\nu_e^* = y(a_0 + a_1 y) \quad (23 \cdot b)$$

$$k^* = b_0 + b_1 y \quad (23 \cdot c)$$

$$\varepsilon^* = (c_0 + c_1 y)/y \quad (23 \cdot d)$$

$$A^* = \text{const.}, a_0 = b_0 = c_0 = 1 \quad (23 \cdot e)$$

$$R_{12}^* = 1 - 2y \quad (23 \cdot f)$$

となり、 y が大きいとき、 $Y = y - 1/2$ とおいて

$$U^* = U_0 + U_2 Y^2 \quad (24 \cdot a)$$

$$\nu_e^* = A_0 + A_2 Y^2 \quad (24 \cdot b)$$

$$k^* = B_0 + B_2 Y^2 \quad (24 \cdot c)$$

$$\varepsilon^* = C_0 + C_2 Y^2 \quad (24 \cdot d)$$

$$R_{12}^* = -2Y = 1 - 2y \quad (24 \cdot e)$$

となる。ただし、これらの係数の間には

$$c_1 = -a_1 + 2b_1, \quad (25)$$

$$U_2 = -1/A_0 \quad (26 \cdot a)$$

$$C_0 = B_0^2/A_0 \quad (26 \cdot b)$$

$$C_2/C_0 = 2B_2/B_0 - A^2/A_0 \quad (26 \cdot c)$$

の関係がある。零次の漸近解(壁関数)を ε 方程式(18)に代入すると、 $O(y^{-2})$ で

$$c_{\varepsilon 1} - c_{\varepsilon 3} + \lambda(c_{\varepsilon 4} - c_{\varepsilon 6}) = 0, \lambda = x^2/\sqrt{c_\nu} \quad (27)$$

が成り立つ。また、1次までの解(23)、(24)を(17)～(18)に代入すると、

$$\lambda b_1 c_{k1} + \lambda(a_1 + b_1 - c_1)c_{k2} = a_1 + c_1 + 4 \quad (28)$$

$$2\lambda A_0 B_2 c_{k1} - 2\lambda(A_0 B_0 C_2/C_0)c_{k2} = C_0 \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & -(a_1 + b_1 - c_1 + 4)c_{\varepsilon 1} + (b_1 - 2c_1)c_{\varepsilon 3} \\ & + \lambda\{-b_1 c_{\varepsilon 5} + (-a_1 + c_1)c_{\varepsilon 6} - b_1 c_{\varepsilon 7}\} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$$2\lambda A_0 C_2 c_{\varepsilon 4} - 2\lambda(A_0 C_0 B_2/B_0)c_{\varepsilon 5} = c_{\varepsilon 3} C_0^2/B_0 \quad (31)$$

が得られる。

式(23)、(24)の係数 a_0, b_0, c_0 等は、実験データ^{(12)～(16)}と LES のデータベース⁽¹⁷⁾から

$$a_0 = 0.80572 \sim 1.1977 \quad (32 \cdot a)$$

$$a_1 = -4.2814 \sim -1.6392 \quad (32 \cdot b)$$

$$b_0 = 0.76940 \sim 1.3658 \quad (33 \cdot a)$$

$$b_1 = -4.3504 \sim -1.1832 \quad (33 \cdot b)$$

$$c_0 = 0.8000 \sim 1.0000 \quad (34 \cdot a)$$

$$c_1 = -7.0615 \sim -1.1293 \quad (34 \cdot b)$$

$$A_0 = 0.078962 \sim 0.085738 \quad (35 \cdot a)$$

$$A_2 = 0.16373 \sim 0.80502 \quad (35 \cdot b)$$

$$B_0 = 0.16768 \sim 0.22665 \quad (36 \cdot a)$$

$$B_2 = 3.5924 \sim 6.4842 \quad (36 \cdot b)$$

$$C_0 = 0.20050 \sim 0.63837 \quad (37 \cdot a)$$

$$C_2 = 9.0655 \sim 35.669 \quad (37 \cdot b)$$

と評価される。

なお、この場合の強い条件は、式(27)で λ の値のいかにかわらず式(27)が成り立つと仮定して

$$c_{\varepsilon 1} = c_{\varepsilon 3}, c_{\varepsilon 4} = c_{\varepsilon 6} \quad (38)$$

である。

3.3 自由噴流⁽⁶⁾ 座標系を図2のようにとり、下流方向の各点で運動量

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \rho U^2 dy \quad (39)$$

が保存すると仮定すると、改定 $k-\varepsilon$ モデル式(1)～(9)は相似変換

$$\left. \begin{aligned} U &= U_s F'(\eta), \quad \eta = y/\sqrt{c_\nu} x \\ U_s &= C U_j (d/x)^{1/2}, \quad l = A_j x, \quad A_j, C: \text{const.} \\ k &= U_s^2 G(\eta), \quad \varepsilon = (U_s^3/xH(\eta)) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

U_j : ノズル出口での噴流速度, d : ノズル幅を施して

$$\frac{G^2}{H} F'' + \frac{1}{2} F F' = 0 \quad (41 \cdot a)$$

$$\text{B. C. } \eta=0 \text{ で } F=0, F'=1 \quad (41 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} c_{k1} \left(\frac{G^2}{H} G' \right)' - c_{k2} \left(\frac{G^3}{H^2} H' \right)' + \frac{G^2}{H} F''^2 \\ - H + F' G + \frac{1}{2} F G' = 0 \end{aligned} \quad (42 \cdot a)$$

$$\text{B. C. } \eta=0 \text{ で } G'=0, \eta \rightarrow \infty \text{ で } G \rightarrow 0 \quad (42 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} c_{\varepsilon 4} \left(\frac{G^2}{H} H' \right)' - c_{\varepsilon 5} \frac{H}{G} \left(\frac{G^2}{H} G' \right)' + c_{\varepsilon 1} G F'' - c_{\varepsilon 3} \frac{H^2}{G} \\ - c_{\varepsilon 6} \frac{G^2}{H^2} H'^2 + c_{\varepsilon 7} \frac{G}{H} H' G' - c_{\varepsilon 8} G^2 \\ + \frac{5}{2} F' H + \frac{1}{2} F H' = 0 \end{aligned} \quad (43 \cdot a)$$

$$\text{B. C. } \eta=0 \text{ で } H'=0, \eta \rightarrow \infty \text{ で } H \rightarrow 0 \quad (43 \cdot b)$$

となる。ただし、記号 B. C. は境界条件を意味し、' は η に関する微分を表す。また、 $U_\infty = 0$ とする。

方程式系(41)～(43)の解は、 $\eta \ll 1$ のとき

$$F' = 1 - a_j \eta^2, F = \eta - (a_j/3) \eta^3 \quad (44 \cdot a)$$

図2 自由噴流

$$G = G_j + b_j \eta^2 \dots\dots\dots (44 \cdot b)$$

$$H = H_j + c_j \eta^2 \dots\dots\dots (44 \cdot c)$$

$$a_j, b_j, c_j, G_j, H_j: \text{const.}$$

の形に近似でき、関係式

$$a_j = H_j / 4 G_j^2 \dots\dots\dots (45)$$

$$2 b_j c_{k1} \frac{G_j^2}{H_j} - 2 c_j c_{k2} \frac{G_j^3}{H_j^2} = H_j - G_j \dots\dots\dots (46)$$

$$2 c_j c_{e4} \frac{G_j^2}{H_j} - 2 b_j c_{e5} G_j = c_{e3} \frac{H_j^2}{G_j} - \frac{5}{2} H_j \dots\dots\dots (47)$$

が成立する。 $\eta \gg 1$ のときは

$$F = F_e - A_j \delta^{\alpha_j}, G = B_j \delta^{\beta_j}, H = C_j \delta^{\gamma_j} \dots\dots\dots (48)$$

$$\delta = \eta_e - \eta$$

の形に仮定でき、関係式

$$2 \beta_j - \gamma_j = 1, (\alpha_j - 1) B_j^2 = C_j F_e / 2 \dots\dots\dots (49)$$

$$\beta_j c_{k1} - \gamma_j c_{k2} = \alpha_j - 1 \dots\dots\dots (50)$$

$$\gamma_j (c_{e4} - c_{e5}) - \beta_j^2 (c_{e5} + c_{e8}) + \beta_j \gamma_j c_{e7} = \gamma_j (\alpha_j - 1) \dots\dots\dots (51)$$

が成立する。ここで、添字 e は噴流端部における値を表す。

式(44)～(51)における a_j, b_j, c_j 等は、実験データ⁽¹⁸⁾から

$$a_j = 5.1956 \sim 6.4460 \dots\dots\dots (52 \cdot a)$$

$$b_j = 0.28709 \sim 0.51242 \dots\dots\dots (52 \cdot b)$$

$$c_j = 0.059536 \sim 0.22822 \dots\dots\dots (52 \cdot c)$$

$$G_j = 0.060845 \sim 0.074366 \dots\dots\dots (53 \cdot a)$$

$$H_j = 0.11327 \sim 0.13844 \dots\dots\dots (53 \cdot b)$$

$$A_j = 2.1948 \sim 2.7683 \dots\dots\dots (54 \cdot a)$$

$$B_j = 0.15128 \sim 0.22043 \dots\dots\dots (54 \cdot b)$$

$$C_j = 0.31938 \sim 0.52844 \dots\dots\dots (54 \cdot c)$$

$$\alpha_j = 1.5027 \sim 1.6699 \dots\dots\dots (55 \cdot a)$$

$$\beta_j = 1.0027 \sim 1.1877 \dots\dots\dots (55 \cdot b)$$

$$\gamma_j = 1.0008 \sim 1.3740 \dots\dots\dots (55 \cdot c)$$

と評価できる。

なお、 $\eta \gg 1$ のとき、式(48)が十分よい近似で成り立

図3 乱流後流

つとすると、強い条件

$$\alpha_j - 1 = \beta_j \dots\dots\dots (56 \cdot a)$$

$$A_j^2 B_j^2 \alpha_j^2 (\alpha_j - 1)^2 = C_j^2 \dots\dots\dots (56 \cdot b)$$

$$c_{e1} = c_{e3} \dots\dots\dots (56 \cdot c)$$

が得られる。

3・4 乱流後流⁽⁷⁾ この場合には、座標系を図3のようにとり、 $x + x_0$ (x_0 : 仮想原点) を x とおき

$$U_\infty \gg U_s \dots\dots\dots (57)$$

が成り立つものとして、運動量

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \rho U (U_\infty - U) dy$$

が保存されるものとする。このとき、相似変換

$$\left. \begin{aligned} U_\infty - U &= U_s f(\eta), \quad \eta = y / A_D \sqrt{C_v dx} = y / l \\ U_s &= A_D U_\infty (x/d)^{-1/2}, \quad A_D = \text{const.} \approx 1 \\ k &= U_s^2 g(\eta), \quad \epsilon (U_s^3 / A_D \sqrt{dx}) h(\eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (58)$$

d : 円柱の直径

を施すと、改定 $k-\epsilon$ モデル式(1)～(9)は

$$\frac{g^2}{h} f' + \frac{1}{2} \eta f = 0 \dots\dots\dots (59 \cdot a)$$

$$\text{B. C. } \eta = 0 \text{ で } f = 1 \dots\dots\dots (59 \cdot b)$$

$$c_{k1} \left(\frac{g^2}{h} g' \right)' - c_{k2} \left(\frac{g^3}{h^2} h' \right)' + \frac{g^2}{h} f'^2 - h + g + \frac{1}{2} \eta g' = 0 \dots\dots\dots (60 \cdot a)$$

$$\text{B. C. } \eta = 0 \text{ で } g' = 0, \eta \rightarrow \infty \text{ で } g \rightarrow 0 \dots\dots\dots (60 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} c_{e4} \left(\frac{g^2}{h} \right)' - c_{e5} \frac{h}{g} \left(\frac{g^2}{h} g' \right)' + c_{e1} g f'^2 \\ - c_{e3} \frac{h^2}{g} - c_{e6} \frac{g^2}{h^2} h'^2 + c_{e7} \frac{g}{h} h' g' - c_{e8} g'^2 \\ + 2h + \frac{1}{2} \eta h' = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (61 \cdot a)$$

$$\text{B. C. } \eta = 0 \text{ で } h' = 0, \eta \rightarrow \infty \text{ で } h \rightarrow 0 \dots\dots\dots (61 \cdot b)$$

となる。ただし、' は η に関する微分を意味する。

方程式系(59)～(61)の解は、 $\eta \ll 1$ のとき

$$f = 1 - a_w \eta^2 \dots\dots\dots (62 \cdot a)$$

$$g = g_w + b_w \eta^2 \dots\dots\dots (62 \cdot b)$$

$$h = h_w + c_w \eta^2 \dots\dots\dots (62 \cdot c)$$

の形に近似でき、関係式

$$a_w = h_w / 4 g_w^2 \dots\dots\dots (63)$$

$$2 b_w \frac{g_w^2}{h_w} c_{k1} - 2 c_w \frac{g_w^3}{h_w^2} c_{k2} = h_w - g_w \dots\dots\dots (64)$$

$$2 c_w \frac{g_w^2}{h_w} c_{e4} - 2 b_w g_w c_{e5} = \frac{h_w^2}{g_w} c_{e3} - 2 h_w \dots\dots\dots (65)$$

が成り立つ。 $\eta \gg 1$ の場合は、方程式系(59)～(61)の解は

$$f = A_w \delta^{\alpha_w} \dots\dots\dots (66 \cdot a)$$

$$g = B_w \delta^{\beta_w} \dots\dots\dots (66 \cdot a)$$

$$h = C_w \delta^{\gamma_w} \dots\dots\dots (66 \cdot c)$$

$\delta = \eta_e - \eta$, η_e : 後流端部における η の値

の形に近似でき, 関係式

$$2\beta_w - \gamma_w = 1, \eta_e = 2B_w^2 \alpha_w / C_w \dots\dots\dots (67)$$

$$\beta_w C_{k1} - \gamma_w C_{k2} = \alpha_w \dots\dots\dots (68)$$

$$\gamma_w^2 (C_{\varepsilon 4} - C_{\varepsilon 6}) - \beta_w^2 (C_{\varepsilon 5} + C_{\varepsilon 8}) + \beta_w \gamma_w C_{\varepsilon 7} = \alpha_w \gamma_w \dots\dots\dots (69)$$

が成立する.

式(62)~(69)における a_w, b_w, c_w 等は, 実験データ⁽¹⁹⁾から

$$a_w = 0.86147 \sim 1.7610 \dots\dots\dots (70 \cdot a)$$

$$b_w = 0.011735 \sim 0.17100 \dots\dots\dots (70 \cdot b)$$

$$c_w = 0.0079237 \sim 0.098021 \dots\dots\dots (70 \cdot c)$$

$$g_w = 0.086827 \sim 0.16125 \dots\dots\dots (71 \cdot a)$$

$$h_w = 0.081984 \sim 0.15226 \dots\dots\dots (71 \cdot b)$$

$$A_w = 0.61545 \sim 0.85908 \dots\dots\dots (72 \cdot a)$$

$$B_w = 0.057886 \sim 0.081321 \dots\dots\dots (72 \cdot b)$$

$$C_w = 0.067456 \sim 0.10017 \dots\dots\dots (72 \cdot c)$$

$$\alpha_w = 1.4836 \sim 2.0909 \dots\dots\dots (73 \cdot a)$$

$$\beta_w = 1.0584 \sim 1.2097 \dots\dots\dots (73 \cdot b)$$

$$\gamma_w = 1.0957 \sim 1.4497 \dots\dots\dots (73 \cdot c)$$

と評価できる. ただし, 式(70・c)の c_w は実験データでは $c_w < 0$ であるが, モデル方程式が近似的に乱流の物理量を表現できるように $c_w > 0$ とした.

なお, 解(66)が $\eta \gg 1$ で十分よい近似であるとする, 強い条件

$$\alpha_w = \beta_w \dots\dots\dots (74 \cdot a)$$

$$\alpha_w^2 A_w^2 B_w^2 = C_w^2 \dots\dots\dots (74 \cdot b)$$

$$C_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 3} \dots\dots\dots (74 \cdot c)$$

が得られる.

3・5 乱流混合層⁽⁷⁾ 座標系を図4のようにとり,

$$U_\infty - U_0 = U_s = \text{const.} \dots\dots\dots (75)$$

として, 相似変換

図4 乱流混合層

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0 + U_s F'(\eta), \quad \eta = y / \sqrt{C_w x} \\ k &= U_s^2 G(\eta), \quad \varepsilon = U_s^3 H(\eta) / x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (76)$$

を施すと, 改定 $k-\varepsilon$ モデル式(1)~(9)は

$$\left(\frac{G^2}{H} F'' \right)' + F F'' + \frac{U_0}{U_s} \eta F'' = 0 \dots\dots\dots (77 \cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{B. C. } \eta = 0 \text{ で } F' &= 1/2 \\ \eta \rightarrow -\infty \text{ で } F' &\rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty \text{ で } F' \rightarrow 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (77 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} c_{k1} \left(\frac{G^2}{H} G' \right)' - c_{k2} \left(\frac{G^3}{H^2} H' \right)' + \frac{G^2}{H} F''^2 \\ - H + F G' + \frac{U_0}{U_s} \eta G' = 0 \dots\dots\dots (78 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\text{B. C. } \eta \rightarrow \pm \infty \text{ で } G \rightarrow 0 \dots\dots\dots (78 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} c_{\varepsilon 4} \left(\frac{G^2}{H} H' \right)' - c_{\varepsilon 5} \frac{H}{G} \left(\frac{G^2}{H} G' \right)' + c_{\varepsilon 1} G F''^2 \\ - c_{\varepsilon 3} \frac{H^2}{G} - c_{\varepsilon 6} \frac{G^2}{H^2} H'^2 + c_{\varepsilon 7} \frac{G}{H} H' G' - c_{\varepsilon 8} G'^2 \\ + F H' + \frac{U_0}{U_s} \eta H' = 0 \dots\dots\dots (79 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\text{B. C. } \eta \rightarrow \pm \infty \text{ で } H \rightarrow 0 \dots\dots\dots (79 \cdot b)$$

となる. ここで, ' は η に関する微分を表す.

方程式系(77)~(79)の解は, $|\eta| \ll 1$ のとき

$$F' = F_m + a_m \eta \dots\dots\dots (80 \cdot a)$$

$$F = F_m \eta + a_m \eta^2 / 2 \dots\dots\dots (80 \cdot b)$$

$$G = G_m + b_m (\eta - \eta_0)^2 \dots\dots\dots (80 \cdot c)$$

$$H = H_m + c_m (\eta - \eta_0)^2 \dots\dots\dots (80 \cdot d)$$

η_0 : 近似のための仮想原点

の形に近似でき, 関係式

$$\left\{ 2a_m \frac{G_m^2}{H_m} \left(-\frac{c_m}{H_m} + \frac{2b_m}{G_m} \right) + a_m F_m + a_m \frac{U_0}{U_s} \right\} \eta = 0 \dots\dots\dots (81)$$

$$2b_m \frac{G_m^2}{H_m} c_{k1} - 2c_m \frac{G_m^3}{H_m} c_{k2} = -a_m^2 \frac{G_m^2}{H_m} + H_m \dots\dots (82)$$

$$2c_m \frac{G_m^2}{H_m} c_{\varepsilon 4} - 2b_m G_m c_{\varepsilon 5} + a_m^2 G_m c_{\varepsilon 1} = c_{\varepsilon 3} \frac{H_m^2}{G_m} \dots\dots\dots (83)$$

が成り立つ. $\eta \ll -1$ のとき, 方程式系(77)~(79)の解は

$$F' = A_1 \delta_1^{\alpha_1} \dots\dots\dots (84 \cdot a)$$

$$F = F_{e1} - A_1 \delta_1^{\alpha_1+1} / (\alpha_1 + 1) \dots\dots\dots (84 \cdot b)$$

$$G = B_1 \delta_1^{\beta_1} \dots\dots\dots (84 \cdot c)$$

$$H = C_1 \delta_1^{\gamma_1} \dots\dots\dots (84 \cdot d)$$

$$\delta_1 = \eta - \eta_{-\infty} \dots\dots\dots (84 \cdot e)$$

$\eta_{-\infty}$: $\eta \rightarrow -\infty$ における η の値

の形に近似でき, 関係式

$$2\beta_1 - \gamma_1 = 1, \alpha_1 B_1^2 / C_1 = F_{e1} + U_0 \eta_{-\infty} / U_s \dots\dots\dots (85)$$

$$\beta_1 C_{k1} - \gamma_1 C_{k2} = \alpha_1 \dots\dots\dots (86)$$

$$\gamma_1^2(C_{\epsilon 4} - C_{\epsilon 6}) - \beta_1^2(C_{\epsilon 5} + C_{\epsilon 8}) + \beta_1 \gamma_1 C_{\epsilon 7} = \alpha_1 \gamma_1 \quad (87)$$

が成り立つ。 $\eta \gg 1$ のときは、解は

$$F' = 1 - A_2 \delta_2^{q_2} \quad (88 \cdot a)$$

$$F = \eta + F_{e2} + A_2 \delta_2^{q_2+1} / (\alpha_2 + 1) \quad (88 \cdot b)$$

$$G = B_2 \delta_2^{q_2} \quad (88 \cdot c)$$

$$H = C_2 \delta_2^{q_2} \quad (88 \cdot d)$$

$$\delta_2 = \eta_\infty - \eta \quad (88 \cdot e)$$

η_∞ : $\eta \rightarrow \infty$ としたときの η の値

の形で近似できて、関係式

$$2\beta_2 - \gamma_2 = 1, \quad \alpha_2 B_2^2 / C_2 = F_{e2} + (1 + U_0 / U_s) \eta_\infty \quad (89)$$

$$\beta_2 C_{k1} - \gamma_2 C_{k2} = \alpha_2 \quad (90)$$

$$\gamma_2^2(C_{\epsilon 4} - C_{\epsilon 6}) - \beta_2^2(C_{\epsilon 5} + C_{\epsilon 8}) + \beta_2 \gamma_2 C_{\epsilon 7} = \alpha_2 \gamma_2 \quad (91)$$

が成り立つ。

式(80)~(91)における a_m, b_m, c_m 等は、実験データ⁽²⁰⁾を使って

$$a_m = 1.1829 \sim 1.3465 \quad (92 \cdot a)$$

$$b_m = -0.8714 \sim -0.1724 \quad (92 \cdot b)$$

$$c_m = -0.9367 \sim -0.06991 \quad (92 \cdot c)$$

$$F_m = 0.5000 \quad (93 \cdot a)$$

$$G_m = 0.02714 \sim 0.04071 \quad (93 \cdot b)$$

$$H_m = 0.01989 \sim 0.02983 \quad (93 \cdot c)$$

$$A_2 = 1.5788 \sim 4.1947 \quad (94 \cdot a)$$

$$B_2 = 0.01207 \sim 0.01688 \quad (94 \cdot b)$$

$$C_2 = 0.09392 \sim 0.1204 \quad (94 \cdot c)$$

$$\alpha_2 = 1.8831 \sim 2.6526 \quad (95 \cdot a)$$

$$\beta_2 = 1.2984 \sim 1.3709 \quad (95 \cdot b)$$

$$\gamma_2 = 1.5583 \sim 1.7064 \quad (95 \cdot c)$$

と評価できる。ただし、 $\eta \ll -1$ のときには、式(84)の形に近似できる実験データは得られなかった。

また、 $\eta \ll -1$ のとき式(84)が十分よい近似であるとすると、 $U_0 = 0$ ならば強い条件

$$\alpha_1 = \beta_1 \quad (96 \cdot a)$$

$$\alpha_1^2 A_1^2 B_1^2 = C_1^2 \quad (96 \cdot b)$$

$$C_{\epsilon 1} = C_{\epsilon 3} \quad (96 \cdot c)$$

が得られる。 $\eta \ll -1$ で $U_0 \neq 0$ のとき、および $\eta \gg 1$ のときは、他の可能性、例えば

$$\beta_1 = \gamma_1, \quad C_1 = \beta_1 B_1 U_0 / U_s \quad (97)$$

もありうるので、これ以上は言及しない。

4. モデル定数の存在範囲

以上に得られた結果を使うと、改定 k - ϵ モデルのすべてのモデル定数の範囲を以下のように定めることができる。

4.1 k 方程式のモデル定数

以下の解析において

では、モデル定数 x と c_v は

$$x = 0.4088, \quad c_v = 0.08654 \quad (98)$$

と固定し⁽²⁾,

$$C_{k1} > 0 \quad (99)$$

となるモデル定数を選んだ。

まず、二次元平行平板間の乱流場の解析結果式(28), (29), (32)~(37)を使うと

$$C_{k1} = 0.0079 \sim 48.456, \quad C_{k2} = -1.9681 \sim 45.767 \quad (100)$$

となる⁽⁸⁾。

次に、自由噴流の解析結果式(46), (50), (52)

~(55)を使うと

$$C_{k1} = 0.72035 \sim 9.9702, \quad C_{k2} = 0.03815 \sim 11.330 \quad (101)$$

が得られる⁽⁶⁾。

また、乱流後流の解析結果式(64)は、モデル方程式が近似的に乱流の物理量を表現できるよう $c_w > 0$ となる c_w を得るために使っているため、乱流後流の解析結果からはモデル定数 C_{k1}, C_{k2} を決めることはできない。

最後に、乱流混合層の解析結果式(82), (90), (92)~(95)を使うと

$$C_{k1} = 0.12226 \sim 29.334, \quad C_{k2} = -1.6004 \sim 21.861 \quad (102)$$

が得られる⁽⁷⁾。

結局、式(100)~(102)から、モデル定数 C_{k1}, C_{k2} は数値の範囲の広い方では

$$C_{k1} = 0.0079 \sim 48.456, \quad C_{k2} = -1.9681 \sim 45.767 \quad (103)$$

となり、数値の範囲の狭い方をとると

$$C_{k1} = 0.72035 \sim 9.9702, \quad C_{k2} = 0.03815 \sim 11.330 \quad (104)$$

となる。ここでは、各種乱流場に共通なモデル定数を求めるという立場から、式(104)を k 方程式のモデル定数の存在範囲とする。

4.2 ϵ 方程式のモデル定数

ϵ 方程式のモデル定数は既報の論文⁽⁶⁾⁽⁷⁾において、そのいくつかは定めることができたが、全部を定めるに至っていない。その理由は、モデル定数を定めるための方程式の数が不足していたことによる。本論文において、これらのモデル定数の存在範囲を以下のようにしてすべて定める。

まず、格子乱流の解析結果式(14)からモデル定数

$$C_{\epsilon 3} = 1.8846 \pm 0.1154 \quad (105)$$

となる。以下の解析では、この値も平均値 1.884 6 で固定した。

次に、モデル定数 c_{e4} , c_{e5} は壁乱流の解析結果 (31), (35)~(37) と自由噴流の解析結果式 (47), (52)~(53) とから

$$\begin{aligned} c_{e4} &= 0.000\ 6 \sim 9.996\ 7, \\ c_{e5} &= -6.460\ 6 \sim 7.228\ 2 \end{aligned} \quad (106)$$

となる。また、自由噴流の解析結果 (47), (52)~(53) と乱流後流の解析結果 (65), (70)~(71) を使うと

$$\begin{aligned} c_{e4} &= 0.007\ 6 \sim 9.963\ 3, \\ c_{e5} &= -3.679\ 0 \sim 7.099\ 6 \end{aligned} \quad (107)$$

となる。ここで、式 (106), (107) を得るための条件として

$$\begin{aligned} (i) \quad c_{e4} &> 0 \quad (108 \cdot a) \\ (ii) \quad |c_{e4}|, |c_{e5}| &< 10 \quad (108 \cdot b) \end{aligned}$$

を使った。もし、条件式 (108・b) を取り除くと

$$\begin{aligned} c_{e4} &= 0.007\ 6 \sim 782.41, \\ c_{e5} &= -3.679\ 0 \sim 192.64 \end{aligned} \quad (109)$$

のような値が得られ、あまりにも範囲が広すぎる。結局、ここでは式 (106), (107) から共通の範囲をとって

$$\begin{aligned} c_{e4} &= 0.007\ 6 \sim 9.963\ 3, \\ c_{e5} &= -3.679\ 0 \sim 7.099\ 6 \end{aligned} \quad (110)$$

とする。

次に、式 (110) の結果と乱流混合層の解析結果式 (83), (92)~(93) とからモデル定数 c_{e1} は

$$c_{e1} = 0.776\ 16 \sim 8.359\ 4 \quad (111)$$

と評価できる。ただし、

$$(i) \quad c_{e1} > 0 \quad (112)$$

となるものを選んだ。もし、 $c_{e1} < 0$ となるものも許せば

$$c_{e1} = -3.659\ 0 \sim 8.359\ 4 \quad (113)$$

が得られる。通常、発生項の係数は正として考えられるので、ここでは式 (111) を c_{e1} の存在範囲とする。

また、モデル定数 c_{e6} は壁乱流の解析結果と式 (111) とから

$$c_{e6} = -1.942\ 6 \sim 21.355 \quad (114)$$

となる。

したがって、モデル定数 c_{e7} は、壁乱流の解析結果

式 (30) と (110)~(111), (114) から

$$c_{e7} = -62.163 \sim 102.37 \quad (115)$$

と評価できる。

そうすると、モデル定数 c_{e8} は、自由噴流の解析結果式 (51), (55) と (110), (114)~(115) から

$$c_{e8} = -523.96 \sim 477.40 \quad (116)$$

となる。また、乱流後流の解析結果式 (69), (73) と (110), (114)~(115) を使うと

$$c_{e8} = -195.81 \sim 192.31 \quad (117)$$

が得られる。さらに、乱流混合層の解析結果式 (91), (95) と (110), (114)~(115) を使うと c_{e8} は

$$c_{e8} = -128.36 \sim 156.87 \quad (118)$$

と評価できる。式 (116)~(118) から各種乱流場に共通なモデル定数として

$$c_{e8} = -128.36 \sim 156.87 \quad (119)$$

が得られる。

結局、 ϵ 方程式のモデル定数は、式 (105), (110)~(111), (114)~(115), (119) から

$$c_{e1} = 0.776\ 2 \sim 8.359\ 4 \quad (120 \cdot a)$$

$$c_{e3} = 1.884\ 6 \pm 0.115\ 4 \quad (120 \cdot b)$$

$$c_{e4} = 0.007\ 6 \sim 9.963\ 3 \quad (120 \cdot c)$$

$$c_{e5} = -3.679\ 0 \sim 7.099\ 6 \quad (120 \cdot d)$$

$$c_{e6} = -1.942\ 6 \sim 21.355 \quad (120 \cdot e)$$

$$c_{e7} = -62.163 \sim 102.37 \quad (120 \cdot f)$$

$$c_{e8} = -128.36 \sim 156.87 \quad (120 \cdot g)$$

と評価できる。また、 c_{e2} は Yoshizawa⁽¹⁰⁾ により

$$c_{e2} = 2.296\ 9 \pm 0.180\ 9 \quad (120 \cdot h)$$

と評価されている。

4・3 強い条件を課した場合のモデル定数 現在のところ、改定 k - ϵ モデルを種々の乱流場に適用して得られた強い条件式 (15), (38), (56), (74), (96) を支持する理由は、統計理論⁽⁴⁾で

$$c_{e1} = c_{e3} \quad (121)$$

が得られた以外見当たらない。例えば、乱流後流において強い条件式 (74・c) を課すと、自由せん断層のところでモデル方程式から

$$\text{対流項} \approx \text{拡散項} \quad (122 \cdot a)$$

のほかに、

表 1 各研究者により評価されたモデル定数

	C_ν	C_{k1}	C_{k2}	C_{e1}	C_{e3}	C_{e4}	C_{e5}	C_{e6}	C_{e7}	C_{e8}
Standard	0.09	1.0	—	1.45	1.9	0.77	—	—	—	—
Yoshizawa	0.0785	16.18	9.17	1.70	1.70	-14.59	-27.50	-15.59	-15.59	—
Hamba	0.069	4.93	1.74	1.16	1.9	0.033	-0.52	-55.1	-158.9	-125.6
Horiuti	0.064	0.91	0.27	1.45	1.9	0.80	-0.42	0.59	1.67	1.48
Nisizima	0.09	0.89	0.33	0.80	1.9	1.11	1.11	—	-1.11	1.11

発生項 $\approx$ 消滅項 (122・b)
 の関係が得られる。こうした関係式(122)は、実験結果⁽¹⁹⁾を説明できるが、このとき得られるべきの関係式(24・a)は実験結果式(73・a), (73・b)を説明できない。

しかしながら、こうした議論は実験結果が正しいという前提に立脚しての議論であり、また、モデル方程式の簡略化という観点からは、強い条件を課すことは一つの望ましい方向と言える。したがって、ここでは得られた結果にあまり拘束されないという考えのもとで強い条件を課すことにする。

さて、自由せん断乱流から得られた強い条件式(56・c), (74・c) (96・c)と壁乱流から得られた結果式(27)を使うと

$$C_{e1} = C_{e3}, C_{e4} = C_{e6} \dots\dots\dots (123)$$

となる。この結果を使って、4・2節で述べたのと同じ順序でモデル定数を決めると最終的に

$$C_{e1} = C_{e3} = 1.884\ 6 \pm 0.115\ 4 \dots\dots\dots (124\cdot a)$$

$$C_{e4} = 0.007\ 6 \sim 9.963\ 3 \dots\dots\dots (124\cdot b)$$

$$C_{e5} = -3.679\ 0 \sim 7.099\ 6 \dots\dots\dots (124\cdot c)$$

$$C_{e6} = C_{e4} \dots\dots\dots (124\cdot d)$$

$$C_{e7} = -38.546 \sim 24.455 \dots\dots\dots (124\cdot e)$$

$$C_{e8} = -76.640 \sim 51.109 \dots\dots\dots (124\cdot f)$$

となる。また、 k 方程式のモデル定数 C_{k1} , C_{k2} は式(15・a), (104)から

$$C_{k1} = 0.720\ 35 \sim 9.970\ 2,$$

$$C_{k2} = (0.43 \sim 0.50) C_{k1} \dots\dots\dots (125)$$

となる。

4・4 統計理論および LES による評価との比較

最近、LES のデータベースを使って k - ε モデルのモデル定数の評価が Hamba⁽²¹⁾と Horiuti⁽¹⁷⁾によってなされた。また、西島⁽²²⁾により壁面まで考慮した壁乱流の計算もなされている。これらの値と Yoshizawa⁽⁴⁾による統計理論から得られた数値、および標準 k - ε モデルで使われている数値⁽²³⁾を比較して表1に示す。ただし、各研究者により k - ε モデル方程式は必ずしも同一の表現になっていない。同一の表現をとるのに必要な C_v の値は、各研究者で用いられているものを使った。

この表の数値と本論文で得られたモデル定数の存在範囲式(104), (120)と C_v の値式(98)を比較すると、モデル定数 C_v , C_{e1} , C_{e3} 以外は各研究者により評価された数値に共通性は見られない。

しかし、各研究者により評価された数値を少し細かくみると次のようなことが言える(標準 k - ε モデルによるモデル定数の評価は、これを二次元平行平板間の乱流場に適用したとき、2次の漸近解が発散する条件

を使ってモデル定数を評価しているのでここでは除外する)。まず、Yoshizawa⁽⁴⁾によるモデル定数の評価で強い条件式(15・a), (38)がほぼ満足されていることに注意したい。ただ、 ε 方程式の拡散項の係数は本来正であるべきであるが、これが負に評価されていることが欠陥になっている。もちろん、これは高次の展開を考慮することによって正と評価されることが期待されている⁽²⁴⁾。

次に、Hamba⁽²¹⁾による乱流混合層の LES によるモデル定数の評価では、モデル定数 $C_{e6} \sim C_{e8}$ の値が他の数値に比べて大きい。これは、計算精度の問題もあるが、これら三つの項は全体の和として考えると他の項の大きさと同程度になっているので、各モデル定数が普通大の大きさでも全体の和として表記の数値の和と同程度であれば乱流混合層はある程度の精度で予測できる可能性がある。

さらに、Horiuti⁽¹⁷⁾による壁乱流の LES の計算による定数の評価では、計算精度のよいこともあってすべてのモデル定数が普通大の大きさで求まっているが、強い条件式(15・a), (38)は満足していない。また、条件式(27)も満足していないが、これは ε の評価が LES では難しいことを考慮するとやむを得ない。

最後に、西島⁽²²⁾による壁乱流のモデル定数の評価では、交差拡散項の存在を重視しているために、他の項(とくに壁近傍で重要と思われる C_{e6} の項)の影響が正しく評価されていない可能性がある。

したがって、改定 k - ε モデルですべての乱流場に共通なモデル定数を見出すことは、細かい精度を問わなければ必ずしも不可能ではないものと思われる。

4・5 モデル定数の再評価 そこで、式(104), (120)で求めた改定 k - ε モデルのモデル定数の存在範囲をもっと狭めるために以上の考察を次のように考慮する。

まず、 k 方程式のモデル定数の範囲は

$$C_{k1} = 0.7 \sim 5.0, C_{k1} = (1.7 \sim 3.0) C_{k2} \dots\dots\dots (126)$$

とする。これは既報の論文の研究結果⁽⁵⁾、表1の数値、および強い条件式(15・a)を考慮して決めたものである。

次に、 ε 方程式のモデル定数 $C_{e1} \sim C_{e5}$ は

$$C_{e1} = 0.7 \sim 2.0 \dots\dots\dots (127\cdot a)$$

$$C_{e3} = 1.884\ 6 \pm 0.115\ 4 \dots\dots\dots (127\cdot b)$$

$$C_{e4} = 0.03 \sim 5.0 \dots\dots\dots (127\cdot c)$$

$$C_{e5} = -4.0 \sim 0.0 \dots\dots\dots (127\cdot d)$$

とする。ここで、既報の論文の結果⁽⁵⁾、表1の数値、各モデル定数は普通大の大きさであることが望ましいこと、強い条件式(38・a)を多少考慮したこと、 C_{e5} は

Hamba と Horiuti の評価では負になっていること、また、 $c_{\varepsilon 5} < 0$ は改定 k - ε モデルを二次元平行平板間の乱流場に適用したとき、 y の大きいところからの解の展開が特異にならない⁽⁵⁾ ことなどを考慮した。

このようにモデル定数 $c_{\varepsilon 1} \sim c_{\varepsilon 5}$ の範囲を狭めておいて、4・2 節と同様な手順で残りのモデル定数を評価すると、

$$c_{\varepsilon 6} = -2.05 \sim 5.2 \quad (127 \cdot e)$$

$$c_{\varepsilon 7} = -46.0 \sim 29.2 \quad (127 \cdot f)$$

$$c_{\varepsilon 8} = -72.1 \sim 52.7 \quad (127 \cdot g)$$

となり、式(104)、(120)と比較してかなりモデル定数の存在範囲を狭めることができた。

5. 結 言

既報の論文^{(6)~(8)}に引き続き、本論文において改定 k - ε モデルのモデル定数の存在範囲をすべて合理的に定める一つの方法として、改定 k - ε モデルを種々の乱流場に適用し解析的研究を行い、実験データ、LES のデータベース等を利用してこれらのモデル定数をすべて評価した。実際には、本論文で得られた数値を使って各種乱流場に改定 k - ε モデルを適用し、もっとモデル定数の範囲を狭める必要がある。なお、本論文で得られたモデル定数の存在範囲は一つの目安であり、実際にこの範囲から改定 k - ε モデルのモデル定数がはずれることを否定するものではない。

また、モデル定数の感度解析、モデル定数も含めたモデル方程式系の安定性の問題等は別途検討すべき課題である。

本研究をすすめるにあたり、東京大学生産技術研究所 NST グループのご支持とご討論をいただいた。とくに、同研究所吉澤徹教授には貴重なご討論をいただ

いた。ここに記して厚く感謝する。

文 献

- (1) Jones, W. P. and Launder, B. E., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **15** (1972), 301.
- (2) 竹光, 機論, **53**-494, B (1987), 2921; Takemitsu, N., *J. Fluids Eng.*, submitted.
- (3) Yoshizawa, A., *J. Phys. Soc. Jpn.*, **51**-7 (1982), 2326.
- (4) Yoshizawa, A., *Phys. Fluids*, **30**-3 (1987), 628.
- (5) 竹光, 機論, **53**-494, B (1987), 2928; **53**-496, B (1987), 3629; Takemitsu, N., *J. Fluids Eng.*, submitted.
- (6) 竹光, 機論, **55**-510, B (1989).
- (7) 本論文集 2664 ページ.
- (8) 本論文集 2684 ページ.
- (9) Hamba, F., *J. Phys. Soc. Jpn.*, **56**-11 (1987), 3771.
- (10) Yoshizawa, A., *Center for Turbulence Research, Proceedings of the Summer Program*, (1987), NASA and Stanford University.
- (11) Hinze, J. O., *Turbulence*, Second Ed., (1975), 270-272, McGraw-Hill Book Company.
- (12) Laufer, J., *NACA TN*, 2123 (1950).
- (13) Klebanoff, P. S., *NACA TN*, 3178 (1954).
- (14) Clark, J. A., *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, **90** (1968), 455.
- (15) Kreplin, H-P. and Eckelmann, H., *Phys. Fluids*, **22**-7 (1979), 1233.
- (16) Hussain, A. K. M. F. and Reynolds, W. C., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **97** (1975), 568.
- (17) Horiuti, K., 2nd Int. Symp. on Transport Phenomena in Turbulent Flows, Tokyo, (1987-10), 735.
- (18) Bradbury, L. J. S., *J. Fluid Mech.*, **23**-1 (1965), 31.
- (19) Townsend, A. A., 文献(11)の 506~519 ページ.
- (20) Wygnanski, I. and Fiedler, H., *J. Fluid Mech.*, **38**-3 (1969), 577.
- (21) Hamba, F., *J. Phys. Soc. Jpn.*, **56**-10 (1987), 3405.
- (22) 西島, 機論, **53**-495, B (1987), 3166.
- (23) Bradshaw, P., Cebeci, T. and Whitelaw, J. H., *Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow*, (1981), 48, Academic Press Inc.
- (24) 吉澤, 私信.

討 論

〔質問〕 河 村 洋〔東京理科大学〕

以下は基本的な質問で、もっと早い段階でお伺いすべき質問かもしれないが、機会を得なかったのewithここでお願いすることをお許しいただきたい。

(1) 質問者は、以前 k - kL モデルを扱っていた際、 kL 方程式と ε 方程式の互換性を調べるため $\varepsilon \sim k^{5/2}/(kL)$ の関係を用いて kL の拡散項 $(\partial/\partial y)[\nu_e(\partial kL/\partial y)]$ を変形し、 $(\partial \varepsilon/\partial y)^2$, $(\partial k/\partial y)(\partial \varepsilon/\partial y)$, $(\partial k/\partial y)^2$ などを含む項を得た。これらは貴モデルの ε 方程式に付加された項である。このことからこれらの項は一種の拡散項であり、貴モデルは第2変数のより一般化された方

式形になっているのではなかろうか。

(2) 定数の値が広い範囲をとり得るというのは、大変興味深いのが、理解しにくい点でもある。これらの定数は互いに独立にその範囲内の値をとり得ると考えてよいのか。その具体例として、範囲が負から正にまたがる定数は、零としてもよいことを意味するか。

(3) 式(27)が λ の任意の値に対して成立するとする式(38)は、むしろ現実的ではないのではないのか。

〔回答〕 (1) 現象や方程式をいろいろの意味や立場で解釈することも大切であると思う。著者の立場は、標準 k - ε モデルを二次元平行平板間の乱流場に適

用したとき、標準 $k-\epsilon$ モデルが数学的に適正でないという理由から $k-\epsilon$ 方程式を根本的に見直し、結果として本モデルを提案しているということである。したがって、ご指摘のような「項を付加する」という立場はとっていない。

(2) 本研究の結果から、本モデルには種々の乱流現象を表現できる普遍的なモデル定数が存在する可能性が高いと考えている。それは本論文で示したような範囲の広いものではなく、もっと小さな範囲で(基本的には)独立に存在すると考えている。

(3) 本文 4・3 節を参照していただきたいと思う。

〔質問〕 長 野 靖 尚〔名古屋工業大学〕

標準 $k-\epsilon$ モデルは、自己保存則成立領域 (far-field) の二次元後流、静止流体中以外への噴流およびすべての軸対称自由せん断流については良好な予測を与えない。貴改定モデルがこの問題を克服されたら、大変な寄与だと思う。

(1) Ferziger, Kline ら (付1)(付2)は、壁乱流と自由乱流の物理を考慮した Zonal Modeling の適用により、上述の問題を解決した。乱流の普遍モデルについての哲学が関係するが、貴研究は彼らの成果を無視で

きないと思う。

(2) 軸対称自由せん断乱流では、渦の伸張効果をモデルに反映する必要があるようである(付1)。貴改定モデルの定数範囲は、これをも含んでいるのか。

〔回答〕 (1) 本研究の最終的な結果について Zonal Model を引用する予定でいる。ただし、著者は Zonal Model 自体の基本的な考え方には興味深いものがあると思っているが、得られた結果については各 Zone の境界条件が各 Zone の方程式と適正ではないと考えており、根本的な問題があると思っている。

(2) 種々の乱流現象がモデルに正しく反映されていれば、渦の伸張効果も自然にモデルにとり込まれているはずであると考えている。この意味において、本モデルのモデル定数は高次の影響を考慮しない範囲で種々の現象を表現できると考えている。

(付1) Tzuoo, K.-L., Ferziger, J. H. and Kline, S. J., Zonal Models of Turbulence and Their Application to Free Shear Flows, *Rep., Thermosci. Div., Dept. Mech. Eng., Stanford Univ.* TF-27 (1986).

(付2) Ferziger, J. H. and Kline, S. J., ほか3名 (Kline, S. J. 編), Zonal Modeling of Turbulent Flows-Philosophy and Accomplishments, *Near - Wall Turbulence*, (1989), Hemisphere (発行予定).