領域分割法による非圧縮粘性流体の数値計算*

里 深 信 行^{*1}, 森 西 晃 嗣^{*1}
西 田 秀 利^{*1}, 梶 本 達 夫^{*2}Numerical Solution of Incompressible Flow
Using a Domain Decomposition MethodNobuyuki SATOFUKA, Koji MORINISHI,
Hidetoshi NISHIDA, and Tatsuo KAJIMOTO

A domain decomposition method is applied to the solution of unsteady Navier-Stokes equations in primitive variable formulations for incompressible viscous flows in a square cavity and around a rectangular cylinder. In the present approach, a computational domain is divided into several subdomains, thus making the grid generations and flow computation much easier than for a single domain, especially in the case of very complicated geometry. The flow equations are solved by the method of lines using the rational Runge-Kutta time integration scheme, while the Poisson equations are solved by the SOR method. It is concluded that the present method essentially agrees well with methods using a single domain.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Numerical Analysis, Finite Difference Method, Grid Generation, Viscous Flow, Incompressible Flow, Domain Decomposition Method, Rational Runge-Kutta Scheme

1. 緒 論

複雑な幾何学的形状をした領域における高レイノルズ数の流れの数値計算において、適切な格子点分布を持つ計算格子の作成は、実用上極めて重要な問題である。形状によっては領域全体にわたって単一の格子系を作成することが不可能となり、領域をいくつかに分割し各分割領域に対して各々に適切な格子を形成する領域分割法を用いる必要性が生じる。

また、計算領域の分割は今後科学技術用計算機的主流になると考えられている並列計算機において、各々の演算処理装置に計算量を分配するのに最も有効な方法として多くの関心を集めている。

いずれにおいても、領域を分割すると外部境界と物体表面での境界条件以外に、各分割領域間の境界の取扱いが必要となるが、陰的差分法による計算ではこれを陰的に行うことは困難となり、またこれを陽的に取扱う場合には、収束率などの計算効率が劣化することが予想される。一方、陽的差分法においては領域境界

の取扱いは容易であるが、安定条件による時間ステップ幅の制約から収束が遅く、計算効率の面で問題がある。したがって、著者らが圧縮性流れに対する数値計算法として提案し、すでに多大な成果を挙げている陽的2段階有理ルンゲ・クッタ法(以後RRK法と略す)⁽¹⁾を時間積分法とする線の方法(Method of Lines)⁽²⁾は、領域分割法の利点を最大限に活用できると期待される。

本論文では、このような観点から領域分割法による計算の第一歩として、二次元非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の数値計算に対しRRK法を用いた線の方法を応用し、領域分割法の有効性・計算結果の信頼性の検討を行うことを目的とする。数値計算は、非圧縮性問題の代表的検定問題である正方空洞内流れおよび正方柱まわりの流れを対象とし、領域分割を行った場合と行わない場合を比較することにより計算結果の信頼性・計算効率の向上の程度などを検討することを試みる。なお数値計算は、サンマイクロシステムズ社製のsun 3/50, 3/60 および 4/260 を使用して行った。

2. 基礎方程式

二次元非圧縮性流れの基礎方程式は、2方向成分のナビエ・ストークス方程式と連続の式である。

* 平成元年7月14日 東海支部岐阜地方講演会において講演、原稿受付 昭和63年9月22日。

^{*1} 正員、京都工芸繊維大学工学部(〒606 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

^{*2} 学生員、京都工芸繊維大学大学院。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \bar{\nu} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \bar{\nu} \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (3)$$

ここで記号()は次元を考慮した物理量である。ここで $\bar{u}, \bar{v}$ は $\bar{x}, \bar{y}$ 方向の速度成分, $\bar{p}$ は圧力, $\bar{\rho}$ は密度, $\bar{\nu}$ は動粘性係数である。これらの無次元量を求めるため, 代表長さ $\bar{L}$, 代表速度 $\bar{U}_0$ を定義すると,

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}/\bar{U}_0, \quad v = \bar{v}/\bar{U}_0 \\ x &= \bar{x}/\bar{L}, \quad y = \bar{y}/\bar{L} \\ t &= \bar{t}/(\bar{L}/\bar{U}_0), \quad p = \bar{p}/\bar{\rho}\bar{U}_0 \\ Re &= \bar{U}_0\bar{L}/\bar{\nu} \end{aligned}$$

となる。ここで Re はレイノルズ数である。これより式(1), (2), (3)を無次元化すると,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

となる。次に, 式(4), (5)をそれぞれ x, y について微分し加えあわせると, 圧力に対するポアソン方程式

$$\begin{aligned} \nabla^2 p &= -\frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2(uv)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2(v^2)}{\partial y^2} \\ &\quad - \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

が導き出される。ここで D は,

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (8)$$

である。

3. 数値計算法

本論文で用いる数値計算法は, 空間項の離散化には中心差分, また時間積分には RRK 法を適用した線の方法である。式(4), (5), (6)を図1のような食違い計算格子上で有限差分近似を行う。圧力 p は格子の中心で定義され, 速度 u, v は左右, 上下の格子線上で定義される。したがって, 空間微分項の離散化は古典的な MAC 法⁽³⁾と同様である。1階また2階の微分は, 次のように求められる。

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{i+1/2, j} = \frac{p_{i+1, j}^n - p_{i, j}^n}{\Delta x} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i+1/2, j}^n = \frac{u_{i+3/2, j}^n - 2u_{i+1/2, j}^n + u_{i-1/2, j}^n}{\Delta x^2} \quad (10)$$

ここで, 添字 n は繰返し時間段階 ($t = n\Delta t$) を示す。

速度 u, v は格子中心では定義されないが,

$$\begin{aligned} u_{i, j} &= \frac{u_{i-1/2, j} + u_{i+1/2, j}}{2} \\ v_{i, j} &= \frac{v_{i, j-1/2} + v_{i, j+1/2}}{2} \end{aligned} \quad (11)$$

のように平均化の操作によって求められる。以上のような離散化により, 式(1)は次のような時間に関する連立常微分方程式が得られる。

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \bar{F}(\bar{U}) \quad (12)$$

ここで, $\bar{U}$ は各格子点での速度ベクトル $U(u, v)$ の値を成分とするベクトルである。この式に RRK 法を適用すれば,

$$\bar{g}_1 = \Delta t \cdot \bar{F}(\bar{U}^n) \quad (13)$$

$$\bar{g}_2 = \Delta t \cdot \bar{F}(\bar{U}^n + c_2 \bar{g}_1) \quad (14)$$

$$\bar{U}^{n+1} = \bar{U}^n + \frac{2\bar{g}_1(\bar{g}_1, \bar{g}_3) - \bar{g}_3(\bar{g}_1, \bar{g}_1)}{(g_3, g_3)} \quad (15)$$

となる。ここで,

$$\bar{g}_3 = b_1 \bar{g}_1 + b_2 \bar{g}_2, \quad b_1 + b_2 = 1 \quad (16)$$

である。記号 (d, e) はベクトル d と e の内積を表す。この方法は陽的でありながら単一の方程式に対して無条件安定である。また, b_1, b_2 および c_2 は任意のパラメータであり $b_2 c_2 = -0.5$ のとき2次精度となる。本計算では $b_2 c_2 = -0.5$ また $c_2 = 0.5$ とする。

圧力に対するポアソン方程式の解法には逐次過緩和法 (SOR 法) を用いる。

4. 領域分割法

本論文では, 領域分割法を正方空洞内流れと正方柱まわりの流れの計算に適用する。図2に, この二つの流れ場の場合の格子系の概略図を示す。各分割領域内は等間隔の直交格子である。物体壁面に近いところでは分解能を得るために小さな格子間隔の, また物体から離れた計算に重要な影響を及ぼすと思われる地点

図1 食違い計算格子構造

では大きな格子間隔の分割領域をおいた。

計算は分割領域内で独立した変数を用いて行うが、分割領域間で受け渡しされる境界値、例えば図3に示す p_0' の値は、

$$p_0' = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}{4} \dots\dots\dots(17)$$

のように隣の領域内部の点の内挿より求めるため、たがいの分割領域が大きな格子間隔で1格子分重なるようにする。

5. 計算条件

5.1 正方空洞流れ 図4は正方空洞内流れの計算領域である。一辺の長さ1の粘着壁に四方を囲まれ、上方の壁が一定の速度 ($u=1$) で x の正方向へ移動する。初期条件として $u=v=0$ また $p=1$ より計算を開始し、定常状態への収束判定基準に用いる残差 R は、以下の式による。

$$R = \left[\left(\frac{\sum |u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n|}{M} \right)^2 + \left(\frac{\sum |v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n|}{N} \right)^2 \right]^{1/2} \dots\dots\dots(18)$$

ここで、 M, N は全領域での速度 u, v の計算格子点の総数である。 R が 10^{-5} 以下になった場合定常となったとみなし計算を終了させた。

境界条件は上方壁面上の速度 $u=1, v=0$ その他の壁面上では $u=v=0$ または壁内部に定義される圧力

図2 格子系の概略図

図3 分割領域の境界

の境界値は、壁面上の速度より運動方程式を解くことによって求められる。

格子間隔は、単一格子系では $1/80$ 、領域分割法による格子系では外側の分割領域1は $1/80$ 、内側の分割領域2は $1/40$ を図4のように配置した。またレイノルズ数 $Re=100$ 、時間刻み幅 $\Delta t=0.0035$ である。

5.2 正方柱まわりの流れ 図5は正方柱まわりの流れの全計算領域である。 x 方向の長さは16、また y 方向は12であり、その中に一辺の長さ1の正方柱を置く。単一格子系では格子間隔 $1/10$ 、領域分割法による格子系では正方柱を取り囲む x 方向に6、 y 方向に6の大きさの分割領域1は $1/10$ 、その外側の分割領域2は $1/5$ とした。

初期条件は、 $u=1, v=0, p=1$ の一様流中に正方柱をおいた衝撃出発で、定常なカルマン渦が出現する状態まで計算させた。境界条件は以下に記すとおりである。

上流境界: $u=1, v=0, p=1$

図4 正方空洞内流れの計算領域

図5 正方柱まわりの流れの計算領域

下流境界: u, v 外挿, p は運動方程式に従う

側方境界: $\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, p = 1$

物体表面: 粘着壁の条件

またレイノルズ数 $Re = 100$, 時間刻み幅 $\Delta t = 0.02$ とした。

6. 計算結果

6.1 正方空洞内流れ 単一格子系と領域分割格子系の二つにおける計算結果を比較する。図6は、流線図の比較である。点線が単一格子系での計算結果、実線が領域分割法による計算結果である。また破線は分割領域の境界を示している。流れ関数 ψ は x 方向速度 u に関しての式

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u$$

を積分することにより計算した。

図6 正方空洞内流れの流線図

図7 移動壁に垂直な中心線における速度分布

図7には、移動壁に垂直な中心線における x 方向速度 u の分布を示す。単一格子系、領域分割格子系での結果にはそれぞれ○印、□印をつけている。

二つの方法による結果を比較すると、壁近傍での格子間隔が同一の領域、また格子間隔の違う領域ともよく一致していることがわかる。

二つの格子系での、速度 u, v 圧力 p の計算格子点の合計および計算時間の比を表1に示す。領域分割を行ったほうが計算時間の比が計算格子点の総数の比よりも小さく、これは分割領域の境界値の受け渡しが必要なことにもかかわらず定常解に至るまでの時間が短いことを示している。ポアソン方程式を解くために緩和法を用いているので、ここに最も格子点数の減少の効果があらわれると考えられる。

6.2 正方柱まわりの流れ 次に、正方柱まわりの流れに対する、二つの格子系における計算結果を比較する。図8は、定常なカルマン渦放出状態における揚力係数 C_L の波形図である。 C_L は

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 h}$$

と定義される。揚力 L は物体表面の圧力および粘性力により計算される。ここで U_∞ は主流速度、 ρ は密度(一定)、 h は正方柱一辺の長さである。 x 軸には無次元時間 t をとる。波長、振幅とも一致しており、物体表面での物理特性は定量的に等しいことがわかる。

図9、10は図8のA時点における等渦度線図、等圧力線図である。渦度 ω は、

表1 正方空洞内流れの総格子点数と計算時間

	number of grid points	CPU time [sec]
1-domain	20336 (1)	7568.5 (1)
2-domain	13940 (0.69)	4861.8 (0.64)

図8 正方柱まわりの流れの揚力係数

図 9 正方柱まわりの流れの等渦度線図

図 10 正方柱まわりの流れの等圧力線図

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

によって求められている。点線は単一格子系での計算結果、実線は領域分割法による格子系での計算結果、また破線は分割領域の境界である。両図は物体から離れた格子間隔の異なる地域では多少のずれが見られるが、実用上差支えない程度であり、物体近傍ではよく一致している。

二つの格子系での計算格子点の合計および1時間ステップ当たりの平均計算時間の比を表2に示す。正方

表 2 正方柱まわりの流れの総格子点数と計算時間

	number of grid points	CPU time [sec]
1-domain	58920 (1)	48.35 (1)
2-domain	22316 (0.38)	10.35 (0.21)

空洞内流れと同様に計算時間の比のほうが格子点数の比より小さい。また総格子点数が多いためか、正方空洞内流れの場合よりこの効果は顕著である。これらの結果より、本論文で用いた数値計算法は領域分割した格子系に対して非常に適応性が良いといえる。

7. 結 論

単一格子系および領域分割格子系において、非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の数値計算を行い双方の結果を比較した。両者は定性的・定量的によく一致し、本論文で取り上げた領域分割法を用いた計算結果は十分信頼性があることがわかった。

また、計算格子点数の減少以上に計算時間の短縮率が大きいという結果が得られ、本論文で用いた数値計算法と組合せた場合に大きな効果が期待できることがわかった。

文 献

- (1) Wambecq, A., Rational Runge - Kutta Methods for Solving Systems of Ordinary Differential Equations, *Comp.*, 20(1978), 333-342.
- (2) Satofuka, N. and Tsujita, N., A New Explicit Method for The Numerical Solution of The Compressible Navier-Stokes Equations, *Proceedings of The BAIL II Conference*, (1982), 364-369.
- (3) Harlow, F. H. and Welch, J. E., Numerical Calculation of Time - Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid Free Surface, *Phys. Fluids*, 8-12(1965), 2182-2189.