自由対流境界層に及ぼす一様な吸込みおよび吹出し効果*

渡 辺 喬^{*1}, 川 上 秀 樹^{*2}Effect of Uniform Suction or Injection on
Free Convection Boundary Layers

Takashi WATANABE and Hideki KAWAKAMI

Free convection boundary layers over a vertical flat plate with uniform suction or injection are theoretically investigated. The nonlinear partial differential equations are reduced to a system of nonlinear ordinary ones by means of the difference-differential method. Numerical calculations of resulting equations are performed for various values of suction/injection parameter and the effects of uniform suction or injection on temperature and velocity profiles are predicted. The results show that the effect of injection is to increase the maximum velocity and shift its location farther away from the wall. As injection increases while suction decreases, the temperature and velocity profiles become fat and the boundary layer thickness increases.

Key Words: Free Convection, Boundary Layers, Uniform Suction or Injection, Theoretical Analysis, Numerical Calculation, Velocity and Temperature Profiles

1. 緒 言

自由対流境界層を理論的に解析する場合、境界層方程式は境界層の特性を用いることにより、簡単化されるが非線形項が含まれているため純解析的に解くことはできず数値計算によって解かれる場合が多い。自由対流の流れにおいては運動方程式の中に浮力の項が含まれるので、エネルギー式と連立させて解く必要があり、複雑となってくる。垂直な熱せられた平板に沿う境界層すなわち自由対流境界層の研究は Schmidt-Beckmann⁽¹⁾以来多くの研究がなされている⁽²⁾⁻⁽⁵⁾。一方、垂直平板からの自由対流に対する質量伝達の影響に関する理論的研究は Eichhorn⁽⁶⁾, Sparrow-Cess⁽⁷⁾, Merkin⁽⁸⁾, Parikh⁽⁹⁾によって行われてきている。境界層に吸込みおよび吹出しが作用する場合、平板前縁からの距離を x とすると、吸込みおよび吹出し速度 v_0 が $x^{-1/4}$ に比例するときに相似解が存在し、これまでも Eichhorn⁽⁶⁾らによって論じられてきている。

本研究においては、垂直平板からの自由対流に対す

る質量伝達のうち一様な吸込みおよび吹出しが作用する場合の境界層を理論的に解析する。ここでは、非線形偏微分方程式で表される運動方程式およびエネルギー式を差分法を用いて常微分方程式に変換し、それを解くことにより、境界層の速度分布および温度分布に及ぼす一様な吸込みおよび吹出しの影響を調べる。

2. 記 号

g : 重力の加速度
 Gr_x : グラスホフ数
 Pr : プラントル数
 s : 吸込み・吹出し係数
 T : 温度
 u : x 方向の速度成分
 v : y 方向の速度成分
 v_0 : 吸込み・吹出し速度
 x : 平板前縁から測った流れ方向距離
 y : 平板表面から垂直方向に測った距離
 α : 温度伝導率
 θ : 無次元温度分布
 ν : 動粘度
 ρ : 流体の密度
 ϕ : 流れ関数

* 平成元年8月25日 東北支部盛岡地方講演会において講演、
原稿受付 平成元年1月25日。

^{*1} 正員、岩手大学工学部(〒020 盛岡市上田4-3-5)。

^{*2} 学生員、岩手大学大学院。

3. 変動方程式

図1に示すように、一様な吸込みおよび吹出しを伴う垂直平板に沿う層流境界層を考える。壁面に沿って x 軸、それに垂直に y 軸をとり、 x 軸および y 軸方向の速度成分をそれぞれ u, v 、流体温度を T とし、物性値を一定とすると、運動方程式、エネルギー式および連続の式は次式で表される。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \frac{T - T_\infty}{T_\infty} \quad (1)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ここに、体積膨張係数 $\beta = 1/T_\infty$ とおく。また、境界条件は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} y=0: u=0, v=v_0(\text{const}), T=T_w, \\ y \rightarrow \infty: u=0, T=T_\infty. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

いま、流線関数 ψ を次のようにおく。

$$\psi = 4\nu \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4} f(x, \eta), \quad \eta = \frac{y}{x} \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4} \quad (5)$$

これより速度成分 u および v は次式となる。

$$u = U_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} v = -4\nu \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4} & \left(\frac{1}{4} \frac{1}{Gr_x} \frac{dGr_x}{dx} f \right. \\ & \left. + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (7) \end{aligned}$$

ここに、

$$U_e = \frac{\nu(4Gr_x)^{1/2}}{x}, \quad Gr_x = \frac{g(T_w - T_\infty)}{\nu^2 T_\infty} x^3 \quad (8)$$

次に、温度 T を次のように表す。

$$\theta(x, \eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (9)$$

式(6)、(7)および式(9)を式(1)、(2)に代入すると、次式(10)、(11)が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + 3f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - 2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \theta \\ & = 4x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + 3f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \\ & = 4x \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \quad (11) \end{aligned}$$

また、境界条件(4)は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \eta=0: \frac{\partial f}{\partial \eta} &= 0, \frac{1}{4} \frac{dGr_x}{dx} \frac{x}{Gr_x} f + x \frac{\partial f}{\partial x} = s, \\ & \theta = 1, \\ \eta \rightarrow \infty: \frac{\partial f}{\partial \eta} &= 0, \theta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここに、 s は吸込み・吹出し係数で次のように定義する。

$$s = -\frac{v_0}{4\nu} \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{-1/4} \quad (13)$$

ここに、 v_0 は吸込みおよび吹出し速度で、 $v_0 < 0$ は吸込み、 $v_0 > 0$ は吹出しを表す。

いま、 $x^* = kx^{1/4} (\equiv s)$ とおくと k は定数となり、式(10)および式(11)は次式(14)、(15)で表すことができる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \left(3f + x^* \frac{\partial f}{\partial x^*} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - x^* \frac{\partial^2 f}{\partial x^* \partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ & - 2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \theta = 0 \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \left(3f + x^* \frac{\partial f}{\partial x^*} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \\ & - x^* \frac{\partial \theta}{\partial x^*} \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0 \quad (15) \end{aligned}$$

また、境界条件(12)は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \eta=0: \frac{\partial f}{\partial \eta} &= 0, \frac{3}{4} f + \frac{1}{4} x^* \frac{\partial f}{\partial x^*} = x^* \\ & \theta = 1 \\ \eta \rightarrow \infty: \frac{\partial f}{\partial \eta} &= 0, \theta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここで、 x^* を間隔 h で分割し $x^* = x_i^* = ih (i=0, 1, 2, \dots)$ における導関数を Gregory-Newton の後退差分のうち四点公式を用いると式(14)および式(15)は次の常微分方程式で表される。

$$\begin{aligned} & \frac{d^3 f_i}{d\eta^3} + \left\{ 3f_i + \frac{i}{6} (11f_i - 18f_{i-1} + 9f_{i-2} \right. \\ & \quad \left. - 2f_{i-3}) \right\} \frac{d^2 f_i}{d\eta^2} - \frac{i}{6} \left(11 \frac{df_i}{d\eta} - 18 \frac{df_{i-1}}{d\eta} + 9 \frac{df_{i-2}}{d\eta} \right. \\ & \quad \left. - 2 \frac{df_{i-3}}{d\eta} \right) \frac{df_i}{d\eta} - 2 \left(\frac{df_i}{d\eta} \right)^2 + \theta_i = 0 \quad (17) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{d^2 \theta_i}{d\eta^2} + \left\{ 3f_i + \frac{i}{6} (11f_i - 18f_{i-1} + 9f_{i-2} \right.$$

図1 平板に沿う境界層と座標系

$$\begin{aligned} & -2f_{i-3}) \left\{ \frac{d\theta_i}{d\eta} - \frac{i}{6}(11\theta_i - 18\theta_{i-1} \right. \\ & \left. + 9\theta_{i-2} - 2\theta_{i-3}) \frac{df_i}{d\eta} = 0 \right. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18)$$

境界条件(16)は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \eta=0: \frac{df_i}{d\eta}=0, f_i=ih, \theta_i=1, \\ \eta \rightarrow \infty: \frac{df_i}{d\eta}=0, \theta_i=0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

式(17)および式(18)の解は次の積分方程式となる。

$$\begin{aligned} \frac{df_i}{d\eta} = & \int_0^\eta E(\eta) \int_0^\eta \frac{R(\eta)}{E(\eta)} d\eta d\eta \\ & - \left\{ \int_0^\infty E(\eta) \int_0^\eta \frac{R(\eta)}{E(\eta)} d\eta d\eta \right\} \frac{G(\eta)}{G(\infty)} \quad \dots\dots (20) \end{aligned}$$

$$f_i = \pm ih + \int_0^\eta \frac{df_i}{d\eta} d\eta \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\begin{aligned} \theta_i = & 1 - \left\{ 1 + \int_0^\infty P(\eta) \int_0^\eta \frac{S(\eta)}{P(\eta)} d\eta d\eta \right\} \frac{Q(\eta)}{Q(\infty)} \\ & + \int_0^\eta P(\eta) \int_0^\eta \frac{S(\eta)}{P(\eta)} d\eta d\eta \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} E(\eta) = & \exp \left[\int_0^\eta \left\{ -3f_i - \frac{i}{6}(11f_i - 18f_{i-1} \right. \right. \\ & \left. \left. + 9f_{i-2} - 2f_{i-3}) \right\} d\eta \right] \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

$$G(\eta) = \int_0^\eta E(\eta) d\eta \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\begin{aligned} R(\eta) = & \frac{i}{6} \left(11 \frac{df_i}{d\eta} - 18 \frac{df_{i-1}}{d\eta} + 9 \frac{df_{i-2}}{d\eta} \right. \\ & \left. - 2 \frac{df_{i-3}}{d\eta} \right) \frac{df_i}{d\eta} + 2 \left(\frac{df_i}{d\eta} \right)^2 - \theta_i \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\eta) = & \exp \left[\int_0^\eta \left\{ -3Prf_i - \frac{iPr}{6}(11f_i - 18f_{i-1} \right. \right. \\ & \left. \left. + 9f_{i-2} - 2f_{i-3}) \right\} d\eta \right] \quad \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

$$Q(\eta) = \int_0^\eta P(\eta) d\eta \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\begin{aligned} S(\eta) = & \frac{iPr}{6} (11\theta_i - 18\theta_{i-1} + 9\theta_{i-2} - 2\theta_{i-3}) \frac{df_i}{d\eta} \\ & \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

式(21)において正負の符号はそれぞれ吸込みおよび吹出しを表す。

4. 変動方程式の解法

方程式(20)～(22)は $x^*=x_{i-1}^*, x_{i-2}^*, x_{i-3}^*$ における $f(\eta)$ および $\theta(\eta)$ を含んでおり、それらの値がわかっておれば、 $x^*=x_i^*$ における $f_i(\eta)$ および $\theta_i(\eta)$ を求めることができる。ここでは、 $x^*=x_0^*$ における $f_0(\eta)$ および $\theta_0(\eta)$ の値はそれぞれ式(10)、(11)の右辺を零と置いてルンゲ・クッタ・ギルの法を用いて算出した。この場合二つの境界値 $(d^2f/d\eta^2)_{\eta=0}$ および $(d\theta/d\eta)_{\eta=0}$

をもって、本計算で得られたそれらの値を種々のプラントル数 Pr に対して表1に示す。また、 $x^*=x_i^*$ および x_{i-1}^* における $f_i(\eta)$, $\theta_i(\eta)$ および $f_{i-1}(\eta)$, $\theta_{i-1}(\eta)$ は方程式(17)、(18)を二点法および三点法に書き換えることにより求める。これより、 $x^*=x_i^*$ における $f_i(\eta)$ および $\theta_i(\eta)$ は初めに任意の値を与えて上記の3点 $x_{i-1}^*, x_{i-2}^*, x_{i-3}^*$ における $f(\eta)$ および $\theta(\eta)$ を用いて、繰返し計算によって求める。その解は逐次繰返しによる解の二つの差がある値に収束すると得られるように設定しておく。ここでは、 $\eta=0$ における $d^2f/d\eta^2$ の二つの差が 5×10^{-7} より小となったとき解が得られるように設定している。

5. 境界層の特性

図2には数値計算から得られた層流境界層内の速度分布 $U(u/U_e)$ をプラントル数 Pr をパラメータにとり表している。明らかなように Pr 数が小さくなるにしたがい最大速度 $U_{\max}$ は大きくなり、最大速度 $U_{\max}$ を示す η の位置 η_m もわずかであるが壁面から離れていく。図3には最大速度 $U_{\max}$ とその位置 η_m をプラントル数 Pr との関係で示している。

図4には、層流境界層内の温度分布 θ をプラントル数 Pr をパラメータにとり示している。温度分布はプラントル数 Pr が小さくなるにしたがい膨らみ温度境界層の厚さは増大する。

図5には、プラントル数 $Pr=0.73$ における速度分布 U を吸込み・吹出し係数 s をパラメータにとり表している。図5から明らかなように吸込み・吹出し係数 s が大きくなるにしたがい最大速度 $U_{\max}$ は小となり $U_{\max}$ を示す位置 η_m は壁面に近づいてくる。上記の関係はプラントル数 Pr が変化した場合にも同様な傾向が得られる。

図6には、最大速度 $U_{\max}$ と吸込み・吹出し係数 s の関係をまた、図7には $U_{\max}$ を示す位置 η_m と吸込み・

表1 初期値 $f''(0)$ と $\theta'(0)$

Pr	$f''(0)$	$\theta'(0)$
0.3	0.76343	-0.36237
0.5	0.71315	-0.44115
0.73	0.67469	-0.50728
1	0.64229	-0.56729
2	0.57138	-0.71663
3	0.53101	-0.81574
5	0.48197	-0.95430
7	0.45093	-1.05461
10	0.41931	-1.16959
15	0.38513	-1.31226

吹出し係数 s の関係をプラントル数 Pr をパラメータにとりそれぞれ示している。

図 8 には, $Pr=0.73$ における温度分布 θ を吸込み・吹出し係数 s をパラメータにとり示している。図 8 から吹出し割合が大きくなると, 吸込み割合が小さくなるにしたがい温度分布は膨らみをもち温度境界層の厚さは増大する。なお, 速度分布も温度と同様に吹出し割合が大きくなり, 吸込み割合が小さくなるほど膨らみをもち速度境界層は厚くなることわかる(図 5)。表 2 にはプラントル数 $Pr=0.73$ で吸込みおよび吹出し係数 s が変化した場合の, $\eta=0$ における速度および

図 5 層流境界層の速度分布 ($Pr=0.73$)

図 2 層流境界層の速度分布

図 6 最大速度 $U_{\max}$ と吸込み・吹出し係数 s

図 3 最大速度 $U_{\max}$ とその位置 η_m

図 7 最大速度 $U_{\max}$ の位置 η_m と吸込み・吹出し係数 s

図 4 層流境界層の温度分布

図 8 層流境界層の温度分布 ($Pr=0.73$)

表 2 速度および温度の一階微分値
 $f''(0)$ および $\theta'(0)$ ($Pr=0.73$)

s	$f''(0)$	$\theta'(0)$
0.75	0.55195	-1.72653
0.5	0.68860	-1.23781
0.25	0.72536	-0.82791
0	0.67469	-0.50728
-0.25	0.42736	-0.20488
-0.5	0.26182	-0.05064

温度の微分値 $f''(0)$ および $\theta'(0)$ を表している。

6. 結 言

垂直平板からの自由対流に対して一様な吸込みおよび吹出しが作用する場合の境界層を理論的に解析した。この解析においては、非線形偏微分方程式で表される変動方程式を微分差分法を用いて常微分方程式に変換し、数値的に解くことにより、速度分布および温度分布に及ぼす一様な吸込み・吹出しの影響を調べた。

(1) 吸込み・吹出し係数 s が大きくなるにしたが

い、最大速度 $U_{\max}$ は小となり $U_{\max}$ の位置は壁面に近づき、速度境界層の厚さは薄くなる。

(2) 吸込み・吹出し係数 s が大きくなるにしたがい、温度境界層の厚さは薄くなる。

おわりに、本研究に協力された岩手大学技官 金子昌晴君、久保田恒夫君に感謝の意を表す。

文 献

- (1) Schmidt, E. and Beckmann, W., *Techn. Mech. und Thermodyn.*, 1 (1930), 341.
- (2) Ostrach, S., *NACA Tech. Rep.*, 1111 (1953).
- (3) Sparrow, E. M., Tsou F. K. and Kurtz, E. F., *Phys. Fluids*, 8 (1965), 1559.
- (4) Sugawara, S. and Michiyoshi, I., *Proc. 3rd Jpn Natl. Congr. Appl. Mech.*, (1954), 315.
- (5) Yang, K. T., *Trans. ASME, Ser. E*, 82 (1960), 230.
- (6) Eichhorn, R., *J. Heat Transf.*, 82 C (1960), 260.
- (7) Sparrow, E. M. and Cess, R. D., *J. Heat Transf.*, 81 C (1961), 387.
- (8) Merkin, J. H., *Int. J. Heat Mass Transf.*, 15 (1972), 989.
- (9) Parikh, P. G., Moffat, R. J., Kays, W. M. and Ber-shader, D., *Int. J. Heat Mass Transf.*, 17 (1974), 1465.