粗さのある曲り円管の流動抵抗*

須藤 浩三^{*1}, 高見 敏弘^{*1}

Flow Resistance of Curved Pipes with Rough Surfaces

Kouzou SUDOU and Toshihiro TAKAMI

Friction coefficients have been measured for turbulent flows through curved circular pipes with rough surfaces. An experiment has been carried out under the conditions of equivalent relative roughness $k_e/d = 3.59 \times 10^{-3} \sim 3.25 \times 10^{-2}$, Reynolds number $Re < 7 \times 10^4$ and curvature radius ratios $R_c = 15, 30$ and 45. An approximate expression, which expresses the experimental results well, has been derived using the boundary layer approximation.

Key Words: Turbulent Flow, Pipe Flow, Boundary Layer, Curved Pipe, Roughness, Friction Coefficient

1. 緒 言

曲り管が用いられている種々の工業機器の使用状況をみると、曲り管内面はある粗さをもつことが多く、粗い壁面をもつ曲り管内流れの流動損失を把握しておくことは工業上重要である。粗さのある曲り管内流れに関する研究は少なく、粗い管壁を有する円形断面のベンドについての実験⁽¹⁾が報告されている程度である。

このような現状にかんがみ、著者ら⁽²⁾は粗い壁面からなる曲り正方形管内流れの流動抵抗について報告した。しかし、工業上は正方形管よりも円管を用いることのほうが多い。そこで、粗い壁面からなる曲り円管内流れの管摩擦係数を測定し、流動抵抗に及ぼす壁面の粗さおよび曲りの影響を明らかにするとともに、境界層近似により測定結果をよく説明できる乱流管摩擦係数の表示式を導出した。

2. 主 な 記 号

d : 管直径 $= 2a$

k_e : 等価粗さ

p : 無次元圧力 $= (a^2/\rho\nu^2)P$

(r, θ, φ) : トーラス座標 $= (R/a, \theta, \varphi)$

R_c : 曲率半径比 $= r_c/a$

Re : レイノルズ数 $= W_a d/\nu$

(u, v, w) : (r, θ, φ) 方向の無次元速度

$= (U, V, W)a/\nu$

W_a : 断面平均速度

λ : 管摩擦係数 $= \left(-\frac{1}{r_c} \frac{\partial P}{\partial \varphi}\right) d / \left(\frac{1}{2} \rho W_a^2\right)$

図1 供試管路の概略

* 平成元年10月14日 第67期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成元年5月1日。

*1 正員、広島大学工学部 (〒724 広島市西条町下見)。

δ : 無次元境界層厚さ $= \Delta/a$

τ_{ij} : 無次元応力成分 $= (a^2/\rho\nu^2) T_{ij}$

添字

st, c : 直管, 曲り管を表す。

s, r : 滑面, 粗面を表す。

3. 実験

3.1 実験装置および方法 実験は曲り正方形管と同じ実験装置および方法⁽²⁾により行ったので、ここでは供試管路のみを図1に示す。

供試管路は、管直径 $d=18.0$ mm, 曲率半径 $r_c=135, 270, 405$ mm (曲率半径比 $R_c=15, 30, 45$) の曲り円管で、上流と下流には同じ断面の直円管が接続されている。圧力損失の測定には $R_c=15$ の場合: $\varphi=475^\circ$, 595° , $R_c=30$ の場合: $\varphi=235^\circ, 355^\circ$, $R_c=45$ の場合: $\varphi=265^\circ, 355^\circ$ の位置に設けた直径 0.5 mm の静圧孔を使用した。実験範囲はレイノルズ数 $Re \approx 1\,000 \sim 80\,000$, 供試流体は空気である。

粗い管路の実験には、管内面に市販の布やすり (呼び番号: 60, 80, 100, 150, 240) をはり付けて用いた。粗さの大きさは、便宜上ニクラッゼの砂状面粗さ k_s に相当する等価粗さ k_e により評価した。図2は上流直管部の管摩擦係数 λ_{st} で、図中の二点鎖線は層流域の理論式、一点鎖線はブラジウスの式で

$$\lambda_{st,s} = 64/Re \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\lambda_{st,s} = 0.3164 Re^{-0.25} \quad \dots\dots\dots (2)$$

を示す。粗い管路の管摩擦係数はレイノルズ数の大き

表 1 布やすりの粗さ

NO.	$\lambda_{st} \times 10^2$	$ke/d \times 10^3$
60	5.90	32.5
80	4.60	17.3
100	3.65	8.97
150	3.00	4.82
240	2.75	3.59

図 2 上流直管部の管摩擦係数

い領域で一定値を示すが、この一定値 λ_{st} をニクラッゼの式

$$1/\sqrt{\lambda_{st}} = 1.14 - 2 \log_{10}(k_s/d) \quad \dots\dots\dots (3)$$

に代入して k_s/d を求め、これを k_e/d と表記して等価相対粗さと名付けた (表1参照)。

(a) $R_c=15$

(b) $R_c=30$

(c) $R_c=45$

図 3 曲り円管の管摩擦係数

(a) $k_e/d = 8.97 \times 10^{-3}$ (b) $k_e/d = 3.25 \times 10^{-2}$

図4 管摩擦係数の比較

図5 管摩擦係数差

(a) 臨界レイノルズ数

3.2 実験結果および考察 粗さのある曲り円管に空気を流して測定した管摩擦係数 λ_c を図3に示す。

図中の破線は滑らかな曲り管の層流管摩擦係数⁽³⁾

$$\lambda_{c,s}/\lambda_{st,s} = 0.1008De^{1/2}(1 + 3.945De^{-1/2} + 7.782De^{-1} + 9.097De^{-3/2} + 5.608De^{-2}) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$[\lambda_{st,s}$: 式(1), $De = Re/\sqrt{Rc}$], 実線は滑らかな曲り管の乱流管摩擦係数⁽⁴⁾

$$\lambda_{c,s}/\lambda_{st,s} = \{Re/(Rc)^2\}^{0.05} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$[\lambda_{st,s}$: 式(2)] を示す。

粗さのある曲り管の管摩擦係数 $\lambda_{c,r}$ は粗い直管の場合と同様の傾向を示している。すなわち、最初は滑らかな曲り管の管摩擦係数 $\lambda_{c,s}$ と一致しているが、レイノルズ数が増加すると $\lambda_{c,r}$ は滑らかな $\lambda_{c,s}$ よりも徐々に大きくなる。そして、図中の一点鎖線よりも大きいレイノルズ数ではレイノルズ数に依存しない一定値となる。しかしながら、粗い管の管摩擦係数 λ_r が滑らかな管の λ_s の線上から離れ始める位置、すなわち

(b) 一定値となるレイノルズ数

図6 レイノルズ数

粗さの影響が現れ始める流れの状態は、曲り管の $\lambda_{c,r}$ と直管の $\lambda_{st,r}$ では異なる。粗い直管(図2)ではいずれの粗さでも乱流状態の管摩擦係数 $\lambda_{st,s}$ [式(2)] の線上から離れ始めるのに対して、粗い曲り管では粗さが大きくなると層流状態の $\lambda_{c,s}$ [式(4)] において粗さ

の影響が現れ始める。このことは、直管内流れと二次流れを伴う曲り管内流れでは、壁面の粗さにより生ずる影響の現れ方が粗さにより異なることを示している。

図4は同じ粗さの直管と曲り管の管摩擦係数を比較した結果で、レイノルズ数の増加に伴う $\lambda_{c,r}$ の変化は曲率半径比 R_c に関係なく同様の傾向を示しているが、曲率半径比が小さいほど乱流管摩擦係数は大きくなる。

図5は、一定値となった曲り管の $\overline{\lambda_c}$ と直管の $\overline{\lambda_{st}}$ との差を求めたものである。図2、3に示したように、粗さの増加につれて $\overline{\lambda_c}$ 、 $\overline{\lambda_{st}}$ はともに増加するが、両者の差 $\overline{\lambda_c} - \overline{\lambda_{st}}$ も増加し、曲率半径の小さい管路のほうが増加の程度は大きい。

図6は、管摩擦係数 $\lambda_{c,r}$ が層流管摩擦係数曲線〔式(4)〕から離れ始める臨界レイノルズ数 Re_c および $\lambda_{c,r}$ が一定値となり始めるレイノルズ数 Re^* を等価相対粗さ k_e/d に対して整理した結果である。曲り正方形管⁽²⁾の場合と同様に、粗い曲り管の Re_c は曲りの強い管路のほうが大きい値を示すが、粗さが大きくなると Re_c は小さくなり、曲率半径比による差もやや小さくなる。このような曲りおよび粗さの影響は一定値となり始める Re^* にもみられ、

$$Re^* = 2570 R_c^{0.128} (k_e/d)^{-0.389} \quad \dots\dots\dots (6)$$

なる式で近似できる。この結果によれば、粗い曲り管では粗い直管よりも小さいレイノルズ数で管摩擦係数が一定となる。

4. 近似解析

解析に使用した座標系および流動モデルを図7に示す。管中央部の流れはポテンシャル流れとみなし、壁面近傍の薄い層（境界層と呼ぶ）内の流れには境界層近似を適用して解析を行う⁽³⁾⁽⁴⁾。また、次の仮定を設ける。

(1) 流れは発達しており、断面内の二次流れの流線は管壁近くでは境界層を通過している。

(2) 曲率半径比 $R_c \gg 1$ で、境界層厚さ δ は一定である。

4.1 管中央部 運動方程式および連続の式を満足する主流および二次流れの速度を、次のように書きす⁽³⁾⁽⁴⁾。

$$u = v_0 \sin \theta, \quad v = v_0 \cos \theta \quad \dots\dots\dots (7 \cdot a)$$

$$w = w_0 + \frac{C}{v_0} r \sin \theta \quad (C = -\frac{1}{R_c} \frac{\partial p}{\partial \varphi}) \quad \dots\dots\dots (7 \cdot b)$$

ここで、 v_0 、 w_0 および C は定数。

4.2 境界層 運動方程式の各項をオーダー評価し、

微小項を省略すると

$$\frac{\partial u v}{\partial \xi} - \frac{\partial v^2}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{R_c} (w_1^2 - w^2) = \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \xi} \quad \dots\dots\dots (8 \cdot a)$$

$$\frac{\partial u w}{\partial \xi} - \frac{\partial v w}{\partial \theta} + C = \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial \xi} \quad \dots\dots\dots (8 \cdot b)$$

なる境界層方程式が導かれる⁽³⁾⁽⁴⁾。ここで、 $\xi = 1 - r$ 。上式を ξ について0から δ まで積分すると、

$$\begin{aligned} (\tau_{\theta\theta})_w &= -u_1 v_1 + \frac{d}{d\theta} \int_0^\delta v^2 d\xi \\ &+ \frac{\cos \theta}{R_c} \int_0^\delta (w_1^2 - w^2) d\xi \quad \dots\dots\dots (9 \cdot a) \end{aligned}$$

$$(\tau_{\varphi r})_w = -u_1 w_1 + \frac{d}{d\theta} \int_0^\delta v w d\xi - C \delta \quad \dots\dots\dots (9 \cdot b)$$

なる運動量積分方程式が導かれる。ここで、 $(\tau_{\theta\theta})_1$ 、 $(\tau_{\varphi r})_1$ はそれぞれ $(\tau_{\theta\theta})_w$ 、 $(\tau_{\varphi r})_w$ に比べて小さいとして省略した。添字：1、 w は境界層外端および壁面を表す。

4.3 境界層内の速度分布と壁面摩擦応力 境界層内の速度 v 、 w は次の境界条件

$$\xi = 0; \quad v = w = 0 \quad \dots\dots\dots (10 \cdot a)$$

$$\xi = \delta; \quad v = v_0 \cos \theta, \quad w = w_1 \quad \dots\dots\dots (10 \cdot b)$$

(a) トーラス座標系

(b) 流動モデル

図7 座標系

図 8 近似解析による管摩擦係数

図 9 曲り円管と曲り正方形管の比較

を満足し、かつ境界層内を流れる二次流れの流量は管中央部から境界層内へ流れ込む流量と等しく

$$\int_0^{\delta} v d\xi = -v_0(1-\delta)\cos\theta \quad \dots\dots\dots (11)$$

なる関係を満足しなければならない。いま、 v, w が

$$v = \frac{v_0 \cos\theta}{(n-1)\delta} \{ (n+1)(\delta-2)\eta^{1/n} + 2(n+1-\delta)\eta \} \quad \dots\dots\dots (12\cdot a)$$

$$w = w_1 \eta^{1/n} \quad \dots\dots\dots (12\cdot b)$$

で表せるものと仮定する。ここで、 $\eta = \xi/\delta$ 。

粗い壁面をもつ直円管内乱流において、管摩擦係数 λ_{st} がニコラッセの式(3)で表され、速度分布が $1/n$ 乗則に従うとすれば、壁面摩擦応力は、

$$\tau_w = \frac{\lambda_{st}}{8} w_a^2 = \alpha w_1^2 \quad \dots\dots\dots (13\cdot a)$$

となる。ここで、

$$\alpha = \frac{\lambda_{st}}{2} \left\{ \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} \right\}^2 \quad \dots\dots\dots (13\cdot b)$$

粗さのある曲り管についてもこの関係が成り立つものとして

$$\tau_w = \alpha q_m^2 \quad \dots\dots\dots (13\cdot c)$$

とおく。ここで、 q_m は二次流れが境界層内で最大となる位置における合成速度 $(w_m^2 + v_m^2)^{1/2}$ で、 $w_m \gg v_m$ より $q_m \doteq w_m (w_m \doteq w_1)$ となる。したがって、壁面摩擦応力 $(\tau_{\theta})_w, (\tau_{\varphi})_w$ は

$$\begin{aligned} (\tau_{\theta})_w &= \frac{v_m}{q_m} \tau_w \\ &\doteq -\frac{(n+1)}{n} \left(\frac{2}{\delta} - 1 \right) v_0 w_1 \cos\theta \quad \dots\dots\dots (14\cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tau_{\varphi})_w &= \frac{W_m}{q_m} \tau_w \\ &\doteq \alpha w_1^2 \quad \dots\dots\dots (14\cdot b) \end{aligned}$$

と表される。

4.4 管摩擦係数 運動量積分方程式(9)に速度

分布[式(12)]および壁面摩擦応力[式(14)]を代入し、式(9・a)の $\cos\theta$ の項と式(9・b)の $\sin\theta$ の項を取り出すと、

$$\alpha \frac{(n+1)(2-\delta)}{n\delta} v_0 = \frac{2\delta}{(n+2)R_c} w_0 \quad \dots\dots\dots (15\cdot a)$$

$$2\alpha C/v_0 = v_0(1-\delta) \quad \dots\dots\dots (15\cdot b)$$

となる。両式を連立し、壁面摩擦応力 $(\tau_{\varphi})_w$ と圧力こう配 C の釣合いから求まる関係

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\tau_{\varphi})_w d\theta \\ &= 2\alpha w_0^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{C}{v_0 w_0} (1-\delta) \right\}^2 \right] \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

を用いて整理すると

$$\{(1-\delta)\delta^2\}^2 \doteq 2(1-2\delta)(2-\delta)^2 (\alpha^2 \beta R_c)^2 \quad \dots\dots\dots (17)$$

なる境界層厚さ δ に関する方程式が得られる。ここで、

$$\beta = (n+1)(n+2)/n.$$

上式の解を $\delta = C_1 \alpha (\beta R_c)^{1/2} + C_2 \alpha^2 \beta R_c$ の形 (C_1, C_2 : 定数) に仮定すると、境界層厚さ δ は

$$\delta \doteq 2^{3/4} \alpha (\beta R_c)^{1/2} - 2^{-1/2} \alpha^2 \beta R_c \quad \dots\dots\dots (18)$$

と求まる。

よって管摩擦係数 λ_c は、レイノルズ数

$$\begin{aligned} Re &= 2w_a = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (rw) dr d\theta \\ &\doteq 2w_0 \left(1 - \frac{2}{n+1} \delta \right) \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

および圧力こう配 C [式(16)]を用いて

$$\begin{aligned} \lambda_c &= 16C/Re^2 \\ &\doteq 16\alpha \left(1 + \frac{3-n}{n+1} \delta \right) \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

と表される。

解析結果と実験結果の比較を図8に示す。図中の実線は近似式(20)による結果で、実験結果とよく一致す

るように $n=11$ とした。相対粗さ k_e/d の増加に伴い管摩擦係数が大きくなること、曲率半径比の小さいほうが大きいことをよく表しており、本近似解析の結果が十分に有効なものであることを示している。図9は粗さのある曲り円管[式(20): $r_c/a=30$]と曲り正方形管[$r_c/d=15$]⁽²⁾の管摩擦係数 $\overline{\lambda}_c$ を比較したもので、曲り円管のほうが曲り正方形管よりも約3% ($k_e/d=10^{-2}$) 大きい値を示すが、両者は相対粗さに対して同じ傾向の変化を示す。

5. 結 論

粗さのある曲り円管内乱流について、曲率半径比 $R_c=15, 30, 45$, レイノルズ数 $Re < 7 \times 10^4$, 等価相対粗さ $k_e/d=3.59 \times 10^{-3} \sim 3.25 \times 10^{-2}$ の範囲で管摩擦係数を測定し、ついで近似解析を行い、次の結論を得た。

(1) 粗い壁面をもつ曲り円管の乱流管摩擦係数

は、 R_c が小さい曲り管ほど大きく、

$$Re > 2570 R_c^{0.128} (k_e/d)^{-0.389}$$

では一定値を示す。

(2) 一定となる乱流管摩擦係数 λ_c の計算には境界層近似が適用でき、

$$\overline{\lambda}_c = 1.538(1 - 0.667\delta)\overline{\lambda}_{st}$$

なる近似式で表示できる。ここで、

$$\delta = 0.609 \overline{\lambda}_{st} \sqrt{R_c} - 0.0926 \overline{\lambda}_{st}^2 R_c$$

ここに、本実験に協力いただいた当時の学部生、吉田雅之君に謝意を表する。

文 献

- (1) 日本機械学会編, 管路・ダクトの流体抵抗, (1980), 75.
- (2) 須藤・高見, 機論, 55-512, B(1989), 972.
- (3) Ito, H., ZAMM, 49-11(1969), 635.
- (4) Ito, H., Trans. ASME, Ser. D., 81(1959), 123.