同じ表面形をもつ凸面と凹面との 間のしぼり膜について*

岡 峰夫*¹, 長谷川英治*¹Fluid Film Squeezing Between Convex and Concave
Walls of the Same Curvature

Mineo OKA and Eiji HASEGAWA

The problem of fluid film squeezing between convex and concave walls of the same curvature is studied theoretically. Their shapes are arbitrary but axisymmetric, and they are installed coaxially. One wall is fixed and the other is moving along its axis with an arbitrary velocity. Assuming that the ratio of the gap between the two walls to their radii is small, an approximate solution of Navier-Stokes equation is found in the form of the power series of the ratio with precision up to the third order. In order to confirm the accuracy of the approximate solution, it is compared with a numerical solution for the case of flat walls. They agree with each other. It is found that the results obtained numerically by other workers can be derived easily from the approximate solution. The effect of the curvature of the walls on the load capacity is investigated using sinusoidal and parabolic shapes for the walls. For the case of the moving wall with a constant velocity, the leading term of its effect is proportional to the second order of the ratio of the gap to the radius. For the case of the oscillating wall, the leading term of its effect on the mean load capacity is proportional to the third order. Their proportional constants are expressed in the form of a quadratic expression of the maximum height in the cross-sectional profile of the curved wall. The effect of the curvature for the convex wall differs in magnitude from that the concave wall.

Key Words: Fluid Dynamics, Viscous Flow, Lubrication, Squeeze Film, Curved Wall, Load Capacity

1. いとぐち

互いに相対運動をしている接近した2つの面の間の流体運動は流体潤滑でのしぼり膜の研究として従来から数多くの研究者に関心を持たれてきた。これまでの応用目標が主に軸受という機械要素の一部品の場合に限られていたために、この方面の研究は平らな壁面間のしぼり膜^{(1)~(6)}に集中していた。近年、人口関節の開発に関連して、押し付け合う隙間内の流体運動が注目されている⁽⁷⁾、また、相変化物質を利用した蓄熱装置に関連して、加熱面と溶融面との間の流れの研究^{(8)~(10)}がなされつつあり、これも一種のしぼり膜の現象とみることができる。これら新しい分野への応用の際のしぼり膜現象の特徴は、押し付け合う2つの面の形が平らでなく曲がっていることと、それら2つの面の表面形が互いにほとんど同じであることであ

る。最近、潤滑の方面の研究でも、曲がった面の間のしぼり膜に関心がもたれ、いくつかその成果が発表されている^{(11)~(13)}。しかし、それらは平らな面と曲がった面との間のしぼり膜の場合についてであり、しかも、一方向に押し付けられる場合にほとんど限られている。

ここでは、上述の理由から、表面が同じ形をもつ接近した2つの壁の一方が他方に対して相対運動をする場合について、その間にある流体の運動を調べる。その際、一般に相対運動の向きとしては両壁面が接近したり離れたりする向きと壁面に沿った向きとがある。ここでは、まず、前者の向きの運動のみの場合をとりあげ、しぼり膜の性質を理論的に研究し、主に、流体より両壁面が受ける力について述べる。

2. 支配方程式

軸対称的な形をした、同じ表面形をもつ接近した凸面と凹面の壁の一方が他に対して対称軸に沿って勝手な速度をもって運動しているものとする。図1に示されているように、静止していると見なされる下の壁の表面に原点をもち、対称軸をz軸とする円筒座標系(r,

* 平成元年7月14日 東海支部岐阜地方講演会において講演、原稿受付 平成元年1月10日。

*¹ 正員、慶応義塾大学理工学部(〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。

θ, z)をとれば、静止壁の形状は r のみの関数 $H(r)$ で表示され、運動壁の位置は、両壁の z 方向に測った隙間を時間 t の関数 $h(t)$ で表示すれば、 $H(r)+h(t)$ で与えられる。そして、両壁は半径 R の円筒形であるものとする。これら2つの壁の間で、動粘度 ν 、密度 ρ の非圧縮性粘性流体が速度成分 $(u, 0, w)$ をもち、軸対称的に運動させられているものとする。

隙間の代表値を h_0 、運動する壁面の速度の代表値を V_0 とし、座標 r は壁面の半径 R で、座標 z は h_0 で、時間 t は h_0/V_0 で、 r 方向の速度 u は $V_0 R/h_0$ で、 z 方向の速度 w は V_0 で、圧力 p は $\rho \nu V_0 R^2/h_0^3$ でそれぞれ無次元化すれば、両壁面間の流れを支配する方程式は、無次元化された形で、運動と連続の方程式より、

$$u_{zz} - p_r = \alpha \text{Re} (u_t + u u_r + w u_z) - \alpha^2 \left\{ \frac{1}{r} (r u)_r \right\}_r, \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$p_z = \alpha^2 w_{zz} - \alpha^3 \text{Re} (w_t + u w_r + w w_z) + \alpha^4 \frac{1}{r} (r w_r)_r, \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{1}{r} (r u)_r + w_z = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。ここで、 Re はレイノルズ数 $V_0 R/\nu$ であり、 α は隙間比 h_0/R である。また、下付添字 t, r, z はそれらの変数での偏微分を表すものとする。なお、代表隙間 h_0 および代表速度 V_0 は具体的に壁面形と相対速度が指定された後に、はじめて与えられるものであることを注意しておく。

つぎに、境界条件は静止壁上での粘着の条件と運動壁上で流体が壁とともに運動することを表す運動学的条件と中心で圧力が軸対称となる条件より、

$$z = H(r) : u = 0, w = 0, \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$z = H(r) + h(t) : u = 0, w = h_t, \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$r = 0 : p_r = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

図1 系の概略と座標系

となる。最後に、ここでは、両壁面を取り囲むまわりの状況を見捨て隙間内の流体運動のみを解析しようとしているため、曲がった壁の周囲での条件が必要となる。この条件のつけ方は種々考えられるが、静止壁の周囲で圧力が一定値、零、をとるものと仮定する。すなわち、

$$r = 1, z = H(1) : p = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

とする。また、運動する壁に働く力 F_m および静止している壁に働く力 F_s は

$$F = 2 \int_0^1 \left\{ p - 2 \alpha^2 w_z + H_r (\alpha^2 u_z + \alpha^4 w_r) \right\} r dr \quad \dots\dots\dots (8)$$

をそれぞれの壁面上で計算することにより求められる。ただし、 F は $\pi \rho \nu V_0 R^4/h_0^3$ で無次元化されている。

3. 近 似 解

いま、独立変数 z の代わりに静止壁面上から測った距離

$$\zeta = z - H(r) \quad \dots\dots\dots (9)$$

を用い、また、 z 方向速度 w の代わりに

$$W = w - H_r u \quad \dots\dots\dots (10)$$

で定義される W を用いれば、 r と ζ を独立変数とした連続の式は軸対称円筒座標の連続の式と同じになるので、流れ関数 Ψ を導入して

$$u = \Psi_\zeta / r, W = -\Psi_r / r \quad \dots\dots\dots (11)$$

と表すことができる。壁面の形状が曲がっている場合には、平らな場合と異なり、独立変数 r を分離することはできないが、未知変数 u, w, p, Ψ, W, F などをそのまま隙間比 α のべき級数、

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3 + \dots \quad \dots\dots\dots (12)$$

の形に展開することにより、文献(5)の解に対応した曲がった場合の級数解を求めることができる。

流れ関数 Ψ および圧力 p の解を α の3次の近似式まで示すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= \frac{h_t}{2} r^2 \eta^2 (2\eta - 3), \quad \Psi_1 = \text{Re} r^2 h \tilde{\phi}^2 \\ &\phi \left\{ \frac{h_{tt} h}{20} + \frac{h_t^2}{280} (4\phi^2 + 23) \right\}, \\ \Psi_{F2} &= \text{Re}^2 r^2 h^2 \tilde{\phi}^2 \phi \left\{ \frac{h_{ttt} h^2}{16800} (20\phi^2 - 11) \right. \\ &- \frac{h_{tt} h_t h}{403200} (1040\phi^4 + 952\phi^2 - 831) + \frac{h_t^3}{10348800} \\ &\left. (8064\phi^6 + 34832\phi^4 - 4208\phi^2 - 9363) \right\}, \\ \Psi_{H2} &= \frac{h_t h}{2} r \tilde{\phi}^2 (H_{rr} r + 3H_r), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{F3} = & Re^3 r^2 h^3 \tilde{\Phi}^2 \Phi \left\{ \frac{h_{ttt} h^3}{24192000} (400 \Phi^4 - 520 \Phi^2 + 201) - \frac{h_{ttt} h_t h^2}{1241856000} (109760 \Phi^6 - 86800 \Phi^4 \right. \\
& + 2276 \Phi^2 + 12261) - \frac{h_{tt}^2 h^2}{155232000} (9520 \Phi^6 - 1400 \Phi^4 - 7829 \Phi^2 + 4104) + \frac{h_{tt} h_t^2 h}{64576512000} (12320000 \Phi^8 \\
& + 14441728 \Phi^6 - 21634336 \Phi^4 + 6412624 \Phi^2 + 517005) - \frac{h_t^4}{26017792000} (11300352 \Phi^{10} + 48174336 \Phi^8 \\
& - 10995264 \Phi^6 - 24764768 \Phi^4 + 12670694 \Phi^2 - 469563) \left. \right\}, \quad \Psi_{H3} = Re r \tilde{\Phi}^2 \left[\frac{h_{tt} h}{480} \{ h (H_{rr} r + 3 H_r) \right. \\
& (12 \Phi^2 + 5) - 24 H_r^2 r \Phi \} + \frac{h_t}{13440} \{ 3 h H_{rr} r^2 (16 \Phi^4 + 8 \Phi^2 - 67) + 144 H_{rr} H_r r^2 \Phi (4 \Phi^2 - 5) \\
& - h H_{rr} r (48 \Phi^4 + 248 \Phi^2 + 831) + 48 H_r^2 r \Phi (4 \Phi^2 + 23) - 3 h H_r (20 \Phi^2 + 27) (12 \Phi^2 + 1) \} \left. \right] \quad (13) \\
p_0 = & \frac{3 h_t}{h^3} (r^2 - 1), \quad p_1 = \frac{3 Re}{140 h^2} (14 h_{tt} h - 25 h_t^2) (r^2 - 1), \quad p_{F2} = \frac{Re^2}{646800 h} \\
& (-231 h_{ttt} h^2 + 1540 h_{tt} h_t h - 1662 h_t^3) (r^2 - 1) - \frac{6 h_t}{h} \tilde{\Phi}, \quad p_{H2} = \frac{6 h_t}{h^3} \left[-2 \int_r^1 H_r^2 r dr \right. \\
& + h \{ H_r r \Phi + \frac{1}{2} H_r(1) \} \left. \right], \quad p_{F3} = \frac{Re^3}{3531528000} (14014 h_{ttt} h^3 - 67977 h_{ttt} h_t h^2 - 71253 h_{tt}^2 h^2 \\
& + 265818 h_{tt} h_t^2 h - 144591 h_t^4) (r^2 - 1) - Re \left\{ \frac{h_{tt} h}{5} (3 \Phi + 1) \left(\Phi + \frac{1}{2} \right) + \frac{3 h_t^2}{560} \tilde{\Phi} (336 \Phi^4 - 336 \Phi^2 \right. \\
& + 31) \left. \right\}, \quad p_{H3} = \frac{Re}{h^2} \left[\frac{h_{tt} h}{10} \left(-6 \int_r^1 H_r^2 r dr - 5 h \{ H - H(1) \} + 6 h \{ H_r r \Phi + \frac{1}{2} H_r(1) \} \right) \right. \\
& - \frac{3 h_t^2}{560} \left(-128 \int_r^1 H_r^2 r dr + 36 \{ H_r^2 r^2 - H_r(1)^2 \} + 7 h \{ H_{rr} r^2 \Phi (48 \Phi^4 - 40 \Phi^2 + 15) \right. \\
& + 4 H_{rr}(1) \} + 200 h \{ H_r r \Phi + \frac{1}{2} H_r(1) \} \left. \right] \quad \dots\dots\dots (14)
\end{aligned}$$

となる。ここで、 η , Φ , $\tilde{\Phi}$ は

$$\eta = \frac{z}{h}, \quad \Phi = \eta - \frac{1}{2}, \quad \tilde{\Phi} = \Phi^2 - \frac{1}{4} \quad \dots\dots (15)$$

で定義される量であり、また、 $n=2,3$ として、

$$\Psi_n = \Psi_{Fn} + \Psi_{Hn}, \quad p_n = p_{Fn} + p_{Hn} \quad \dots\dots (16)$$

である。

W は、壁面の法線方向速度成分の $(1 + \alpha^2 H_r^2)^{1/2}$ 倍に相当する量であるが、この倍率の影響は α の2乗程度であり、 α の0次、1次の近似の範囲では W は法線方向速度と一致する。また、壁面の接線方向の速度成分は、 $(1 + \alpha^2 H_r^2)^{-1/2} (u + \alpha^2 H_r w)$ で表されるが、同様に α の1次までの近似の範囲で、 u と一致する。したがって、 u , W で表せば α の1次までの範囲で、速度場を壁面の接線および法線方向の速度で表したことになる。

さらに、式(9)の変換により z 座標の代わりに静止壁面から測った距離 z を用いれば、 α の1次の近似までの範囲の流れ関数 Ψ_0 , Ψ_1 および圧力 p_0 , p_1 の式に壁面の形状を表す H は現れず、壁面の形が平らな場合⁽⁵⁾と一致する。すなわち、 α の1次までの範囲で

は、曲がった壁面に沿って平らな場合の流れが生じていることになる。したがって、 u , w を z 座標で表した場合には、見かけ上 α の0次から壁面の形状の影響が現れるが、本質的效果は α の2次以上の近似から現れることになる。

また、 α の2次と3次の近似解は、下付添字 F で表した形式的に平らな壁面の場合に帰着できる解と下付添字 H で表した本質的に壁面形状 H に依存する解とに分離してそれらの和の形で表すことができる。壁面の形が平らな場合の解は文献(5)に示されている。その W は r を分離した流れ関数であり、本論文の Ψ とは $\Psi = -r^2 W/2$ の関係にある。下付添字 F を付けた解は、式(9), (10)の変換をすることにより、壁面が平らな場合の解、文献(5)の式(22)-(25), (27)-(30), (32)-(35)で $z = z_0$ とおいたものと完全に一致する。つぎに、式(8)で与えられる壁面に働く力は次のようになる。

$$F_0 = - \frac{3 h_t}{2 h^3}, \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$F_1 = \frac{3 Re}{280 h^2} (-14 h_{tt} h + 25 h_t^2), \quad (18)$$

$$F_2 = \frac{Re^2}{1293600h} (231 h_{ttt} h^2 - 1540 h_{tt} h_t h + 1662 h_t^3) + \frac{3h_t}{h^3} (h H_r - 4 J_1), \quad (19)$$

$$F_{3m} = \frac{Re^3}{7063056000} (-14014 h_{ttt} h^3 + 67977 h_{ttt} h_t h^2 + 71253 h_{tt}^2 h^2 - 265818 h_{tt} h_t^2 h + 144591 h_t^4) - \frac{Re h_{tt} h}{2} + \frac{Re}{h^2} \left\{ \frac{h_{tt} h}{10} (-6 J_1 + 3 h H_r + 10 h J_2) - \frac{3 h_t^2}{140} (-14 J_1 - 9 H_r^2 + 7 h H_{rr} + 39 h H_r) \right\}, \quad (20)$$

$$F_{s3} - F_{m3} = Re \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{h_t}{2} (h - 2 J_2) \right) - \frac{h_t^2}{2} + \frac{3 h_t^2 H_r}{5 h} \right] \quad (21)$$

ただし, J_1, J_2 は,

$$J_1 = \int_0^1 H_r r^2 dr, \quad (22)$$

$$J_2 = \int_0^1 H_r r^2 dr = H - 2 \int_0^1 H_r dr \quad (23)$$

で表される定積分であり, 式(19)-(21)に積分されずに現れる H_r, H_{rr} は $r=1$ の値をとるものとする. また, α の3次の解は運動する壁面上と静止している壁面上で値が異なるので, それぞれ, 下付添字 m および s をつけて表してある. なお, 負荷容量 F も $F = F_F + F_H$ のように形式的に平らな場合に相当する解 F_F (式(17), (18), 式(19)の第1項, 式(20)の第1, 第2項)と本質的に壁面の形状 H に依存する解 F_H (式(19)の第2項, 式(20)の第3項)とに分けて表すことができるので, 負荷容量 F も, 以下, 適宜, 分離した形を用いる.

4. 平らな壁面の解

壁面の形状が平らな場合については, 級数展開法や差分法による数値解析が多く行われている^{(1)~(6)}. 黒田らは, 運動する壁面が一定速度で近づく場合について級数解⁽²⁾と数値解を求め, 両者を比較している^{(3), (4)}. また, 黒田ら⁽⁴⁾, 森ら⁽⁶⁾は, それぞれ独立に正弦振動する場合について差分法を用いた数値解析を行い, その性質を示している. ここでは, 圧力と負荷容量について文献(5)で示した α の4次までの解 (3次までの解は本論文で示した下付添字 F の解で $H=0$ としたものと一致する)と, r を分離した方程式を差分法を用いて解いた数値解とを比較し, これまでに研究が多く, しかも, 簡単な壁面の形状である平らな場合について, 前節で得た級数解の収束性とその性質をまずを調べておく.

4・1 等速運動する場合 まず, 壁面が一定の速度で運動する場合, すなわち, 無次元隙間 h が, $h = 1 \pm t$ (24)

で表される場合を考える. ここで, 代表隙間 h_0 にはある瞬間での隙間をとり時間はその時刻より測られるものとした. また, 代表速度 V_0 には壁の一定な運動速度の大きさをとった. $t=0$ における F は, 次のようになる.

$$F_F = \mp \frac{3}{2} + \frac{15}{56} \alpha Re \pm \frac{277}{215600} (\alpha Re)^2 + \frac{48197}{2354352000} (\alpha Re)^3 \quad (25)$$

ただし, 複号は, 式(24)の複号と同順であり, 以下同じである. 壁面が押し付けられる場合の $t=0$ における各近似度の解析解を αRe の関数として示すと図2のようになる. ここで, 数値解は $t=-1$ より突然近づいた場合の差分法による解である. 黒田らは, 解析解⁽²⁾と数値解^{(3), (4)}とを比較して解析解が数値解より大きめの値を与えることを指摘しているが, さらに高次の解を求めると, 図2のように解は(+)側へ発散する解と(-)側へ発散する解とが交互に現れ, 数値解はその間にあり, 本論文で得た α^3 までの解は αRe が40近くまで良い値を与えることが知られる.

4・2 正弦振動する場合 つぎに, 周期的に運動する場合, すなわち, 隙間 h が,

$$h = 1 + A \cos(2\pi t) \quad (26)$$

で表される正弦振動する場合を考える. ここで, 代表隙間 h_0 は平均隙間をとり, 代表速度 V_0 は振動数 f と平均隙間の積 $f h_0$ をとって無次元化してあり, レイノルズ数 Re は $f h_0 R / \nu$ となる. 式(17)-(20)より時間平均負荷容量を求めると,

$$\bar{F}_F = \frac{33}{280} \alpha Re I_1 + \alpha^3 Re \pi^2 A^2 + \frac{(\alpha Re)^3 \pi^4}{2354352000} A^2 (267777 A^2 - 51688), \quad (27)$$

となる. ただし, I_1 は

$$I_1 = \int_0^1 h_t^2 / h^2 dt = \int_0^1 h_{tt} / h dt = 4\pi^2 (1 / \sqrt{1 - A^2} - 1) \quad (28)$$

図2 負荷容量への各近似度の影響

図4 中心圧力の時間変化 (A = 一定)

図3 時間平均負荷容量—数値解と級数解の比較

図5 中心圧力の時間変化 (Re = 一定)

である。また、図3に $A=0.3$ の場合について α の0~4次までの級数解と差分法によって求めた数値解を比較して示す。ただし、 A と αRe の関数として表示できる静止している壁に働く時間平均負荷容量 $\bar{F}_s$ で示してある。なお、運動する壁の時間平均負荷容量 $\bar{F}_m$ はこれに $\alpha^3 Re \pi^2 A^2$ を加えたものである。また、 α の偶数次の解は時間平均をとると零となるので、2または4次までの解は、それぞれ1または3次までの解と一致する。図3より1または2次までの解は αRe が7~8程度まで、また、3または4次までの解は αRe が15程度まで数値解とよく一致している。このように、 α^3 までの近似解を求めることは近似度の改善の立場からみて大切である。

森らは、正弦振動する場合の中心圧力の時間変動を差分法により求め、最大隙間を代表長さとするレイノルズ数 $Re' (= \alpha Re (1+A)^2)$ および振動の振幅 $AN (= A/(1+A))$ の効果を調べ、 AN が一周期間中の負圧の発生区間の長さを支配し、 Re' が負圧の最大値の発生時刻を支配していることを示した⁽⁶⁾。いま、ここに得られた級数解を用い、中心圧力の時間変化を A または Re をパラメータにとって示せば図4、5のようになり、上述の性質は十分得られた級数解で説

明することができる。このように、本研究で得た α^3 までの近似解はかなり有用なものであるとみられる。

5. 両壁面の受ける力の差

壁面の形状が平らな場合、運動する壁面と静止した壁面の受ける力の差は両壁面間に挟まれた流体のもつ運動量の時間変化に等しいことが示された⁽⁵⁾。この場合の力の差は式(21)の右辺の中括弧内の第1項と大括弧の第2項よりなっている。前者は0次近似の z 方向の運動量 ρw_0 を隙間全体について体積分したものの時間変化である。一方、後者は周囲から0次近似の流速 u_0 で流出する流体の z 方向の運動量 $\rho u_0 w_0$ より算出されたものである。平らでない場合には壁面に沿う0次近似流速の z 方向運動量成分 $\rho H_z u_0$ の隙間全体について体積分したものの時間変化がさらに付け加わり、それが式(21)の左辺の中括弧内の第2項である。つぎに周囲から流出する流体の運動量の z 成分としては一般に $\rho u w$ と $\rho w w$ とがあって、平らな場合には後者が恒等的に零となっていた。しかし、平らでない場合にはそれも同時に存在し、その影響が式(21)の大括弧の第3項として現れてきている。これらの影

響は平らでない場合も α^3 の程度の大きさである。また、これらの力の差は平らな場合に対応する分を除き H_r の 1 乗またはその積分に比例しているので、 H_r の正負によりその向きがかわる。したがって、壁面形状が上に凸か下に凸かで伝達される力に違いが生じることになる。

6. 壁面形状の力への影響

つぎに、 h 、 H に具体的に関数形を与えた場合について壁面の受ける力（負荷容量）の時間変化、時間平均への壁面の形状 H の影響を調べる。

6.1 正弦振動する場合 まず、隙間 h が式(26)で表される正弦振動する場合を考える。この場合、 F の H 依存性を示す主要項である α の 2 次の項、式(19)の第 2 項、は h_t に比例しているので、時間平均をとると零となり、壁面形状 H の時間平均負荷容量への影響は α の 3 次の項からはじめて現れる。

また、壁面の形状 H としては、変化幅 A_R で正弦波状に変化する、

$$H = A_R (\cos n\pi r - 1) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (29)$$

と表される場合と、 r の 2 次関数

$$H = A_R r^2 \dots\dots\dots (30)$$

で表される場合について考える。 F の H 依存項、式

図6 負荷容量の時間変化（正弦波形， $A_r > 0$ ）

図7 負荷容量の時間変化（正弦波形， $A_r < 0$ ）

(19)の第2項、式(20)の第3項は、 H_r と H_{rr} を含んでいる。前者の形状の特徴は、周辺部 $r=1$ で $H_r=0$ となるが、 H_{rr} がある値をもつ例であり、流体の流出による運動量の効果が平らな場合と類似している。一方、後者の形状は、周囲で勾配をもち、 H_{rr} が一定となるので、両方の影響が現れる簡単な例である。また、この種の問題を扱う場合、球面などを 2 次関数で近似して扱うことが多く、その様な場合の例ともなっている。

これらの壁面の形状の場合について、式(17)-(20)より運動する壁面の受ける力の時間変化が求められ、図6～8に示されている。形状が正弦波形($n=2$)の場合、 A_R の正負にかかわらず、 $|A_R|$ が増加するにつれ正の領域、負の領域ともにその絶対値は増加する。一方、 $A_R > 0$ の場合には、正の領域で負に変わる直前にピークが現れるが、負になっている区間の長さはあまり変化しない(図6)。 $A_R < 0$ の場合には、正の領域に $A_R > 0$ の場合のようなピークは現れず、負になっている時間が長くなる(図7)。また、形状が 2 次関数で表される場合には、 A_R が増加するにつれほぼ単調に正、負の領域とも絶対値が減少している(図8)。

つぎに、時間平均負荷容量 $\bar{F}$ を考える。平らな場合に相当する項、 $\bar{F}_F$ は式(27)と同じ形になり、 $\bar{F}_H$ は、
$$\bar{F}_H = \frac{3}{140} \alpha^3 \text{Re} \{ (-14 J_1 + 9 H_r^2) I_1$$

$$- (7 H_{rr} + 39 H_r) I_2 \} \dots\dots\dots (31)$$

と表される。ただし、 I_2 は、

$$I_2 = \int_0^1 h_t^2 / h dt = \sqrt{1-A^2} I_1 \quad (32)$$

である。壁面の形状が正弦波形の場合には、

$$\bar{F}_H = \frac{3}{80} \alpha^3 \text{Re} A_R \{ -I_1 (n^2 \pi^2 - 3) A_R + 4(-1)^n n^2 \pi^2 I_2 \} \dots\dots\dots (33)$$

となり、また、2 次関数の場合には、

$$\bar{F}_H = \frac{\alpha^3 \text{Re}}{35} A_R (20 I_1 A_R - 69 I_2) \dots\dots (34)$$

図8 負荷容量の時間変化（2次関数）

となる。ともに、 A_R の2次関数で表される。 A_R に対する $\bar{F}$ の変化を正弦波形の $n=1,2$ の場合について図9に、2次関数の場合について図10に示す。

時間平均負荷容量 $\bar{F}$ は、 n が奇数の場合、 $A_R > 0$ ，すなわち、運動する壁面が中心で凹の場合、変化幅 A_R が大きくなるにつれ減少するが、 $A_R < 0$ ，すなわち、運動する壁面が中心で凸の場合、変化幅 $|A_R|$ が大きくなるにつれ増加し、 A_R の正負に対して対称ではない。また、 n が偶数の場合には逆となる(図9)。

また、2次関数で表される場合も $A_R = 0$ に対して対称とはならず、 $A_R > 0$ ，すなわち、運動する壁面が凸の場合には、 A_R が増加するにつれ時間平均負荷容量は減少し、 $A_R < 0$ ，すなわち、運動する壁面が凹の場合には、 $|A_R|$ の増加とともに増加する(図10)。

A_R の小さい場合についての平均負荷容量 $\bar{F}$ の A_R に対する変化率の正負は式(33)、(34)の A_R の1乗の項の符号で決定される。それらは、形状を代入する前の式(31)ではその式の右辺の中括弧内の第2項に対応し、周辺($r=1$)での H_r 、 H_{rr} の値に依存している。例えば、 H の形状が $n=1$ の正弦波形で、かつ $A_R > 0$ の場合と2次関数で $A_R < 0$ の場合とは形状の概形は似ているが、前者は周囲で $H_r = 0$ 、 $H_{rr} > 0$ 、後者は $H_r < 0$ 、 $H_{rr} < 0$ なので、 A_R の効果は逆に現れることになる。

6・2 等速度運動する場合 つぎに、式(24)で与えられる壁面が一定の速度で運動する場合を考える。この場合、壁面形状 H の負荷容量への影響は α の2次の項から現れる。 $t=0$ における F_F は式(25)で与えられる。また、形状依存項は、

$$F_H = \pm 3\alpha^2 (H_r - 4J_1) - \frac{3}{140}\alpha^3 \text{Re} \{ -(14J_1 + 9H_r^2) + (7H_{rr} + 39H_r) \} \dots\dots\dots (35)$$

で与えられ、壁面の形状が正弦波形的場合は、

$$F_H = \frac{3}{80}\alpha^2 A_R \{ A_R (\alpha \text{Re} = 40) (n^2 \pi^2 - 3) + (-1)^n 4\alpha \text{Re} n^2 \pi^2 \} \dots\dots\dots (36)$$

図9 時間平均負荷容量(正弦波形)

となり、2次関数の場合には、

$$F_H = \frac{1}{35}\alpha^2 A_R \{ 2A_R (17\alpha \text{Re} \mp 140) - 3(23\alpha \text{Re} \mp 70) \} \dots\dots\dots (37)$$

となる。スクイズ運動が正の場合でも負の場合でも正弦波形的場合には $A_R = 0$ での傾き dF/dA_R は Re に対して一定であるが、2次関数の場合には、 $\alpha \text{Re} = 70/23 (=3.04)$ でその正負が変わり、曲がりの効果がその値を境にして逆に現れる。

7. まとめ

表面が軸対称的で、しかも、同じ形をもつ接近した2つの壁の一方が他方に対して、対称軸に沿って相対運動する場合のしほり膜の性質をおもに壁面の受ける力(負荷容量)について理論的に調べた。両壁面間の流体運動を支配する $N \cdot S$ の方程式を隙間比 α を展開パラメータとして展開し、 α の級数の形にその3乗までの解が求められた。隙間は時間の任意の関数であり、壁面形状は r の任意の関数として解は求められた。具体的に、隙間の時間変化を正弦振動の場合と一定の速度の場合に選び、壁面の形状として、正弦波形的の場合と2次関数の場合が調べられた。

まず、壁面が平らな場合について、近似解の精度を知るために、数値解と比較され、正弦振動する場合でも近似解は $\alpha \text{Re} \sim 15$ 程度まで成り立つことが示された。また、数値解により得られた性質は近似解により十分説明された。

α の1次までの解は、ちょうど壁面に沿う方向と壁面に垂直な方向の速度を r 方向、 z 方向とする平面壁の場合の流れと同じになる。したがって、壁面の曲がったための効果は、本質的には α の2次から現れる。これらの解は平らな場合に相当する解と壁面の形に依存する解とに分離して表すことができる。

負荷容量への形状の影響は α の2次から、周期運動する場合の時間平均負荷容量には α の3次から現れ、

図10 時間平均負荷容量(2次関数)

形状の変化幅の2次式で表される。また、形状が凹面と凸面の場合では異なりどちらの壁が運動しているかで負荷容量に違いを生じる。壁面の周囲での形状の勾配と曲率に依存して負荷容量は変わりうる。

文 献

- (1) Ishizawa, S., *Bull. JSME*, 9-35(1966), 533
- (2) 黒田, 堀, 潤滑, 21-11(1976), 740
- (3) 黒田, 仙北谷, ながれ, 3-4(1984), 348
- (4) Kuroda, S., *Proc. JSLE Int. Trib. Conf.*, July 8-10(1985)
- (5) 長谷川, ほか2名, 機論, 53-486, B(昭62-2), 349
- (6) 森, 笠井, 機論, 54-499, B(昭63-3), 575
- (7) Mow, V. C., Lai, W. M., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 11(1979), 247
- (8) Moore, F. E., Bayazifoglu, Y., *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, 104-1(1982), 19
- (9) Moallemi, M. K., Viskanta, R., *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, 107-2(1985), 451
- (10) 斉藤, ほか2名, 機論, 53-491 B(昭62-7), 2130
- (11) Murti, P. R. K., *Trans. ASME, (Ser. F)* 97-4(1975), 650
- (12) Guputa, R. S., Kapur, V. K., *Trans. ASME, (Ser. F)* 102-4(1980), 501
- (13) 長谷川, 機論, 50-457, C(昭59-9), 1623