オイラー方程式に対する収束加速法の比較*

森西晃嗣^{*1}, 里深信行^{*1}, 斉藤良晴^{*2}Comparison of Convergence Acceleration Techniques
for the Euler Equations

Koji MORINISHI, Nobuyuki SATOFUKA, and Yoshiharu SAITOH

An efficient numerical solution has been developed for the Euler equations. The numerical procedure is based on the method of lines using the rational Runge-Kutta time integration scheme combined with the central finite difference approximation for spatial discretization. The residual averaging and multigrid techniques of both Jameson and Ni are incorporated into the basic scheme so that the convergence rate to a steady-state solution is improved. A series of numerical experiments have been carried out for two-dimensional transonic flow past the NACA 0012 and RAE 2822 airfoils on the Fujitsu VP-200 supercomputer. The residual averaging can significantly accelerate the convergence rate of the basic scheme. The convergence rate of Ni's coarse grid scheme is slightly slower than that of residual averaging. The best convergence rate is obtained by using both residual averaging and Jameson's multigrid techniques. The convergence rate is more than 2 times faster than a current diagonalized, implicit-approximate factorization scheme.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Compressible Flow, Transonic Flow, Finite Difference Method, Euler Equations, Rational Runge-Kutta Scheme, Multigrid Method

1. 序 論

翼や翼列周りの遷音速流れに対する信頼性が高く効率の良い数値解析法を確立することは、数値流体力学の分野における重要な課題である。従来、設計段階における流れ場の予測など、実用的な手段として数値解析法を用いる場合、その能率や経済性の要求から、主にポテンシャルの仮定が用いられてきた。しかしながら、ポテンシャルの仮定は、衝撃波を伴う遷音速流の記述には限界があり、また利用できる計算機の性能の向上から、より現実的なオイラーあるいはナビエ・ストークス方程式の解法に関心が持たれている。

巡航状態における航空機のように、工学上興味ある流れ場の多くはおよそ定常問題と仮定することが可能であり、効率の面では定常解への収束の速い数値解析法を確立することが重要である。このような定常流に対しても、今日では、非定常流に対する方程式に適切な初期条件を与え、長い時間経過後の極限として定常

解を得る、時間依存法による計算が一般に多く行われている。よく知られているように、MacComack法⁽¹⁾に代表されるような古典的な陽解法は、1段階当たりの演算回数は少ないが、数値計算法の安定条件による時間刻み幅の制限から、定常解を得るためには、非常に多くの時間段階の繰返しが必要である。

この陽解法の欠点を克服するために考案された陰解法は、安定条件による時間刻み幅の制限が緩和されるため、定常解への収束率が速いが、その反面、1段階当たりの演算回数も多くなっている。したがって、より演算回数の少ない陰的法、あるいは、より収束率の速い陽的法を確立することは、非常に魅力的である。このような観点から、PulliamとChausseeは⁽²⁾、近似分割したBeam-Warming法⁽³⁾の陰的部分を対角化することにより、その反転に要する演算回数を軽減することを提案した。その後、LU分解などを用いた同様な方法が提案されている⁽⁴⁾。

陽解法の収束率を改善する方法としては、残差平均法⁽⁵⁾や多重格子法^{(6)~(9)}を組込む試みがなされている。特に多重格子法は、従来、だ円形方程式に対する逐次緩和の収束を加速する方法としてBrandt⁽⁶⁾らにより研究されてきたもので、基本格子上での解の値を、格子間隔が基本格子の2倍、4倍、…、となる粗い階層

* 平成元年4月5日 第66期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和63年10月11日。

^{*1} 正員、京都工芸繊維大学工学部 (〒606 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

^{*2} トヨタ自動車(株)東富士研究所 (〒410-11 裾野市御宿1200)。

上の格子で得られた予想値で順次補正することにより、多大な収束加速効果が期待できる。

Ni は⁽⁷⁾、オイラー方程式に対して、基本格子上では独自の陽解法を用い、下層の粗格子上では残差輸送方程式を解く方法を提案した。Johnson らは⁽⁸⁾、Ni の方法をより一般化し、基本格子上では MacComack 法を用い、ナビエ・ストークス方程式への拡張を示した。しかしながら、Ni の方法は、下層における残差輸送方程式の解法が古典的な陽解法の一つで、安定条件により時間刻み幅が厳しく制限される欠点がある。これにたいして、Jameson らは⁽⁹⁾、有限体積法により離散化されたオイラー方程式を、4 ないし 5 段階のルンゲ・クッタ法で積分し、下層においても同様な計算を行う多重格子法を提案した。この Jameson の解法は、オイラー方程式に対して、Pulliam らの対角化陰的近似分割法と同程度効率的であることが示されている⁽¹⁰⁾。

著者らは先に、中心差分法と 2 段階有理ルンゲ・クッタ法を組合せた新しい陽的差分法を提案した⁽¹¹⁾。ここでは、その有理ルンゲ・クッタ法に残差平均法や多重格子法を組合せ、遷音速流れの代表的な検定問題に適用し、その収束加速効果について比較検討する。数値計算には、京都大学大型計算機センター内の FACOM VP-200 を用い、その一部は、同センターの VP プログラム開発計画により提供された計算時間を利用して行った。

2. 基礎方程式

非粘性圧縮流体の運動は、オイラー方程式により記述される。一般座標変換された二次元オイラー方程式は、保存系表示で次のように書ける。

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} = 0 \quad (1)$$

$$\bar{q} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ (e + p) U \end{bmatrix},$$

$$\bar{F} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ (e + p) V \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで、 p, ρ, u および v は、それぞれ、流体の圧力、密度、 x および y 方向の速度成分で、 e は、単位体積当たりの全エネルギーで、流体を比熱比 γ の完全気体と仮定すると、

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (3)$$

である。また、 J は、座標変換に伴うヤコビアンで、次のように定義される。

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \quad (4)$$

反変速度成分 U および V は、それぞれ、次式で与えられる。

$$\begin{cases} U = \xi_x u + \xi_y v \\ V = \eta_x u + \eta_y v \end{cases} \quad (5)$$

ここで、添字は偏微分を示し、次のような関係式がある。

$$\begin{cases} \xi_x = J y_\eta, & \xi_y = -J x_\eta \\ \eta_x = J x_\xi, & \eta_y = -J y_\xi \end{cases} \quad (6)$$

以下の説明においては、一般座標におけるベクトル量を示す記号『 $\sim$ 』は、簡単化のため省略する。

3. 数値計算法

著者らの数値計算法は、線の方法 (Method of Lines) の原理に従うもので、最初に、オイラー方程式の空間微分項を適当な方法で評価し、その後、時間微分項の積分を行なうものである。

いま、オイラー方程式 (1) の空間微分項の評価に 2 次精度の中心差分法を用いると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q_{i,j} = & -(E_{i+1,j} - E_{i-1,j}) / (2\Delta\xi) \\ & - (F_{i,j+1} - F_{i,j-1}) / (2\Delta\eta) + D_\xi + D_\eta \quad (7) \end{aligned}$$

ここで、添字 i および j は、それぞれ、 ξ および η 方向の格子点番号を示す。また、 D_ξ および D_η は、中心差分法による離散化に伴う非線形不安定性により生じる解の振動の防止や、衝撃波を適切に捕獲するために加える人工粘性項である。ここでは、Jameson と Baker⁽⁵⁾ に習い、例えば、 D_ξ は

$$D_\xi = d_{i+1/2,j} - d_{i-1/2,j} \quad (8)$$

とし、人工粘性流束項 $d_{i+1/2,j}$ を、次のように定義する。

$$\begin{aligned} d_{i+1/2,j} = & [\varepsilon_{i+1/2,j}^{(2)} \Delta\xi (Jq)_{i,j} \\ & - \varepsilon_{i+1/2,j}^{(4)} \Delta\xi^3 (Jq)_{i-1,j}] / (J\Delta t_\xi)_{i+1/2,j} \quad (9) \end{aligned}$$

ここで、 Δt_ξ は、 ξ 方向のクーラン数を 1 とする時間刻み幅で、また、 $\Delta\xi$ は、次のような前進差分演算子である。

$$\Delta\xi q_{i,j} = q_{i+1,j} - q_{i,j} \quad (10)$$

係数 $\varepsilon^{(2)}$ および $\varepsilon^{(4)}$ は、それぞれ、次のように決められる。

$$\varepsilon_{i+1/2,j}^{(2)} = \omega^{(2)} \max(\nu_{i+1,j}, \nu_{i,j}) \quad (11)$$

$$\varepsilon_{i+1/2,j}^{(4)} = \max(0, \omega^{(4)} - \varepsilon_{i+1/2,j}^{(2)}) \quad (12)$$

ここで、 $\omega^{(2)}$ および $\omega^{(4)}$ は、数値解の振動を抑え、衝撃波を適切に捕えるために調整すべき定数で、例えば、

次のような値である。

$$\omega^{(2)}=1.0, \omega^{(4)}=\frac{1}{32} \quad \dots\dots\dots (13)$$

また、 $\nu_{i,j}$ は、衝撃波を感知する役割をもち、次のように定義される。

$$\nu_{i,j}=\frac{p_{i+1,j}-2p_{i,j}+p_{i-1,j}}{p_{i+1,j}+2p_{i,j}+p_{i-1,j}} \quad \dots\dots\dots (14)$$

次に時間積分法について説明する。離散化されたオイラー方程式(7)は、次のような連立常微分方程式に書き換えることができる。

$$\frac{d\vec{q}}{dt}=\vec{W}(\vec{q}) \quad \dots\dots\dots (15)$$

常微分方程式の積分には種の方法が利用できるが、ここでは、安定性に優れている、2段階有理ルンゲ・クッタ法⁽¹²⁾ (Rational Runge-Kutta, 以下 RRK 法と略す)を用いる。それは、式(15)に対して、次のように書ける。

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= \Delta t \vec{W}(\vec{q}^n), \vec{g}_2 = \Delta t \vec{W}(\vec{q}^n + c_2 \vec{g}_1) \\ \vec{q}^{n+1} &= \vec{q}^n + [2\vec{g}_1(\vec{g}_1, \vec{g}_3) - \vec{g}_3(\vec{g}_1, \vec{g}_1)]/(\vec{g}_3, \vec{g}_3) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、

$$\vec{g}_3 = b_1 \vec{g}_1 + b_2 \vec{g}_2$$

で、 n は時間段階 ($t=n\Delta t$) を示し、記号、例えば、 $(\vec{g}_1, \vec{g}_3)$ は、ベクトル $\vec{g}_1$ と $\vec{g}_3$ の全計算領域にわたる内積を示す。係数 b_1, b_2 および c_2 は、

$$b_1 + b_2 = 1, b_2 c_2 \leq -0.5 \quad \dots\dots\dots (17)$$

のような条件を満たす定数で、次のように設定することにより、効率の良い2次精度の方法が得られる。

$$b_1 = 2, b_2 = -1, c_2 = 0.5 \quad \dots\dots\dots (18)$$

定常問題においては、時間刻み幅 Δt は、全格子点で同一である必要はない。そこで、ここでは、各格子点で一定のクーラン数を与えて、 Δt を次のように定める。

$$\Delta t_{i,j} = C_N \min(\Delta t_\varepsilon, \Delta t_\eta)_{i,j} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ただし、 C_N は設定するクーラン数を示し、 Δt_ε および Δt_η は、それぞれ、次のように定義する。

$$\begin{aligned} (\Delta t_\varepsilon)_{i,j} &= [1/(|U| + cK_\varepsilon)]_{i,j} \\ (\Delta t_\eta)_{i,j} &= [1/(|V| + cK_\eta)]_{i,j} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで、 c は局所音速、 K_ε および K_η は、それぞれ次式で与えられる。

$$K_\varepsilon = (\xi_x^2 + \xi_y^2)^{1/2}, \quad K_\eta = (\eta_x^2 + \eta_y^2)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (21)$$

4. 収束加速法

4.1 残差平均法 Jameson と Baker⁽⁵⁾により提案された残差平均法は、各点における残差を、その周りの点の残差の平均値で置き換えることにより、安定

性を良くし、定常解への収束を加速するものである。RRK 法(16)の最終段階は、残差 r を用いて次のように書き換えることができる。

$$q_{i,j}^{n+1} = q_{i,j}^n + r_{i,j} \quad \dots\dots\dots (22)$$

この残差 r を、次のような陰的残差平均 $\bar{r}$ で置き換える。

$$(1 - \varepsilon_\varepsilon \delta_\varepsilon^2)(1 - \varepsilon_\eta \delta_\eta^2) \bar{r}_{i,j} = r_{i,j} \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 ε_ε および ε_η は荷重平均の係数で、 δ_ε^2 は、次のような2階差分演算子である。

$$\delta_\varepsilon^2 r_{i,j} = r_{i+1,j} - 2r_{i,j} + r_{i-1,j} \quad \dots\dots\dots (24)$$

RRK 法に残差平均法を組合せる場合、係数 ε の値は、大きくするほど安定性が良くなるが、定常解への収束性は必ずしも一様に改善されず、最適値が存在する。ここでは、係数 ε_ε および ε_η の値を、各格子点で、次のように定める。

$$(\varepsilon_\varepsilon)_{i,j} = \max \left\{ \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\Delta t}{\lambda \Delta t_\varepsilon} \right)^2 - 1 \right], \varepsilon_{\min} \right\}_{i,j} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$(\varepsilon_\eta)_{i,j} = \max \left\{ \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\Delta t}{\lambda \Delta t_\eta} \right)^2 - 1 \right], \varepsilon_{\min} \right\}_{i,j}$$

ただし、

$$\lambda = 1.25, \varepsilon_{\min} = 0.2$$

とする。

4.2 Ni の多重格子法 多重格子法は、格子間隔 h の基本格子と、それから1点おきに取った間隔 $2h$ の粗格子を考え、粗格子上で計算された予想値を用いて基本格子上での解の値を修正することにより、収束を加速するものである。

基本格子上における RRK 法の最終段階(22)の残差を r_h とするとき、Ni の多重格子法⁽⁷⁾では、粗格子上での残差を次のように定義する⁽⁸⁾。

$$\begin{aligned} (r_{2h})_{i,j} &= \frac{1}{4} \left\{ r_h + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \Delta E + \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \Delta F \right\}_{i-1,j-1} \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\{ r_h + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \Delta E - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \Delta F \right\}_{i-1,j+1} \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\{ r_h - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \Delta E - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \Delta F \right\}_{i+1,j+1} \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\{ r_h - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \Delta E + \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \Delta F \right\}_{i+1,j-1} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここで、 ΔE および ΔF は、次のように計算される。

$$\begin{aligned} \Delta E_{i,j} &= A_{i,j}(r_h)_{i,j} \\ \Delta F_{i,j} &= B_{i,j}(r_h)_{i,j} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ただし、 A および B は、それぞれ、次式で定義されるヤコビアンである。

$$A = \frac{\partial E}{\partial q}, \quad B = \frac{\partial F}{\partial q} \quad \dots\dots\dots (28)$$

式(26)により求められた粗格子上での残差を用い、基本格子上での物理量は、次式のように修正される。

$$q_h^{\text{new}} = q_h^{\text{old}} + I_{2h}^h r_{2h} \dots (29)$$

ここで、 I_{2h}^h は、粗格子から基本格子上への線形内挿演算子である。

4.3 Jameson の多重格子法 ここでは、RRK 法に Jameson の多重格子法⁽⁹⁾を応用する場合に、粗格子上で行う操作について説明する。

最初に、粗格子上における物理量 q_{2h} を、基本格子上におけるその点周りの物理量の平均として、次のように求める。

$$q_{2h}^{(0)} = I_h^{2h} q_h \dots (30)$$

ここで、 I_h^{2h} は、保存的な平均化演算子で、例えば、次のように表せる。

$$I_h^{2h} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \dots (31)$$

RRK 法(16)は、粗格子上では、次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= \Delta t [\dot{W}_{2h}(\dot{q}_{2h}^{(0)}) + P_{2h}] \\ \dot{g}_2 &= \Delta t [\dot{W}_{2h}(\dot{q}_{2h}^{(0)} + c_{2h} \dot{g}_1) + P_{2h}] \\ q_{2h} &= q_{2h}^{(0)} + [2\dot{g}_1(\dot{g}_1, \dot{g}_3) - \dot{g}_3(\dot{g}_1, \dot{g}_1)] / (\dot{g}_3, \dot{g}_3) \end{aligned} \dots (32)$$

ここで、 P_{2h} は、求める解が基本格子上での精度を保存するように加えられる強制項で、次式のように定義される。

$$P_{2h} = I_h^{2h} W_h(q_h) - W_{2h}(q_{2h}^{(0)}) \dots (33)$$

粗格子上で得られた予想値を用いて、基本格子上での物理量 q は、次のように修正される。

$$q_h^{\text{new}} = q_h + I_{2h}^h (q_{2h} - q_{2h}^{(0)}) \dots (34)$$

以上においては、基本格子と粗格子の二層を用いる場合について説明したが、同様の操作を三層以上にわたって順次繰返し行うことにより、定常解への収束を加速する。

5. 計算結果

ここでは、残差平均法 (RA) および多重格子法 (MG) を RRK 法と組合せ、遷音速流に対する代表的な検定問題である、NACA 0012 翼形を過ぎる一様流マッハ数 0.8, 迎え角 1.25° および RAE 2822 翼形を過ぎるマッハ数 0.75, 迎え角 3.0° の流れ場に適用し、その加速効果について検討する。また比較のため、空間の離散化が同じで、対角化陰の近似分割法 (DIAF) を用いて解いた結果も合わせて示す。

計算は、図 1 に示すような、翼前縁と後縁部に格子点を集めた C-形格子を用いて行った。格子点数は 257×65 点で、そのうち 193 点を翼面上に配置した。翼面から次の点までの格子間隔は 0.005 とし、外部境界までの距離は翼弦長の 10 倍とした。

外部境界では、境界に垂直な方向に対する一次元リーマン不変量の概念を用い、次のような境界条件を与える⁽⁵⁾。すなわち、速度ベクトルを $\vec{u}$, 外向き法線ベクトルを $\vec{n}$ とし、流入および流出に対応する特性量を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} R_\infty &= (\vec{u}_\infty, \vec{n}) - \frac{2c_\infty}{\gamma - 1} \\ R_e &= (\vec{u}_e, \vec{n}) + \frac{2c_e}{\gamma - 1} \end{aligned} \right\} \dots (35)$$

この時、速度の法線方向成分および音速は、次のように求まる。

$$(\vec{u}, \vec{n}) = \frac{1}{2}(R_e + R_\infty) \dots (36)$$

$$c = \frac{\gamma - 1}{4}(R_e - R_\infty) \dots (37)$$

ここで、添字 ∞ および e は、それぞれ、一様流および外挿値を示す。これらの値と、流入境界では、接線速度成分とエントロピーに一様流の値を与えることによ

(a) NACA 0012 翼形

(b) RAE 2822 翼形

図 1 C-形計算格子 (257×65 点)

り、また流出境界では、それらの値を外挿することにより、境界上の値を求める。

翼面上においては、法線速度成分は零とし、接線速度成分およびエントロピーを内点より外挿する。また、圧力は、法線方向の運動量方程式より得られる次式を積分することにより求める。

$$(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \frac{\partial p}{\partial \xi} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\partial p}{\partial \eta} = -\rho U \left(\eta_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \dots \dots \dots (38)$$

翼後方の C-形格子の継ぎ目では、簡単のため、その上下の点における基本変数の平均値を用いた。また、初期条件は、全計算領域に対して一様流の値を与える衝撃出発とした。

表 1 は、各手法の計算に用いた式(19)で定義されるクーラン数の値、および、FACOM VP-200 での 1 段階当たりの計算時間を示す。各手法のクーラン数の値は、NACA 0012 翼を過ぎる流れ場に対して数回の試行錯誤を行い、そのうち収束が最も速い値に決めた。単独の RRK 法は、クーラン数が 1.8 まで安定であったが、残差平均法を組合せると、1 段階当たり約 30 % 余分な計算時間が必要となるが、より大きなクーラン数でも安定となり収束が加速される。Ni の多重格子法

の 1 段階当たりの計算時間は、残差平均法のそれより少し長く、また、Jameson の多重格子法は、残差平均法も合せて用いているため、単独の RRK 法の約 2.6 倍かかっている。

図 2 は、NACA 0012 翼形を過ぎる一様流マッハ数 0.8, 迎え角 1.25° の流れ場に対して得られた等マッ

図 3 翼面上の圧力分布 (NACA 0012)

表 1 クーラン数と 1 段階当たりの計算時間

Scheme	C_N	CPU Time per step	
		m second	ratio
RRK	1.0	25.85	1.0
RRK, R.A.	5.0	34.48	1.33
RRK, Ni's M.G.	1.2	45.05	1.74
RRK, Jameson's M.G.	3.0	67.38	2.60
D.I.A.F.*	10.0	44.25	1.71

* Diagonal Implicit Approximate Factorization

図 2 等マッハ線図 (NACA 0012)

図 4 収束履歴の比較 (NACA 0012)

ハ線図である。また、翼周りの圧力分布を図3に示す。流れ場は、よく知られているように、翼上面では、翼弦長の約65%の所に、下面では約35%の所に、それぞれ、衝撃波が見られる。翼下面では、衝撃波は弱く、ほぼ等エントロピー的な流れとなっている。

図4は、単独のRRK法およびそれに残差平均法や2種類の多重格子法をそれぞれ組合せた場合の、すべての保存変数に対する平均二乗残差の収束履歴を示す。比較のため、対角化陰的近似分割法により得られた収束履歴も合わせて示してある。RRK法に残差平均法を組合せることにより、時間段階数で約4倍の収束加速効果が見られ、Niの多重格子法による加速効果は、それよりか少し遅くなっている。これに対して、Jamesonの多重格子法は、残差平均法との相乗効果

により、約30倍の加速効果が見られる。

次に、RAE 2822 翼形を過ぎる一様流マッハ数0.75、迎え角 3.0° の流れ場に対する結果を示す。RRK法とJamesonの多重格子法を用いて得られた等マッハ線図を図5に、また、翼周りの圧力分布を図6に、それぞれ、示す。各手法により得られた収束解は全く同じで、翼上面の翼弦長の約70%の所に衝撃波が見られる。

図7に、単独のRRK法およびそれに残差平均法や2種類の多重格子法をそれぞれ組合せた場合の収束履歴を対角化陰的近似分割法のそれと比較して示す。前例の場合と同様に、Niの多重格子法による加速効果は、残差平均法のそれより少し遅くなっている。これに対して、Jamesonの多重格子法による加速効果は、非常に顕著である。

図5 等マッハ線図 (RAE 2822)

図6 翼面上の圧力分布 (RAE 2822)

表2 計算効率の比較

RAE2822 $M_\infty = 0.75$, $\alpha = 3.0^\circ$			
Scheme	Number of Steps	CPU Time	
		second	ratio
RRK	5467	141.3	1.0
RRK, R.A.	1231	42.4	0.300
RRK, Ni's M.G.	1481	67.7	0.479
RRK, Jameson's M.G.	187	12.6	0.089
D.I.A.F.	863	38.2	0.270

図7 収束履歴の比較 (RAE 2822)

最後に、残差を4けた下げるのに必要な各手法の時間段階数およびFACOM VP-200での計算時間を表2に示す。残差平均法は、簡単な演算を追加するだけで、収束解を得るのに必要な計算時間を3分の1以下にまで減らすことができ、Niの多重格子法よりも効果的である。また、RRK法にJamesonの多重格子法を組合せることにより、必要な計算時間を10分の1以下に減らすことができ、その結果、対角化陰的近似分割法よりも約3倍効率的である。

6. 結 論

中心差分と有理ルンゲ・クッタ法を用いた陽的法に、残差平均法や、NiおよびJamesonの2種類の多重格子法を組合せ、二次元オイラー方程式に適用し、その加速効果について検討した結果、次のような結論が得られた。

(1) 残差平均法は、簡単な演算を追加するだけで、収束解を得るのに必要な計算時間を約3分の1にまで減らすことができた。

(2) Niの多重格子法による加速効果は、RRK法と組合せた場合、残差平均法のそれよりも少し遅かった。

(3) RRK法にJamesonの多重格子法を組合せることにより、計算時間を約10分の1に短縮することができ、その結果、対角化陰的近似分割法よりも2倍以上効率的であった。

文 献

- (1) MacCormack, R. W., *Lecture Notes in Physics*, 8 (1971), 151, Springer-Verlag.
- (2) Pulliam, T. H. and Chaussee, D. S., *J. Comput. Phys.*, 39 (1981), 347.
- (3) Beam, R. M. and Warming, R. F., *AIAA J.*, 16 (1978), 393.
- (4) Obayashi, S. and Kuwahara, K., *AIAA Paper*, 84-1670 (1984).
- (5) Jameson, A. and Baker, T. J., *AIAA Paper*, 83-1929 (1983).
- (6) Brandt, A., *AIAA J.*, 18 (1980), 1165.
- (7) Ni, R. H., *AIAA J.*, 20 (1982), 1565.
- (8) Chima, R. V. and Johnson, G. M., *AIAA J.*, 23 (1985), 23.
- (9) Jameson, A. and Baker, T. J., *AIAA Paper*, 84-0093 (1984).
- (10) Pulliam, T. H. and Steger, J. L., *AIAA Paper*, 85-0360 (1985).
- (11) Satofuka, N., Morinishi, K. and Tokunaga, H., *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 13 (1986), 319, Vieweg.
- (12) Wambecq, A., *Computing*, 20 (1978), 333.

討 論

〔質問〕 保 原 充〔名古屋大学工学部〕

貴論文では、里深らの提案した陽的差分方式の有理ルンゲ・クッタ法の、圧縮性オイラー方程式への適用に際して、計算上の各種手法を組合せたときの、定常解への収束の比較を行っている。比較では標準翼形を計算例に取り上げて、残差の収束履歴などが示されている。残差平均や多重格子の手法により解の収束が著しく改善される模様がよく見える。

これらは実際問題に適用しようとする場合に大変参考になるが、さらに古典的標準解法としてのMacCormack法やBeam-Warming法との比較があると読者にとって目安をつけやすいであろう。

このような地味な努力は、数値流体力学上の数学的、物理的洞察とともに、今後生じてくる新たな問題（内部エネルギー、反応、ラジエーション、電磁流、複雑問題など）への対応にますます重要となると考えられるが、いかがか。

〔回答〕 陽的MacCormack法との比較に関しては、およそ次のようなことが言えると思われる。(1) MacCormack法と2段階有理ルンゲ・クッタ法は、

タイム・ステップ当たりの演算量はほぼ同じであるが、前者はクーラン数の制約が1以下であるが、後者は1以上でも計算可能である。

(2) 著者らの方法は、線の方法に基づくもので、得られる定常解が時間刻み Δt の大きさに依存せず、種々の収束加速法を組合せて用いることができる。一方、MacCormack法は、よく知られているように定常解が Δt の値に依存する傾向があり、仮に残差平均法を組合せて安定性を良くし、大きな Δt を用いて計算しても、得られる定常解の信頼性が問題となる。

(3) MacCormack法に対する有効な収束加速法としてNiの多重格子法を用いることが考えられる〔Chima-Johnsonの文献(8)参照〕。しかし、このNiの多重格子法の効果は、本論文でも明らかなように、残差平均とJamesonの多重格子法には、決して勝ることはないと思われる。

次にBeam-Warming法との比較だが、論文で直接比較している対角化陰的近似分割法は、Beam-Warming法の陰的部分を対角化することにより反転に要する演算回数を軽減するなどして効率を良くした

もの〔詳因は Pulliam-Steger の文献(10)を参照〕である。また参考として、昭和 62 年の日本機械学会の第 1 回 CFD ワークショップでは著者のナビエ・ストークス方程式に対する解法は、他の Beam-Warming 法に基づく解法よりも 2 倍以上の格子点数を用いているにもかかわらず、計算時間は半分以下となっている。

化学反応や電磁流体などへの応用はまだ検討中の段階で断定的なことは言えないが、著者らの方法は、これらの流体の運動を記述する方程式系があれば、容易

に応用することが可能である。ただし、これらの方程式系は硬直性が増すと思われ、効率が悪くなる可能性がある。逆に、安定性が良くて効率の良い数値計算法の検討がますます重要であると言える。また、乱流モデルのように、ある現象にモデルを導入する場合、物理現象のシミュレーションもさることながら、モデルそれ自身の改良評価を行うにも繰返し計算する必要がある、そのような点においても効率の良い数値計算法が重要であると思われる。