散逸積分と零方程式モデルを使った
円すいディフューザの静圧分布の簡易計算*原 口 荘 太 郎*¹Numerical Calculation of Turbulent Flow through a Conical
Diffuser by Use of the Momentum Equation, the Zero Equation
Shear-Stress Model and the Integrated Turbulence Production

Soutarou HARAGUCHI

Velocity distribution-, turbulence shear-stress distribution and static pressure of the turbulent flow through a conical diffuser were numerically calculated and compared with the measured data. Numerical calculation was achieved by use of the momentum equation, the zero equation model for turbulence shear-stress and the integrated turbulence-energy production. The results mean better reliability of this method.

Key Words: Numerical Analysis, Turbulent Flow, Axisymmetric Flow, Conical Diffuser, Momentum Equation, Zero Equation Model, Turbulence-energy Production, Static Pressure, Velocity Distribution, Shear-stress Distribution

1. は じ め に

スーパーコンピュータの基本操作時間が0.01 ns程度あれば、ナビエ・ストークスの式を直接に解くこと、かくして、計算風洞も実用段階であると言われる。しかし、マイクロ・コンピュータを使って、近似計算ができると便利なことも多い。

乱流について、ナビエ・ストークスの式を近似計算する際は、それを時間平均した運動方程式を乱流モデルを使って解くのであるが、近時、乱流モデルは複雑さを増しているようである⁽¹⁾⁽²⁾。一方、マイクロコンピュータを念頭に置けば、乱流モデルは零方程式モデルが最も便利であるが、零方程式モデルは、近時、必ずしも高い評価はなされてないようである。

そこで、典型的な乱流である円すいディフューザを通る流れについて、零方程式モデルとして最も著名なCSモデル⁽¹⁾と先に報告した散逸積分を使った近似算法⁽³⁾とを利用し、運動方程式を解いて、円すいディフューザの静圧分布を計算し、実験結果と比較した。比較の対象はPozzoriniの実験CASE 0142⁽⁴⁾である。

計算結果を実験結果と比較すると、CSモデルをそのまま使って静圧計算の収束条件を若干工夫するか、CSモデルを若干修正すれば、したがって、零方程式モデルであっても、散逸積分を利用する静圧計算に十分に実用できることを示している。

2. 計算式と計算方法

軸対称流れの運動方程式および連続の式は、時間平均値を考えると⁽¹⁾、

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\mu \frac{\partial u}{\partial r} - \rho \overline{u'v'} \right) \right] \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 x は軸方向の距離、 r は軸からの距離(半径)、 u と v は時間平均流速の x と r 方向成分、 u' と v' は変動流速の x と r 方向成分、 P は静圧、 ρ は密度、 μ は粘性係数である。 $u'v'$ の上の横棒は時間平均値を表す。

円管内の軸対称流れを計算する際の式(1)、(2)の境界条件は、管壁において流速の滑りはなく、また、吹込みも吸出しもないとすれば、

* 平成元年7月14日 東海支部岐阜地方講演会において講演、原稿受付 昭和63年9月28日。

*¹ 正員、佐世保工業高等専門学校(〒857-11 佐世保市沖新町1-1)。

$$r=R \text{ で } u=v=0 \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

$$r=0 \text{ で } \partial u / \partial r = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

ここに、 R は x における管半径である。

式(1)を解くためには、未知量は $u, v, P, \overline{u'v'}$ の4個であるから、式(2)のほかにもう2式を要する。

そこで、一つは、乱流のせん断応力に関し、マイクロコンピュータを念頭に、CS モデル⁽¹⁾⁽²⁾を基本とする零方程式モデルを使う。すなわち、

$$\rho \overline{u'v'} = \rho \varepsilon_m \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

$$(\varepsilon_m)_{in} = K_{in} \cdot L_m^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \gamma_{tr} \quad \cdots \cdots \cdots (6 \cdot a)$$

$$(\varepsilon_m)_{out} = K_{out} \cdot 0.0168 \left| \int_0^\infty (U_c - u) dy \right| \cdot \gamma_{tr} \quad \cdots \cdots \cdots (6 \cdot b)$$

ただし、 $(\varepsilon_m)_{in} \leq (\varepsilon_m)_{out}$

ここに、添字 in と out は内層と外層を示す。また

$$y = R - r$$

$$L_m = 0.4y[1 - \exp(-y/A)]$$

$$A = 26(\nu/N)/U_*$$

$$N = (1 - 11.8P^*)^{0.5}$$

$$P^* = (\nu U_c / U_*^3) \cdot (dU_c / dx)$$

$$\gamma_{tr} = 1 - \exp \left[-G(x - x_{tr}) \cdot \int_{x_{tr}}^x \frac{dx}{U_c} \right]$$

$$G = 8.35 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{U_c^3}{\nu^2} \right) Re_x^{-1.34}$$

$$Re_x = U_c \cdot x / \nu$$

$$U_* = U_c \cdot \sigma_w / \sigma_w = (C_{fw} / 2)^{0.5}$$

$$C_{fw} = 0.246 \cdot 10^{-0.878H} (U_c \cdot \theta / \nu)^{-0.268}$$

$$H = \delta^* / \theta$$

ただし、 K_{in} と K_{out} は任意定数であり、CS モデルでは両者の値は 1.0 である。 U_c は管中心流速(主流の流速)、 U_* は摩擦速度である。 C_{fw} は壁摩擦応力係数で、Ludwig-Tillmann の式⁽⁶⁾を採用した。 δ^* は排除厚さ、 θ は運動量厚さである。

式(1)を解く際に必要なもう一つの式としては、管断面の散逸積分⁽³⁾

$$E = - \int_0^R \tau_i (\partial u / \partial r) 2\pi r dr \quad \cdots \cdots \cdots (7 \cdot a)$$

$$E = - \int_0^R u \cdot 2\pi (\tau_i + r \cdot \frac{\partial \tau_i}{\partial r}) dr \quad \cdots \cdots \cdots (7 \cdot b)$$

$$\tau_i = -\mu \frac{\partial u}{\partial r} + \rho \overline{u'v'} = C_f \cdot \rho \cdot \frac{U_c^2}{2}$$

を利用する⁽³⁾。これが本報の方法の特長であり、この代わりに管断面の流量を使用するのが一般である。

なお、式(7・a)を式(7・b)と変形して計算するのは、壁面における式(7・a)の被積分関数の値は極めて大き

いのに(実験的にもモデル的にも)その値が不明確であるのに対し、式(7・b)の被積分関数の値は(壁面において、 $u=0$ かつ、力の釣合いから、 $\partial \tau_i / \partial r$ の値も小さいので)壁面に向かって零に収束し、したがって、 E の値に壁近傍の乱流モデルの精度が影響しないからである⁽³⁾。それゆえに、式(7・b)の計算に際しては、壁近傍の乱流モデルの精度などを考慮して、壁近く(後述の計算例では $0 < y/R < 0.04$ の範囲)の u と τ_i の計算値は使用しない⁽³⁾。

管断面の位置 x における散逸積分 E が求めれば、管路の入口断面 x_0 から x までの乱れ生成エネルギーの総和 Ex および圧力損失 P_l は、 Q を管の流量として

$$P_l = Ex / Q = \left(\int_{x_0}^x E dx \right) / Q \quad \cdots \cdots \cdots (8)$$

そこで、断面 x における静圧 P を次式で計算する。

$$P = P_{t0} - P_d - P_l \quad \cdots \cdots \cdots (9)$$

ここに、 P_{t0} は x_0 における流量平均全圧、 P_d は x における流量平均動圧である。

実際に計算を実行するときは、 L を代表寸法とする MANGLER 変換、すなわち⁽¹⁾、

$$d\bar{x} = \left(\frac{R}{L} \right)^2 dx, \quad d\bar{y} = \left(\frac{r}{L} \right) dr,$$

$$\bar{\Psi} = \Psi / L \quad \cdots \cdots \cdots (10)$$

を導入し、 $x-r$ 面上の式を $\bar{x}-\bar{y}$ 面上の式に書き換える。ここに R は x における管の半径、 ϕ は $x-r$ 面上の流れ関数、 $\bar{\Psi}$ は $\bar{x}-\bar{y}$ 面上の流れ関数である。ただし、 $r=R$ で $\bar{y}=0$ とする。

さらに、壁近傍まで詳細に計算するために、次の変換をも行う⁽¹⁾。 U_0 を代表流速、 ν を動粘性係数、 ϕ を壁面の広がり角として、

$$Y = \left(\frac{U_0}{\nu L} \right)^{0.5} \cdot \bar{y} \quad \cdots \cdots \cdots (11)$$

$$F = \frac{\bar{\Psi}}{(U_0 \cdot \nu L)^{0.5}} \quad \cdots \cdots \cdots (12)$$

と置く。運動方程式は、

$$U = F' = \partial F / \partial Y \quad \cdots \cdots \cdots (13 \cdot a)$$

$$W = U' = \partial U / \partial Y \quad \cdots \cdots \cdots (13 \cdot b)$$

$$(BW)' = \frac{dP^*}{dx} + U \frac{\partial U}{\partial X} - W \frac{\partial F}{\partial X} \quad \cdots \cdots \cdots (13 \cdot c)$$

ただし、 $P^* = P / \rho U_0^2$

$$B = (1-t)^2 \cdot (1 + \varepsilon_m^+) / L$$

$$t = 1 - \sqrt{1 - 2 \cos \phi \left(\frac{L}{R} \right)^2 \cdot \frac{Y}{\sqrt{Re}}}$$

$$\varepsilon_m^+ = \varepsilon_m / \nu, \quad Re = U_0 \cdot L / \nu$$

また、 $X=x$ であり、 $U=u/U_0$ となる。つまり、 U は U_0 を代表流速とする無次元流速である。なお、 F は無

次元流れ関数であり、 $\bar{\varphi}$ は連続の式を満たしているの
で、 F も連続の式を満足する。

以上の変換を行うと、境界条件の式(3)と(4)
は⁽¹⁾⁽²⁾,

$$F(X,0)=0, U(X,0)=0 \dots\dots\dots(14)$$

$$W(X,Y_c)=-\frac{\sqrt{Re}}{2}\left(\frac{R}{L}\right)^2\left[\frac{dP^*}{dX}+\frac{d}{dX}\left(\frac{U_c^2}{2}\right)\right] \dots\dots\dots(15)$$

ここに、添字 c は管中心を示す。

3. 計算例と考察

Pozzorini の実験 0142⁽⁴⁾ で使われた円すいディフューザについて、式(13)を使い、円すいディフューザの軸方向の静圧変化を計算し、その結果と測定された静圧とを比較する。

実験 0142 のディフューザは入口直径 0.2 m, 出口直径 0.4 m, 長さ 1.91 m (広がり円すい角 6°) である。ディフューザを通る流れのレイノルズ数は、その入口の管半径と管中心流速 $U_{c1}(=U_0)$ を基準として、約 267 000 である。

初期条件の一つのディフューザ入口断面でのせん断応力係数 $C_f(=\tau/0.5\rho U_0^2)$, τ は摩擦応力, U_0 はディフューザ入口の管中心の流速, 壁近傍を除いて τ は $\rho \overline{u'v'}$ とほぼ一致する) の測定値を図 1 に○印で示す。 C_f の分布から推定した壁摩擦応力係数 $C_{fw}(=\tau_w/0.5\rho U_0^2)$, τ_w は壁摩擦応力) の値は 0.0025 である。なお、 C_f の分布は $0 \leq y \leq \delta$ (δ は境界層厚さ) でほぼ直線であるから、 C_f の分布は $0 \leq y \leq \delta$ で直線で(図 1 の小黒丸), $\delta \leq y \leq R$ では零として計算する。

なお、式(13)を計算するための初期条件としては、ディフューザ入口断面における C_f ではなくて、 ε_m が必要であるが、 $0 \leq y \leq \delta$ で C_f を直線分布として、式(5)を使って ε_m を求める。 δ の値は図 1 から推定する。

他の初期条件のディフューザ入口断面における速度分布は、与えられてないので、次式で示される総合速度分布で近似して計算する⁽²⁾。ディフューザ入口断面における静圧は零として計算する。

$$0 \leq Y^+ < 4: U^+ = y^+$$

$$4 \leq y^+ < 30: U^+ = C_1 + C_2 \ln(y^+) + C_3 [\ln(y^+)]^2 + C_4 [\ln(y^+)]^3$$

$$30 \leq y^+: U^+ = C_5 \ln(y^+) + C_6 + \frac{\Pi_w}{x} \dots\dots\dots(16)$$

$$\text{ただし, } y^+ = y U_\tau / \nu, U^+ = u / U_\tau$$

$$U_\tau = U_0 \cdot \sigma_w$$

$$\frac{\Pi_w}{x} = \frac{1}{x} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)$$

$$+ 2 \frac{\Pi}{x} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \cdot \left(3 - 2 \frac{y}{\delta} \right)$$

$$2 \frac{\Pi}{x} = \frac{1}{\sigma_w} - \frac{1}{x} \ln \left(\frac{\delta U_\tau}{\nu} \right)$$

$$C_1 = 4.19, C_2 = -5.75,$$

$$C_3 = 5.11, C_4 = -0.767,$$

$$C_5 = 1/x, C_6 = 5.5, x = 0.41,$$

$$\delta/R = 0.2$$

なお、初期条件としての速度分布の式(16)は y における流速を示すが、 Y における流速は、次式で Y から y を求め、その y に対する流速を式(16)から計算する。

$$\frac{y}{R} = 1 - \sqrt{1 - 2 \cos \phi \left(\frac{L}{R} \right)^2 \cdot \frac{Y}{\sqrt{Re}}} \dots\dots\dots(17)$$

ここに、代表寸法 L としてはディフューザ入口における管半径を採る。図 1 の実線が式(16)で計算したディフューザ入口断面の速度分布である。

式(13)を数値計算する際の Y の点として、次式を与える $Y(J)$ の各点を採用する。(したがって、図 1 のディフューザ入口の速度分布も $Y(J)$ の各点において計算した。)⁽¹⁾⁽²⁾

$$Y(J) = Y(J-1) + \Delta Y(J)$$

$$\Delta Y(J) = K \cdot \Delta Y(J-1)$$

$$\Delta Y(1) = 0.01, K = 1.14$$

$$(J=1,2,3,\dots\dots,J_n) \dots\dots\dots(18)$$

ここに $J=1$ は管壁, $J=J_n$ は管中心を示す。 J_n は管中心 $y/R=1$ に対し $Y(J_n)$ を式(17)で求め、次式で決めた。

$$J_n = \ln[1 + (K-1)Y(J_n)]$$

$$/\ln(K)+1 \dots\dots\dots(19)$$

運動方程式(13)を数値計算するために、まず、Keller の Box Method⁽¹⁾で、図 2 の格子に関し、式(13)を差分表示する。

そして、その差分式を、上流 $X(I-1)$ 断面の諸量は既知として、微小 $\Delta X = X(I) - X(I-1)$ 区間の静圧上

図 1 ディフューザ入口の u/U_0 と C_f の分布

昇量 $\Delta P_s = 2[P^*(I) - P^*(I-1)]$ を仮定し、 ΔX 下流の $X(I)$ 断面の諸量について解き、その ΔX 下流の断面の諸量を使って、式(7)～(9)を計算して下流の断面の無次元静圧 $P^*(I)$ を求め、仮定した ΔP_s に対応する無次元静圧 $P^*(I)$ の値と比較して、収束させる方法が考えられる。

しかし、式(13)の差分表示式は下流 $X(I)$ 断面の未知量 F , U , W に関して非線形になり、このままでは解けない。そこで、Newton 法⁽¹⁾で下流 $X(I)$ 断面の未知量 F , U , W の $(m-1)$ 回と (m) 回めの近似値の差 $\delta F(m)$, $\delta U(m)$, $\delta W(m)$ を導入し、式(13)の差分表示式をこれらについての線形の式とし、Block Elimination Method⁽¹⁾を使って、 $\delta F(m)$, $\delta U(m)$, $\delta W(m)$ について逐次近似計算をする。

その際の F , U , W の最初の近似値はすぐ上流断面 $X(I-1)$ の値とし、境界条件は、 $J=1$ (壁面) と $J=J_n$ (管中心) で、それぞれ⁽¹⁾⁽²⁾

$$J=1 \text{ で } \delta F=0, \delta U=0$$

$$J=J_n \text{ で } \delta W=W_{(m)} - W_{(m-1)}$$

$$\text{ここに, } W_{(m)} = \frac{\alpha}{2} \sqrt{Re} \left(\frac{R}{L} \right)^2$$

$$\times [2\beta - U_{(m)}^2(I) + U^2(I-1)] - W(I-1)$$

ただし、 $\alpha = 1/[X(I) - X(I-1)]$

$$\beta = P^*(I) - P^*(I-1) = \Delta P_s/2 \quad \dots\dots\dots (20)$$

である。そして、すべての格子点における $\delta F(m)$, $\delta U(m)$, $\delta W(m)$ の値が微小値 Ω 以下に収束するように逐次近似計算を繰返すのであるが、ここでは、乱流であるから、収束条件としては⁽²⁾,

$$J=1(\text{壁}) \text{ で } |\delta W(m)/[W(I) + \delta W(m)/2]| < \Omega \quad \dots\dots\dots (21)$$

とする。ただし、 $\Omega = 0.02$ とし、繰返し回数は最大でも 20 回まで、それを超えたら計算を打ち切って、式(7)～(9)の計算に移る。

そして、式(9)によって計算した静圧を代表流速 U_0 で無次元化した値と先に仮定した $\Delta P_s (=2\beta)$ に対応する無次元静圧 $P^*(I)$ との差 λ が微小値 ω に収束

するまで、 ΔP_s を仮定しなおして、上記の計算を繰返す。 λ が ω に収束すれば、その断面の計算を終り、さらに下流の断面の計算に移る。

このようにして計算した無次元静圧 $P_s^* (=P/0.5\rho U_0^2 = 2P^*)$ を図3に実線で示す。図3の計算値は図3に○印で示した測定値とよく一致している。これは、上記の ω の値、または、式(6)の係数 K_{in} と K_{out} の値を加減して、静圧の計算値を測定値に一致させたからである。

具体的に述べると、第1の方法は、CS モデルをそのまま使い、式(6)で $K_{in} = K_{out} = 1$ とし、 λ を図4に◎印で示す ω の値に収束させ、第2の方法としては λ を 0 ($\omega = 0$) に収束させる代わりに、式(6)の $K_{in} = K_{out} (=K)$ の値としては図4に○印で示す値を採って、cs モデルを若干修正し、静圧の計算値を測定値に一致させたものである。

なお、上記の第1の方法で計算した管断面の無次元速度分布とせん断応力係数分布を図5に、また、第2の方法で計算したそれらを図6に実線で示した。図5、6の丸印は、それらの測定値を示す。(図5と図6の分布は、図3に矢印で示した断面の分布である。)

速度分布の測定値が示されている(c)断面および(e)断面について図5と図6を比較すると、(c)断面では図6のほうは(計算値が測定値と)よく一致しており、(e)断面については、両図に大差はなく、計算値と測定値の一致はかなりよい。

考え方としては、仮定した静圧と計算した静圧とは一致させる ($\lambda = 0$) のが自然であるから、第2の方法 ($\omega = 0$) の方が合理的である。図7に示す計算した速度分布から求めた壁摩擦係数の値は第1の方法と比較して第2の方法の妥当性を示している。

図8に、第1の方法(白丸)と第2の方法(黒円)による各断面における計算流量を、ディフューザ入口の流量 Q_0 に対する増減の%で示す。流量が完全には一致しないのは、CS モデルを K で補正する方法の限界を示すのであろう。したがって、たとえば、 $K_{in} \neq K_{out}$ と考えて K_{in} と K_{out} の値を静圧と流量の条件をともに満たすように決めるなど、もう少し工夫をする必要があらう。

最後に、図9(B)に、Laufer の飽和流れの実験(図の丸印が測定値)⁽⁷⁾に関して、CS モデルをそのまま使用し ($K_{in} = K_{out} = 1$)、かつ、 $\omega = 0$ とし、初期条件として図9(A)の実線を与え、管径の5倍下流の速度分布とせん断応力分布とを計算した結果を実線で示す。この間の無次元静圧 P_s^* の降下量の計算値は 0.047 であり、その測定値 0.050 よりもやや小さい。また、図

図2 計算格子

9(C)は、静圧の降下量の計算値が測定値と一致するように、 $K_{in}=K_{out}(=K)=1.13$, $\omega=0$ として計算したものである。図9(B), (C)もせん断応力の計算値は測定値より小さく、したがって、速度分布は測定値より若干一様分布に近づいている。これも図9(C)は

やや測定値に近いが、CSモデルを K で補正する方法の限界を示すのであろう。なお、図9(B)と図9(C)の計算流量の図9(A)の流量に対する割合は、おのおの -0.30% と -0.26% である。

以上の零方程式モデルを使った計算例は、若干の改良は必要としても、零方程式モデルにも実用可能性があることを示している。

4. おわりに

零方程式モデルと散逸積分を使う近似計算法とを利

図3 ディフューザの P_s^* の分布

図7 Ludwig-Tillmannの式で求めた C_{fw} の分布
(○: $\omega \neq 0$, $K=1$; ●: $\omega=0$, $K=1$)

図4 ディフューザの ω と K の分布

図8 入口流量に対する計算流量の割合【%】
(○: $\omega \neq 0$, $K=1$; ●: $\omega=0$, $K=1$)

図5 ディフューザ断面の u/U_0 と C_f の分布($\omega \neq 0$, $K=1$)

図6 ディフューザ断面の u/U_0 と C_f の分布($\omega=0$, $K=1$)

図 9 飽和流れの u/U_0 と C_f の分布

用して、運動方程式を解いて、円すいディフューザの静圧分布を計算し、実験結果と比較した。

その結果は、必ずしも高い評価はされてない零方程式モデルも、若干修正し、散逸積分を利用すれば、静圧分布の計算に実用できることを示唆している。

零方程式モデルの修正方法の一般化のためには、複数の実験との比較が必要であり、検討中である。本報では、マイクロコンピュータを使った計算を念頭に、管内乱流の静圧を運動方程式を解いて計算する際に、散逸積分を使う近似計算法を利用すれば、零方程式モデルが実用可能であることを示した。

文 献

- (1) Cebeci, T. and O. Smith, A.M.O., *Analysis of Turbulent Boundary Layers*, (1974), 259-297, 329-359, Academic Press.
- (2) Bradshaw, P., Cebeci, T. and Whitelaw, J.H., *Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow*, (1981), 43-44, 96-97, 169-181, Academic Press.
- (3) 原口, 機論, 54-507, B (1988), 3016.
- (4) Simpson, R.L., *Proc. 1980 - 81 AFOSR-HTTM-STANFORD Conf.*, 1(1981), 253-273.
- (5) J.C. Rotta (大路通雄訳), 乱流, (1975), 232-238, 岩波書店.
- (6) Hinze, J.O., *Turbulence*, 2nd ed., (1975), 638, McGraw-Hill. NACA TM 1285 (1950).
- (7) Laufer, J., *NACA Rep.*, 1174 (1954).