軸対称非定常熱伝導問題の境界要素法定式化について*

石田 良平^{*1}, 落合 芳博^{*2}On BEM Formulation of Transient Axisymmetric
Heat Conduction Problems

Ryohei ISHIDA and Yoshihiro OCHIAI

In a transient axisymmetric heat conduction problem, the fundamental solution has a different form from the fundamental solution for a two-or three-dimensional problem. A consideration of the fundamental solution and interpolation with respect to time have been given by Wroble, C. L. et. al. In this paper, we consider a fundamental solution in the BEM formulation of an axisymmetric heat conduction equation and its new representation of analytical integration with respect to time. Our representation is separated into steady and transient terms. The term with singularity which we experience in the integration along the boundary is only the steady term.

Key Words: Boundary Element Method, Numerical Analysis, Heat Conduction, Axisymmetric Problem, Fundamental Solution

1. 結 言

軸対称非定常熱伝導問題における境界要素法定式化は Wrobel らによって行われている^{(1)~(3)}。彼らは時間依存の基本解と一定時間内挿を用いて、時間に関する積分を解析的に行っている。このとき、軸対称問題では二次元問題や三次元問題の場合と異なり、時間依存の基本解に第1種変形ベッセル関数を含むため、基本解に含まれるこの変形ベッセル関数を級数展開して時間に関する積分を行っている。解析的に得られた積分は級数の収束性の問題によっていろいろな工夫がなされている。また、境界に沿って積分を行う際に現れる特異性に関する評価についても工夫されている。

本論文では、軸対称非定常熱伝導問題の境界要素法定式化について Wrobel らの方法を検討し、基本解の時間積分に関する新しい表現について考察する。著者らの定式化によると、時間依存の基本解を一定時間内挿によって時間について解析的に積分したものは、定常項と非定常項とが完全に分離され、境界に沿って積

分を行う際に現れる特異性を有する項は定常項に限られる。そして、この定常項は軸対称定常ポテンシャル問題の基本解⁽⁴⁾⁽⁵⁾に一致する。このことは実際の数値計算のうえで非常に有利であると思われる。

2. 解 析

2.1 従来の方法と問題点^{(1)~(3)} 軸対称拡散問題に対する時間依存の境界積分方程式は、初期温度分布を零とすると、

$$\begin{aligned} & C(\xi)u(\xi, t_F) \\ & + x \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} u(x, t) q^*(\xi, x, t_F, t) r_0(x) d\Gamma(x) dt \\ & = x \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} q(x, t) u^*(\xi, x, t_F, t) r_0(x) d\Gamma(x) dt \\ & \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、 u は温度変化、 q は境界上での法線方向微係数、 x は温度伝導率、 Ω および Γ は解析対象となる領域およびその領域を形成する境界を表す。 $C(\xi)$ は境界形状により定まる定数であり、 u^* および q^* は時間依存の基本解である。基本解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{2\pi}{(4\pi x \tau)^{3/2}} \exp\left(\frac{-s}{4x\tau}\right) I_0\left(\frac{e}{2x\tau}\right), \\ q^* &= \partial u^* / \partial n(x) \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

* 平成元年7月13日 九州支部北九州地方講演会において講演、原稿受付 昭和63年11月9日。

*¹ 正員、大阪府立大学工学部 (〒591 堺市百舌鳥梅町4-804)。

*² 正員、大阪府立産業技術総合研究所 (〒550 大阪市西区江之子島2-1-53)。

ここで、 $I_0(x)$ は零次の第1種変形ベッセル関数であり、 $\tau = t_F - t$, $s = r^2(\xi) + r_0^2(x) + [z(\xi) - z_0(x)]^2$, $e = r(\xi)r_0(x)$ である。ただし、 $[r(\xi), z(\xi)]$ は観測点を表し、 $[r_0(x), z_0(x)]$ はソース点を表す。また、 $\partial/\partial n(x)$ は法線方向微分を表す。

なお、軸対称拡散問題の基本解、式(2)は三次元問題の基本解を円柱座標系で表し、円周方向に積分することによって得られる。すなわち、

$$u^* = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(4\pi x \tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{R^2}{4x\tau}\right) d\theta(x) \dots\dots (3)$$

ここで、 $R^2 = s - 2e \cos[\theta(\xi) - \theta(x)]$ である。

式(1)において、時間積分を解析的に行うために、内挿関数を用いる。内挿関数として、一定時間内挿(u および q が時間ステップ内で一定であると仮定する)を用いることにする。さて、時刻 $t = t_F$ (第 F ステップ)での解が未知であるし、前のステップまでの解すなわち $u(\xi, t_f)$ および $q(\xi, t_f)$ ($f = 0, 1, \dots, F-2, F-1$) がすでに得られているものとする。このとき、式(1)を時間について離散化すると、次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} & C(\xi)u(\xi, t_F) \\ & + x \int_{\Gamma} u(x, t_F) \Delta q^*(\xi, x, t_F) r_0(x) d\Gamma(x) \\ & - x \int_{\Gamma} q(x, t_F) \Delta u^*(\xi, x, t_F) r_0(x) d\Gamma(x) \\ & = -x \sum_{f=1}^{F-1} \int_{\Gamma} u(x, t_f) \Delta q^*(\xi, x, t_F) r_0(x) d\Gamma(x) \\ & + x \sum_{f=1}^{F-1} \int_{\Gamma} q(x, t_f) \Delta u^*(\xi, x, t_F) r_0(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \dots\dots (4)$$

ここで、 $\Delta u^*(\xi, x, t_F)$ などは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta u^*(\xi, x, t_F) &= \int_{t_{f-1}}^{t_F} u^*(\xi, x, t_F, t) dt, \\ \Delta q^*(\xi, x, t_F) &= \frac{\partial}{\partial n(x)} \Delta u^*(\xi, x, t_F), \\ \Delta u^*(\xi, x, t_F) &= \int_{t_{f-1}}^{t_F} u^*(\xi, x, t_F, t) dt, \\ \Delta q^*(\xi, x, t_F) &= \frac{\partial}{\partial n(x)} \Delta u^*(\xi, x, t_F) \dots\dots (5) \end{aligned}$$

式(2)の第1種変形ベッセル関数の級数展開を用いて式(5)の積分を実行すると $\Delta u^*(\xi, x, t_F)$ などが得られる。たとえば、 $\Delta u^*(\xi, x, t_F)$ について示すと、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta u^*(\xi, x, t_F) &= \int_{t_{f-1}}^{t_F} u^* dt = \frac{1}{2x(\pi s)^{1/2}} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{2n}}{(n!)^2} [\Gamma(2n+1/2, a_f) - \Gamma(2n+1/2, a_f)] \dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここで、 $a_f = s/[4x(t_F - t_f)]$, $c = e/s$ であり、 $\Gamma(x, y)$ は第2種不完全ガンマ関数である。

式(6)で表される級数は不完全ガンマ関数の性質から収束があまり良くないことが考えられる。特にソース点と観測点が非常に近い場合、すなわち $c = 0.5$ ($\xi = x$) 近傍では特異性のため収束しない。この $c = 0.5$ 近傍での特異性の問題を解決するために変形ベッセル関数の漸近展開を用いて時間積分を行うことによって特異性を有する項を独立させることができる。しかし、漸近級数はその引数が多い場合の級数展開であるため、 $c = 0.5$ 近傍の特異性の問題は解決されるが a_f が小さい場合に問題が生ずる。また、一般に漸近級数は発散級数でもあるため、数値計算のうえで問題があるようにも思われる。

2.2 新しい表現の導入 これらの問題点は次のようにして解決できる。まず、式(5)の積分を行う際に、変形ベッセル関数の級数展開を用いる代わりに、合流形超幾何級数(Kummer関数)を用いて表現する。このとき実数次を含む任意次数の第1種変形ベッセル関数は次のように表すことができる⁽⁶⁾。

$$I_m(x) = \frac{(x/2)^m}{\Gamma(m+1)} \exp(-x) \times M(m+1/2, 2m+1, 2x) \dots\dots (7)$$

ここで、 $\Gamma(k)$ はガンマ関数、また $M(a, b, x)$ は合流形超幾何級数であり、次式で定義される⁽⁷⁾。

$$M(a, b, x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)x^n}{\Gamma(b+n)n!} \dots\dots (8)$$

さて、式(6)の積分について考える。この積分は

$$\int_{t_{f-1}}^{t_F} u^* dt = - \int_{t_f}^{t_F} u^* dt + \int_{t_{f-1}}^{t_f} u^* dt \dots\dots (9)$$

と書き換えることができる。式(9)の右辺の第1の積分は変数変換 $y = s/[4x(t_F - t)]$ を用いると次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} & \int_{t_f}^{t_F} u^* dt \\ &= \frac{1}{2x(\pi s)^{1/2}} \int_{a_f}^{\infty} y^{-1/2} \exp(-y) I_0(2cy) dy \\ &= \frac{1}{2x(\pi s)^{1/2}} \int_0^{\infty} y^{-1/2} \exp(-y) I_0(2cy) dy \\ &- \frac{1}{2x(\pi s)^{1/2}} \int_0^{a_f} y^{-1/2} \exp(-y) I_0(2cy) dy \end{aligned} \dots\dots (10)$$

式(10)の第1の積分は変形ベッセル関数の合流形超幾何級数による表現式(7)を用いると、

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} y^{-1/2} \exp(-y) I_m(2cy) dy \\ &= \frac{c^m \Gamma(2m+1)}{(1+2c)^{m+1/2} \Gamma(m+1) \Gamma(m+1/2)} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(m+n+1/2)}{\Gamma(2m+n+1)n!} \left(\frac{4c}{1+2c}\right)^n \dots\dots (11) \end{aligned}$$

となる。 $m=0$ とし、式(11)の級数をガウスの超幾何級

数 $F(a, b; c; x)^{(8)}$ を用いて表現すると、次式のように書くことができる。

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(n+1/2)}{\Gamma(n+1)n!} \left(\frac{4c}{1+2c} \right)^n \\ = \pi F[1/2, 1/2; 1; 4c/(1+2c)] \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(12)においてパラメータの間に $a+b-c=0$ という関係があるので、ガウスの超幾何級数のパラメータと収束域との関係⁽⁸⁾から、この級数は $4c/(1+2c)=1$ ($c=0.5$) を除いて全単位円で収束することがわかる。

式(12)の超幾何級数はさらに次のように表すことができる。

$$s = 2K\{[4c/(1+2c)]^{1/2}\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 $K(k)$ は第1種完全だ円積分であり、次式で定義される。

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta \quad \dots\dots\dots (14)$$

以上のことから、式(10)の第1の積分は

$$\frac{1}{2x(\pi s)^{1/2}} \int_0^{\infty} y^{-1/2} \exp(-y) I_0(2cy) dy \\ = \frac{1}{x\pi(1+2c)^{1/2}s^{1/2}} K\{[4c/(1+2c)]^{1/2}\} \\ \dots\dots\dots (15)$$

で表されることがわかる。式(15)は軸対称定常ポテンシャル問題に対する基本解にほかならない⁽⁴⁾⁽⁵⁾。また $c \rightarrow 0.5$ のとき、明らかに $4c/(1+2c) \rightarrow 1$ であり、このとき第1種完全だ円積分は対数発散する。

次に、式(10)の第2の積分について考える。この積分は第1の積分の場合と同様に、変形ベッセル関数を合流形超幾何級数で展開して級数の形で解を求めてもよいが、級数の収束性がそのまま計算精度に影響を与える可能性があるため、本論文では級数解を用いないことにして、定積分のままで用いることにする。この積分は y について1回積分することができ、次式が得られる。

$$\frac{1}{2x(\pi s)^{1/2}} \int_0^{a_f} y^{-1/2} \exp(-y) I_0(2cy) dy \\ = \frac{1}{x\pi^{1/2}[4x(t_F - t_f)]^{1/2}} \exp(-a_f) I_0(2ca_f) \\ + \frac{s}{x\pi^{1/2}[4x(t_F - t_f)]^{3/2}} \\ \times \int_0^1 p^{1/2} \exp(-a_f p) [I_0(2cap) \\ - 2cI_1(2cap)] dp \quad \dots\dots\dots (16)$$

なお、式(16)の定積分の計算に際しては漸化式が利用できる⁽⁶⁾。参考までに、合流形超幾何級数を用いた場合の級数による表現は次のようになる。

$$\frac{1}{2x(\pi s)^{1/2}} \int_0^{a_f} y^{-1/2} \exp(-y) I_0(2cy) dy$$

$$= \frac{1}{2x\pi(1+2c)^{1/2}s^{1/2}} \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{4c}{1+2c} \right)^n \gamma[n+1/2, (1+2c)a_f] \\ \dots\dots\dots (17)$$

ただし、 $\gamma(x, y)$ は第1種不完全ガンマ関数であり、 $C_n = \Gamma(n+1/2)/[\Gamma(n+1)n!]$ である。

式(16)は定積分の形で与えられているが、被積分関数の性質は非常によい。たとえば、解析の対象となる領域が非常に大きい場合あるいは時間ステップが小さい場合、言い換えるならば $a_f = s/[4x(t_F - t_f)]$ において、 s が大きいあるいは $4x(t_F - t_f)$ が小さい場合、 a_f は大きくなることが想像される。しかし、この場合被積分関数において

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [x^{1/2} \exp(-x) I_0(x)] \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} [x^{1/2} \exp(-x) I_1(x)] \\ = 0.398\,942\,28 \quad \dots\dots\dots (18)$$

という性質があり⁽⁶⁾、容易に数値積分が可能である。このことは法線方向微係数についても同様である。以上の解析によって得られた結果をまとめておく。

$$\int_{t_f}^{t_F} u^* dt \\ = \frac{1}{x\pi(1+2c)^{1/2}s^{1/2}} K\{[4c/(1+2c)]^{1/2}\} \\ - \frac{1}{x\pi^{1/2}[4x(t_F - t_f)]^{1/2}} \exp(-a_f) I_0(2ca_f) \\ - \frac{s}{x\pi^{1/2}[4x(t_F - t_f)]^{3/2}} \\ \times \int_0^1 p^{1/2} \exp(-a_f p) [I_0(2cap) \\ - 2cI_1(2cap)] dp \quad \dots\dots\dots (19) \\ \frac{\partial}{\partial n} \int_{t_f}^{t_F} u^* dt = \frac{1}{2x\pi r_0(1+2c)^{1/2}s^{1/2}} \\ \times \left[d_1 E\{[4c/(1+2c)]^{1/2}\} \right. \\ \left. - \frac{\partial r_0}{\partial n} K\{[4c/(1+2c)]^{1/2}\} \right] \\ + \frac{1}{x\pi^{1/2}[4x(t_F - t_f)]^{3/2}} \\ \times \int_0^1 p^{1/2} \exp(-a_f p) \left[d_2 I_0(2cap) \right. \\ \left. - r \frac{\partial r_0}{\partial n} I_1(2cap) \right] dp \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで、 $E(k)$ は第2種完全だ円積分であり、次式で定義される。

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta \quad \dots\dots\dots (21)$$

また、 d_1 および d_2 は次式で与えられる。

$$d_1 = \frac{r^2 - r_0^2 + (z - z_0)^2}{(r - r_0)^2 + (z - z_0)^2} \frac{\partial r_0}{\partial n}$$

$$+ \frac{2r_0(z-z_0)}{(r-r_0)^2+(z-z_0)^2} \frac{\partial z_0}{\partial n},$$

$$d_2 = r_0 \frac{\partial r_0}{\partial n} - (z-z_0) \frac{\partial z_0}{\partial n} \dots\dots\dots (22)$$

以上の手順は式(9)の第2の積分についても同様であり、式(19)および(20)において t_f を t_{f-1} に置き換えればよい。

2.3 境界積分について 式(4)の境界 Γ をいくつかの要素に分割すると離散化方程式が得られる。この離散化方程式において、ソース点 x と観測点 ξ が一致すると一般に基本解の特異性から特異積分となる。これまで、境界積分を行う際に著者らが経験する特異性にはあまりふれなかった。ここでは、この特異性について考える。

式(9)から容易に知られるように $\Delta u^*(\xi, x, t_f)$ および $\Delta q^*(\xi, x, t_f)$ では定常項〔式(15)〕は互いに消し合うため存在しない。定常項は $\Delta u^*(\xi, x, t_f)$ および $\Delta q^*(\xi, x, t_f)$ においてのみ存在することになる。この定常項はすでに述べたように第1種完全な円積分で表され、この関数の特異性は対数特異性である。この関数を含む境界積分における特異性処理については軸対称定常ポテンシャル問題の定式化においてすでに考察されているので省略する⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

次に、非定常項〔式(16)〕について考える。式(4)で表される境界積分方程式において境界上の積分を行うために、内挿関数を用いて $u(x, t_f)$ および $q(x, t_f)$ を表現し、境界上で積分を行う。いま考えている問題の境界は二次元形状であるので、境界要素として一次元要素を用いる。内挿関数は境界に沿ってとられた無次元局所座標系 η を用いた多項式で表される(図1)。しかし、図1に示した関数形状より明らかなように内挿関数はそれ自身に特異性を持たないので内挿関数がどのようなものであっても、 $\xi=x(\eta=0)$ すなわち $c=0.5$ における境界積分の被積分関数の性質を支配するのは式(16)の被積分関数そのものである。したがって、式(16)で表される関数の性質は非常に重要である。

さて、式(16)において、 $c=0.5$ とおくと、

$$\frac{1}{2x(\pi s)^{1/2}} \int_0^{a_f} y^{-1/2} \exp(-y) I_0(y) dy$$

$$= \frac{1}{x\pi^{1/2} [4x(t_f - t_f)]^{1/2}} \exp(-a_f) I_0(a_f)$$

$$+ \frac{s}{x\pi^{1/2} [4x(t_f - t_f)]^{3/2}}$$

$$\times \int_0^1 p^{1/2} \exp(-a_f p) [I_0(a_f p) - I_1(a_f p)] dp$$

$$\dots\dots\dots (23)$$

が得られる。明らかに、式(23)はどのような a_f に対し

ても有限な値を持ち発散しない。したがって、境界積分を行ううえにおいて特異性がないことがわかる。同様に、式(23)の法線方向微係数にも特異性はない。

したがって、境界上の積分において $\xi=x$ となる点を含むか否かにかかわらず境界積分を通常のガウス積分公式によって数値積分を行うことができる。このことは、数値計算上非常に大きな利点になる。実際、式(5)の各関数を核として境界積分を行う際に、式(4)の右辺においては先に述べたように定常項がないため全く特異性はない。また、左辺においては定常項の特異性のみを考えればよいことがわかる。

3. 数値計算例

以上の解析で導入した解の表現を用いて、数値計算を行った。まず、図2(a)に示すように半径 a 、長さ $2L$ の円柱の円柱面が局部的に加熱された場合の温度変化を解析する。図2(b)に要素分割例を示す。円柱は軸対称加熱され、加熱幅は $-l \leq z \leq l$ で与えられるものとする。基礎方程式、初期条件および境界条件は次式で与えられる。温度変化を T 、時間を t 、温度伝導率を κ で表すと、

軸対称熱伝導方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \dots (24)$$

初期条件

$$\text{at } t=0; T=0 \dots\dots\dots (25)$$

境界条件

$$\text{on } r=a; \partial T / \partial r + h_r T = h_r T_r H(l-|z|) \dots (26)$$

$$\text{on } z=\pm L; \partial T / \partial z \pm h_z T = 0. \text{ (複号同順)} \dots\dots\dots (27)$$

ここで、 h_r および h_z はそれぞれ熱伝達率と熱伝導率の比である。また、 $H(x)$ はHeavisideステップ関数であり、 T_r は周囲媒体の温度である。

図1 一次元境界要素と内挿関数

数値計算は無次元量を用いて行った。無次元量の定義および計算条件は次のとおりである。

$$\tau = xt/a^2, \quad H_r = ah_r, \quad H_z = ah_z, \quad \bar{T} = T/T_r,$$

$$H_r = 1, \infty, \quad H_z = 1, \quad L/a = 2, \quad l/a = 1.$$

なお、境界要素法による計算に際しては、時間分割数を5とし等分割にとった。境界積分においては一定要素を用いた。また、式(12)などの計算においては二重指数関数形積分公式を用い、境界積分はガウスの積分公式(8点)を用いた。また、特異積分は対数ガウス積分公式(8点)によって評価した。

図3に円柱表面の温度分布を、図4および図5に円柱内部での温度分布を示す。図中、実線は解析解⁽⁹⁾を示す。いずれも良く一致しているように思われる。

4. 結 言

本論文では、軸対称非定常熱伝導問題の境界要素法定式化において Wrobel らの方法を検討し、基本解の時間積分に関する新しい表現について考察した。以上の解析により得られた結果をまとめておく。

(1) 軸対称非定常熱伝導問題の境界要素法定式化において、時間に関する積分を一定時間内挿を用いて解析的に行った。その結果、定常項と非定常項とが完全に分離されることが示された。

(2) 定常項は当然であるが従来の軸対称定常ポテンシャル問題の基本解と一致する。したがって、境界

積分において現れる特異性は対数特異性であり、この場合対数ガウス数値積分公式や Wrobel らの方法を用いることができる。

(3) 非定常項は級数形で表すこともできるが、定積分の形で表した。この定積分は簡単に数値計算することができる。また、微分演算においても便利である。さらに、この定積分は解析の対象となる領域が非常に大きい場合や時間ステップが小さい場合にも十分収束する。

(4) 多くの境界要素法定式化において境界に沿っての積分の際に経験する特異性はこの非定常項には全くない。そのため、境界積分においては通常のガウス積分公式を用いることができる。このことは実際の計算において非常に有利であると思われる。

なお、本研究は(社)日本機械学会の RC-88 研究分

図3 境界上での温度変化 ($H_r=1$)

(a) 座標系と加熱条件

(b) 境界要素分割例

図2 中実円柱の非定常温度解析

図4 内点での温度変化 ($H_r=1$)

図5 内点での温度変化 ($H_r=\infty$)

科会における研究の一環として行われたものである。

文 献

- (1) Wrobel, L. C., Potential and Viscous Flow Problems Using the Boundary Element Method. Ph. D. Thesis, Univ. of Southampton (1981), 198-209.
- (2) Wrobel, L. C. and Brebbia, C. A., A Formulation of The Boundary Element Method for Axisymmetric Transient Heat Conduction, *Int. J. Heat Mass Transf.*, 25-5 (1981), 843-850.
- (3) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wroble, L. C., *Boundary Element Techniques*, (1984), 165-171 Springer.
- (4) 例えば, 文献(1)の106-118ページ.
- (5) 例えば, 文献(3)の96-99ページ.
- (6) Abramowitz, M. and Stegun, I. A., eds., *Handbook of Mathematical Functions*, (1972), 355-433, Dover, New York.
- (7) 文献(6)の503-544ページ.
- (8) 文献(6)の555-566ページ.
- (9) Takeuti, Y., Ishida, R. and Tanigawa, Y., On an Axisymmetric Coupled Thermal Stress Problem in a Finite Circular Cylinder, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 50 (1983), 116-122.

討 論

〔質問〕 田中正隆〔信州大学工学部〕

特殊関数に関する豊富知識を有効利用されて, 困難な主題を解決されたことにまずは敬意を表する。以下の点について質問させていただく。

(1) 一定時間内挿を用いたことにより, 定常項と非定常項とが分離されて見通しのよい定式化が得られたとある。これ以外については, このことは成立しないのか。線形あるいは高次の時間内挿を適用したときに, どのような困難が生じるのか具体的にご教示いただきたい。

(2) 貴論文の解法は, 軸対称物体の軸対称熱伝導問題に限定されると思われる。非軸対称問題への拡張などについてご意見をお伺いしたい。

(3) 時間-空間両域にわたる境界積分方程式に基礎をおく, いわゆる“直接解法”では, 時間ステップごとの解析スキームに二つが考えられる。貴論文ではそのうちの一つを採用しているが, その理由をお聞かせ願いたい。

〔回答〕 (1) 結言では一定時間内挿を用いた場合に限定されるような表現になっているが, 一定時間

内挿以外の場合でも定常項と非定常項とが分離される。また, 時間内挿の次数が線形あるいはより高次の場合でも特に困難は生じないように思われる。

(2) ご指摘のとおり, 本解法は軸対称物体の軸対称熱伝導問題に限定されるが, 非軸対称境界値問題への拡張は三次元問題の基本解とフーリエ級数展開を用いることによって可能であると思われる。しかし, 実際の定式化においては, フーリエ級数の項数が非常に少なくてもよい場合を除いて複雑になることが想像される。

(3) 文献(1), (3)に述べられているスキーム1, 2のうち, 本報ではスキーム2を採用している。スキーム1では前の時間ステップでの解を次のステップへの初期条件のようにして用いるため領域積分をしなければならないが, この領域積分の際の誤差に関する問題点が同じく文献(1), (3)に述べられている。このため, 本報では初期条件や内部熱発生を考慮しなければならない場合を除いて領域積分を伴わないスキーム2を採用した。