非ニュートン流体中の気泡の力学*

島

章^{*1}

Dynamics of Bubbles in Non-Newtonian Fluids

Akira SHIMA

Key Words: Bubble, Cavitation, Multi-phase Flow, Non-Newtonian Fluid, Fluid Dynamics, Impulsive Pressure

1. ま え が き

水車, ポンプ, 推進器などの水力機械において発生するキャビテーションのメカニズムを解明する手段の一つとして, 気泡の挙動を理論的に考察することが行われてきたが, これらは流体が主として水であることから, 解析上はニュートン流体中の気泡として扱われてきた。しかし, 最近の流体工学, 土木工学, 化学工学, 原子力工学, 宇宙工学などの急速な進歩に伴い, 特殊液体におけるキャビテーション問題も重要性を増してきている。

特殊液体はポリマ水溶液, スラリー, 血液, 潤滑剤などであるが, これらの液体は非ニュートン性を有しており, 近似的にもニュートン流体として扱うことには無理があるように思われる。

したがって, 近年, 非ニュートン流体中の気泡の挙動に関する研究も急速に盛んになりつつある。

非ニュートン流体は力学的挙動の相異によって大別すると, 例えば, 次の三つに分類できる⁽¹⁾。すなわち, (1) 純粘性流体, (2) 粘弾性流体, および(3) 時間依存流体である。これらの流体のうち, 従来, 気泡の挙動について研究がなされているのは(1)と(2)の流体である。よって, この二つの流体を中心にして, 気泡挙動の理論, 特に種々なる流体モデルを用いて導かれた気泡の運動方程式や気泡表面圧力の式を記述するとともに, それらの式を用いて得られた主な成果について述べる。次いで「まとめ」で今後の課題についてふれてみたい。

2. 純粘性流体中の気泡の力学

純粘性流体は非ニュートン流体の中でも最も代表的なもので, 粘性応力テンソル τ がずり速度 du/dy あるいはテンソル表示で, 変形速度テンソル Δ のみの関数で表されるものである。

2・1 指数法則流体の場合 指数法則流体の構成方程式⁽²⁾はテンソル表示で, 次式によって表される。

$$\tau = - \left\{ m \left| \sqrt{\frac{1}{2}(\Delta : \Delta)} \right|^{n-1} \right\} \Delta \cdots \cdots (1)$$

ここで, τ : 粘性応力テンソル, m, n : 指数法則パラメータ, Δ : 変形速度テンソル。

Yang-Yeh⁽³⁾は, 連続の式, 運動方程式ならびに式(1)を用いて, ガス気泡の運動方程式を導いたが, それを無次元化すれば次式で表される⁽⁴⁾。

$$\beta \frac{d^2 \beta}{d\tau^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{d\beta}{d\tau} \right)^2 = \frac{q}{\beta^{3\gamma}} - \frac{C_0}{\beta} - 1 \\ - C_1 \left| \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right|^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right) \cdots \cdots (2)$$

ただし, $\beta = \frac{R}{R_0}$, $\tau = \frac{t}{R_0} \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_l}}$, $q = \frac{p_0}{p_\infty}$, $C_0 = \frac{2\sigma}{R_0 p_\infty}$, $C_1 = \frac{M}{n p_\infty} \left(\frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_l}} \right)^n$, R : 気泡の半径, R_0 : 気泡の初期半径, p_0 : 気泡内初期ガス圧力, p_∞ : 気泡より十分離れた点での液体内圧力, ρ_l : 液体の密度, σ : 液体の表面張力, γ : ポリトロップ指数, t : 時間, $M = 4\pi(2\sqrt{3})^{n-1}$ 。

また, 気泡表面圧力の式は, 著者ら⁽⁴⁾によれば次式で与えられる。

$$\frac{p_w}{p_\infty} = \frac{q}{\beta^{3\gamma}} - \frac{C_0}{\beta} - n C_1 \left| \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right|^{n-1}$$

* 原稿受付 平成元年11月27日。

^{*1} 正員, 東北大学流体科学研究所 (〒980 仙台市青葉区片平2-1-1)。

$$\times \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right) \dots\dots\dots (3)$$

さらに、気泡崩壊により発生する最大衝撃圧力 $p_{\max}$ は気泡が最小半径に到達した際に気泡表面で生ずることから、式(3)より次式が得られる。

$$\frac{p_{\max}}{p_{\infty}} = \frac{q}{\beta_{\min}^{3/2}} - \frac{C_0}{\beta_{\min}} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $\beta_{\min} = R_{\min}/R_0$ 、 $R_{\min}$ ：気泡の最小半径。著者ら⁽⁴⁾は式(2)を用いて、CMC(カルボキシメチルセルローズ)水溶液中の気泡の挙動を数値解析し、CMC含有濃度が増加するに伴い、気泡半径-時間曲線に及ぼす減衰効果が大いことを明らかにしている(図1)。

また、式(4)による計算結果は表1のごとくなり、(1)CMC水溶液での最大衝撃圧力は水中におけるそれよりも小さいこと、(2)CMC水溶液では気泡初期半径が小さくなるほど最大衝撃圧力は小さくなり、水の場合と反対の傾向になる、(3) CMC含有濃度を増加させるに従って、最大衝撃圧力は減少することが明らかになった。

2・2 ビンガム流体の場合 粘土泥しよう、泥しよう、粘土・砂混合泥しよう、セメントロックスラリーなどの流体はビンガム流体として扱うことができるとされている^{(5)~(7)}。

ビンガム流体の構成方程式はテンソル表示で⁽²⁾

$$\tau = - \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 + \frac{\tau_0}{\sqrt{\frac{1}{2}(\dot{\gamma}:\dot{\gamma})}} \quad \text{for } \frac{1}{2}(\tau:\tau) > \tau_0^2 \\ \Delta \quad \text{for } \frac{1}{2}(\tau:\tau) < \tau_0^2 \end{array} \right. \\ \Delta = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 μ_0 ：塑性粘度、 τ_0 ：降伏値、 Δ ：変形速度テンソル、 $(\dot{\gamma}:\dot{\gamma})$ ：変形速度テンソルの第2不変量。著者ら⁽⁸⁾によれば、この流体における気泡の運動方程式は次式によって与えられる。

$$\beta \frac{d^2\beta}{d\tau^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{d\beta}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{\beta}{\beta_{r0}} \right) \left\{ \beta \frac{d^2\beta}{d\tau^2} + \left[2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\beta_{r0}} \right)^3 \right] \left(\frac{d\beta}{d\tau} \right)^2 \right\} \\ = \frac{q}{\beta^{3/2}} - 1 - \frac{C_0}{\beta} \frac{d\beta}{d\tau} + C_1 \left| \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right|^{-1} \\ \times \left(\frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{d\tau} \right) \left[3 \ln \left(\frac{\beta}{\beta_{r0}} \right) - 1 \right] - \frac{C_2}{\beta} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $\beta = \frac{R}{R_0}$ 、 $\beta_{r0} = \frac{r_0}{R_0}$ 、 $\tau = \frac{t}{R_0} \sqrt{\frac{p_l}{\rho_l}}$ 、 $q = \frac{p_0}{p_l}$

$$C_0 = \frac{M_0}{p_l} \cdot \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{p_l}{\rho_l}}, \quad C_1 = \frac{M_1}{p_l}, \quad C_2 = \frac{2\sigma}{R_0 p_l},$$

$$M_0 = 4\mu_0, \quad M_1 = \frac{2\tau_0}{\sqrt{3}}$$

p_0 ：気泡内初期ガス圧力、 r_0 ：気泡中心からの距離、 p_l ：気泡より十分離れた点での圧力、 ρ_l ：液体の密度。

また、気泡表面圧力は

$$\frac{p_w}{p_l} = 1 + \left[\beta \frac{d^2\beta}{d\tau^2} + 2 \left(\frac{d\beta}{d\tau} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{\beta}{\beta_{r0}} \right) \right] \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{d\beta}{d\tau} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\beta}{\beta_{r0}} \right)^4 \right] \\ - 3C_1 \left| \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right|^{-1} \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right) \ln \left(\frac{\beta}{\beta_{r0}} \right) \quad \dots\dots (7)$$

で与えられる⁽⁸⁾。

式(6)を用いて数値計算を行った結果の一例を図2に示す。この図2は粘土泥しよう中の気泡半径の時間

表1 最大衝撃圧力 $\frac{p_{\max}}{p_{\infty}}$ ($t_l = 25^\circ\text{C}$, $\gamma = 1.4$)⁽⁴⁾

液体	η	$R_0 = 1 \text{ mm}$	$R_0 = 0.1 \text{ mm}$	$R_0 = 0.01 \text{ mm}$
水	0.1	2.659×10	2.758×10	3.857×10
	0.01	4.391×10^3	4.530×10^3	5.950×10^3
CMC水溶液 (0.1055%)	0.1	2.615×10	2.474×10	1.984×10
	0.01	4.255×10^3	3.683×10^3	1.627×10^3
CMC水溶液 (0.272%)	0.1	2.577×10	2.281×10	1.330×10
	0.01	4.148×10^3	3.182×10^3	6.984×10^3

図1 気泡半径の時間的変化に及ぼす CMC含有濃度の影響⁽⁴⁾

図2 気泡半径の時間的変化⁽⁸⁾ (粘土泥しようの場合)

的变化を示している。\$R_0=0.01\$ mm の場合であるが、気泡の振動に及ぼす粘度の影響が強くなるため、\$R-t\$ 曲線は減衰が顕著に現れ、リバウンド後の気泡半径は容易にその平衡値に近づく傾向を示している。

2.3 Casson 流体の場合 バイオメカニクスは現在最も注目されている分野の一つであるが、中でも血液循環の流体力学は多くの興味ある問題を含んでいる。潜水病、航空減圧症など気泡閉そくに起因する障害の防止に関連する基礎的研究の一つとして、血液中の気泡の挙動に関する研究が行われてきている^{(9)~(13)}。

人間の血液のレオロジー特性を良く表すと言われている Casson⁽¹⁴⁾の構成方程式のテンソル表示は次式で与えられる⁽¹²⁾。

$$\tau = - \left\{ s^2 + \frac{2sb}{\left| \sqrt{\frac{1}{2}}(\Delta:\Delta) \right|^2} + \frac{b^2}{\left| \sqrt{\frac{1}{2}}(\Delta:\Delta) \right|} \right\} \Delta \quad \text{for } \frac{1}{2}(\tau:\tau) > b^4$$

$$\Delta = 0 \quad \text{for } \frac{1}{2}(\tau:\tau) < b^4$$

.....(8)

ここで、\$\tau\$：粘性応力テンソル、\$\Delta\$：変形速度テンソル、\$(\Delta:\Delta)\$：変形速度テンソルの第2不変量、\$s^2\$：Casson 粘度、\$b^2\$：Casson 降伏値。

著者ら⁽¹²⁾は式(8)を用いて気泡の運動方程式を導いた。すなわち

$$\beta \frac{d^2\beta}{d\tau^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{d\beta}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{\beta}{\beta_{r0}} \right) \left\{ \beta \frac{d^2\beta}{d\tau^2} + \left[2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\beta_{r0}} \right)^3 \right] \left(\frac{d\beta}{d\tau} \right)^2 \right\}$$

$$= \frac{q}{\beta^{3\tau}} - 1 - \frac{C_0}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau}$$

$$+ C_1 \left| \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right|^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right) \left[\left(\frac{\beta}{\beta_{r0}} \right)^{\frac{3}{2}} - 2 \right]$$

$$+ C_2 \left| \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right|^{-1} \cdot \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right) \left[3 \ln \left(\frac{\beta}{\beta_{r0}} \right) - 1 \right]$$

$$- \frac{C_3}{\beta} \quad \text{.....(9)}$$

ここで、\$\beta = \frac{R}{R_0}\$、\$\beta_{r0} = \frac{r}{R_0}\$、\$\tau = \frac{t}{R_0} \sqrt{\frac{p_l}{\rho_l}}\$、\$q = \frac{p_0}{p_l}\$、

\$C_0 = \frac{M_0}{p_l} \cdot \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{p_l}{\rho_l}}\$、\$C_1 = \frac{M_1}{p_l} \left(\frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{p_l}{\rho_l}} \right)^{\frac{1}{2}}\$、\$C_2 = \frac{M_2}{p_l}\$、

\$C_3 = \frac{2\sigma}{R_0 p_l}\$、\$M_0 = 4s^2\$、\$M_1 = 8sb/\sqrt{2\sqrt{3}}\$、\$M_2 = 2b^2/\sqrt{3}\$。

\$p_0\$：気泡内初期ガス圧力、\$r_0\$：気泡中心からの距離、

\$p_l\$：気泡より十分離れた点の圧力、\$\rho_l\$：液体の密度、

また、この流体での気泡表面圧力 \$p_w\$ は⁽¹²⁾

$$\frac{p_w}{p_l} = \frac{q}{\beta^{3\tau}} - \frac{C_0}{\beta} \frac{d\beta}{d\tau} - C_1 \left| \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right|^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right)$$

$$- C_2 \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right)^{-1} \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right) - \frac{C_3}{\beta} \quad \text{.....(10)}$$

図3には、\$R_0=0.1\$ mm で \$q=2.0\$ および \$4.0\$ の場合における静脈中の気泡の \$R-t\$ 曲線と動脈中のそれとの対比を示す。図3の実線が静脈および点線が動脈の場合である。図3から、動脈中における気泡の成長率および収縮率は静脈中のそれらよりも大きいことがわかる。

2.4 Powell-Eyring 流体の場合 Powell-Eyring⁽¹⁵⁾は Eyring⁽¹⁶⁾の絶対反応速度論を基にしてライム・ベース・グリースのコンシステンシー曲線を満足するレオロジーモデルを提案した。

このモデル流体の構成方程式は次式によって与えられる。

$$\tau = - \left\{ \mu + \frac{A \sinh^{-1} \left[\frac{1}{B} \sqrt{\frac{1}{2}}(\Delta:\Delta) \right]}{\left| \sqrt{\frac{1}{2}}(\Delta:\Delta) \right|} \right\} \Delta$$

.....(11)

ここで、\$\tau\$：粘性応力テンソル、\$\Delta\$：変形速度テンソル、\$\mu, A, B\$：物質定数

著者ら⁽¹⁷⁾によれば、この流体での気泡の運動方程式は次式で与えられる。

$$\beta \frac{d^2\beta}{d\tau^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{d\beta}{d\tau} \right)^2 = \frac{q}{\beta^{3\tau}} - 1 - \frac{C_0}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau}$$

$$- C_1 \left| \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right|^{-1} \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right)$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} K_m \left\{ \frac{C_2 \left| \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right|}{\sqrt{1 + \left(C_2 \left| \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right| \right)^2}} \right\}^{2m-1} - \frac{C_3}{\beta}$$

.....(12)

ここで、\$\beta = \frac{R}{R_0}\$、\$\tau = \frac{t}{R_0} \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_l}}\$、\$q = \frac{p_0}{p_\infty}\$、

\$C_0 = \frac{M_0}{p_\infty R_0} \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_l}}\$

図3 静脈中および動脈中における気泡半径の時間的変化の対比⁽¹²⁾

$$C_1 = \frac{M_1}{p_\infty}, \quad C_2 = \frac{M_0}{R_0} \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_l}}, \quad C_3 = \frac{2\sigma}{p_\infty R_0},$$

$$M_0 = 4\mu, \quad M_1 = \frac{2A}{\sqrt{3}},$$

$$M_2 = \frac{2\sqrt{3}}{B}, \quad K_m = \frac{1}{2m-1} \sum_{s=1}^m \left(\frac{1}{2s-1} \right)$$

p_0 : 気泡内初期ガス圧力, p_∞ : 気泡より十分離れた点での圧力, ρ_l : 液体の密度.

また, 気泡表面圧力 p_w は

$$\frac{p_w}{p_\infty} = \frac{q}{\beta^{3\gamma}} - \frac{C_0}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} - C_1 \left| \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right|^{-1} \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right) \\ \times \sin h^{-1} \left(C_2 \left| \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right| \right) - \frac{C_3}{\beta} \dots\dots\dots (13)$$

図4には, Powell-Eyringモデルによる $R-t$ 曲線と指数法則モデルによるそれとの比較を示している.

図4からわかるように, Powell-Eyring 流体中の気泡は指数法則流体の場合よりも振動の減衰が大きくなる. このことは, 指数法則モデルの場合, ずり速度の大きい領域における非ニュートン粘度が Powell-Eyring モデルよりも小さく評価されているためと考えられる⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾.

2.5 著者ら提案のモデル流体の場合 著者ら⁽¹⁹⁾⁻⁽²¹⁾は PEO 水溶液, Polyox 水溶液, PAM 水溶液, CMC 水溶液など種々なるポリマ水溶液のレオロジーをレオメータを用いて実験的に解析するととも

に, これらのポリマ水溶液の流動をずり速度の比較的広範囲にわたって良く表すレオロジーモデルを作成, 提案した.

すなわち, 新しい流体モデルの構成方程式は⁽¹⁹⁾

$$\tau = - \left\{ \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left[1 + \lambda \left| \sqrt{\frac{1}{2}} (\mathbf{D} : \mathbf{D}) \right| \right]^n} \right\} \mathbf{D} \dots\dots\dots (14)$$

ここで, τ : 粘性応力テンソル, $\mathbf{D}$: 変形速度テンソル, η_0 : 零ずり粘度, η_∞ : 極根粘度, λ : 時間定数, n : 物質定数.

式(14)を用いて導いた気泡の運動方程式は次のとおりである.

$$\beta \frac{d^2\beta}{d\tau^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{d\beta}{d\tau} \right)^2 = \frac{q}{\beta^{3\gamma}} - 1 - \frac{C_0}{\beta} \frac{d\beta}{d\tau} \\ - \frac{\frac{C_1}{\beta} \frac{d\beta}{d\tau}}{\left(1 + C_2 \left| \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right| \right)^n} + n \frac{C_1}{C_2} \left| \frac{1}{\beta} \right|$$

図5 種々なるポリマ水溶液における $R-t$ 曲線の比較⁽²¹⁾

図4 Powell-Eyring モデルの場合と指数法則モデルの場合との対比⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾

図6 種々なるポリマ水溶液における $p_{\max}-c$ 曲線の比較⁽¹⁹⁾

$$\times \frac{d\beta}{d\tau} \left|^{-1} \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right) \cdot \left\{ \frac{1}{1-n} \left[1 - \left(1 + C_2 \left| \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right| \right)^n \right] + \frac{1}{n} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + C_2 \left| \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right| \right)^n} \right] \right\} \right. \\ \left. - \frac{C_3}{\beta} \right. \dots \dots \dots (15)$$

ただし, $\beta = \frac{R}{R_0}$, $\tau = \frac{t}{R_0} \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_l}}$, $q = \frac{p_0}{p_\infty}$, $C_0 = \frac{M_0}{p_\infty} \times \left(\frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_l}} \right)$, $C_1 = \frac{M_1}{p_\infty} \left(\frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_l}} \right)$, $C_2 = M_2 \left(\frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_l}} \right)$, $C_3 = \frac{2\sigma}{R_0 p_\infty}$, $M_0 = 4\eta_\infty$, $M_1 = 4(\eta_0 - \eta_\infty)$, $M_2 = 2\sqrt{3}\lambda$, R : 気泡の半径, R_0 : 気泡の初期半径, p_∞ : 気泡より十分離れた点での圧力, p_0 : 気泡内初期ガス圧力, σ : 液体の表面張力, γ : ポリトロップ指数, ρ_l : 液体の密度, t : 時間. また, この場合気泡表面での圧力 p_w は次式で与えられる.

$$\frac{p_w}{p_\infty} = \frac{q}{\beta^{3\gamma}} - \frac{C_0}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} - \frac{\frac{C_1}{\beta} \frac{d\beta}{d\tau}}{\left(1 + C_2 \left| \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \right| \right)^n} - \frac{C_3}{\beta} \dots \dots \dots (16)$$

図7 β - τ 曲線に及ぼす緩和時間の影響⁽³²⁾

図8 β - τ 曲線に及ぼす遅延時間の影響⁽³²⁾

図5には, 式(15)を数値計算することによって得られた各種ポリマ水溶液での気泡半径-時間曲線を示す. 図5より, PAM(N-110)が気泡振動を最も強く減衰させることがわかる. 次に, PEO および CMC-4 M が気泡の運動の抑制に対して効果的作用をもつことがわかる⁽²¹⁾.

図6には, 式(16)を用いて種々なるポリマ水溶液における最大衝撃圧力 $p_{\max}$ を計算した結果を示す. ただし, 横軸の $C[\%]$ はポリマ濃度である.

図6より, $C \leq 0.5\%$ の濃度範囲では, $p_{\max}$ を減少させる最も有効なポリマは PAM(N-110)であり, 次に PEO 水溶液, CMC-4H 水溶液の順序であることがわかる⁽¹⁹⁾.

純粘性流体としては, この他にも, Sisko モデル⁽²²⁾, Denn モデル⁽²³⁾, Ellis モデル⁽²⁾, Second Order モデル⁽²⁴⁾, Cross モデル⁽²⁵⁾, Carreau モデル⁽²⁶⁾, Sutterby モデル⁽²⁷⁾などがあり, これらの流体モデルでの気泡の挙動も調べられている⁽²⁸⁾⁽²⁹⁾.

3. 粘弾性流体中の気泡の力学

粘性的性質と弾性的性質を共有する粘弾性流体における気泡の挙動に対しても, これまでいくつかの粘弾性モデルを用いて検討がなされている. ここではそのうち最も代表的な3定数 Oldroyd モデル⁽³⁰⁾の場合について述べることにする. 液体としては, ポリマ水溶液, ポリマ濃厚溶液やコロイド溶液などが含まれる.

3定数 Oldroyd モデルのレオロジー式は次式で表される.

$$\tau_{ik} + \lambda_1 \frac{D\tau_{ik}}{Dt} = -2\eta_0 \left(e_{ik} + \lambda_2 \frac{De_{ik}}{Dt} \right) \dots \dots \dots (17)$$

ただし, τ_{ik} : 粘性応力テンソル, λ_1 : 緩和時間, λ_2 : 遅延時間, η_0 : 粘度, e_{ik} : ひずみ速度テンソル.

この場合の気泡の運動方程式は, Tanasawa-Yang⁽³¹⁾により, 式(17)を用いて求められたが, その無次元系は次のごとく表すことができる⁽³²⁾.

$$\beta \frac{d^2\beta}{d\tau^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{d\beta}{d\tau} \right)^2 = \frac{q}{\beta^{3\gamma}} - 1 - \frac{1}{We\beta} \\ - 12 \frac{\eta^*}{\lambda_1^*} \int_0^\tau \exp\left(-\frac{\xi' - \tau}{\lambda_1^*}\right) \\ \beta(\xi')^2 \frac{d\beta(\xi')}{d\xi'} + \lambda_2^* \left\{ \beta(\xi')^2 \frac{d^2\beta(\xi')}{d\xi'^2} \right. \\ \left. + 2\beta(\xi') \left[\frac{d\beta(\xi')}{d\xi'} \right]^2 \right\} \\ \times \frac{1}{\beta^3 - \beta(\xi')^3} \\ \times \ln\left(\frac{\beta}{\beta(\xi')}\right) d\xi' \dots \dots \dots (18)$$

ここで, $\beta = \frac{R}{R_0}$, $\tau = \frac{t}{R_0} \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_l}}$, $q = \frac{p_0}{p_\infty}$, $We = \frac{R_0 p_\infty}{2\sigma}$,

図9 最大圧力 $p_{\max}$ に及ぼす緩和時間の影響⁽³²⁾

$$\lambda_1^* = \frac{\lambda_1}{R_0} \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_l}}, \quad \lambda_2^* = \frac{\lambda_2}{R_0} \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_l}}, \quad \eta^* = \frac{\eta_0}{R_0 \sqrt{p_\infty \rho_l}}$$

R : 気泡の半径, R_0 : 気泡の初期半径, p_∞ : 気泡より十分離れた点での圧力, σ : 液体の表面張力, ρ_l : 液体の密度, t : 時間.

また, 気泡表面での圧力 p_w の式は⁽³²⁾

$$\begin{aligned} \frac{p_w}{p_\infty} = & \frac{q}{\beta^{3\gamma}} - \frac{1}{We\beta} - 4 \frac{\eta^*}{\lambda_1^*} \int_0^{\xi} \exp\left(\frac{\xi' - \tau}{\lambda_1^*}\right) \\ & \times \left\{ \frac{1}{\beta(\xi')} \frac{d\beta(\xi')}{d\xi'} + \lambda_2^* \left[\frac{1}{\beta(\xi')} \cdot \frac{d^2\beta(\xi')}{d\xi'^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{\beta(\xi')^2} \left[\frac{d\beta(\xi')}{d\xi'} \right]^2 \right] \right\} d\xi' \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

図7および図8はそれぞれ気泡半径の時間変化に及ぼす無次元緩和時間 λ_1^* および無次元遅延時間 λ_2^* の影響を示す。これらの図7・8から、緩和時間の増加は気泡振動の減衰作用を弱めること、反対に遅延時間の増加は減衰効果をより大ならしめることがわかる⁽³²⁾。

図9には、最大圧力 $p_{\max}$ に及ぼす緩和時間 λ_1^* の影響を示す。図9より、 λ_1^* の増加とともに、 $p_{\max}$ の値が大きくなることがわかる。

また、図10には、最大圧力 $p_{\max}$ に及ぼす遅延時間 λ_2^* の影響を示した。図10よりわかるように、 $p_{\max}$ は λ_2^* の値の増加とともに減少する。

4. あとがき

以上、非ニュートン流体中の気泡挙動の既存理論について述べたが、ニュートン流体での理論に比べて、いまだ説明されておらない点が多い。例えば、非ニュ

図10 最大圧力 $p_{\max}$ に及ぼす遅延時間の影響⁽³²⁾

ートン流体の場合、液体の圧縮性の影響を考慮した理論は皆無である。また、キャビテーション損傷とも関連して固体壁面近傍での気泡の問題が重要であるが、これに関する理論的研究も知見しない。さらに、これまでの理論は単一気泡に限定されているが、実際には気泡の数も考慮しなければならない、あるいは流れ場での気泡の挙動の解明も必要である。これらは今後解明すべき重要な研究課題である。

おわりに、本稿のとりまとめに助力された門馬美和君に心から感謝の意を表す。

文 献

- (1) 富田, 非ニュートン流体の流動, 機誌, **66**-537(1963), 1325.
- (2) Bird, R. B., ほか2名, *Transport Phenomena*, (1960), 103, N. Y. John Wiley and Sons, Inc.
- (3) Yang, W. J. and Yeh, H. C., *AIChE J.*, **12**(1966), 927.
- (4) Shima, A. and Tsujino, T., *Chem. Eng. Sci.*, **31**(1976), 863.
- (5) Caldwell, D. H. and Babbitt, H. E., *Ind. Eng. Chem.*, **33**(1941), 249.
- (6) Gregory, W. B., *Mech. Eng.*, **49**(1927), 609.
- (7) Wilhelm, R. H., ほか2名, *Ind. Eng. Chem.*, **31**(1939), 622.
- (8) Shima, A. and Tsujino, T., *Proc. 17th Congr. IAHR*, 1-Sub A(1977), 411.
- (9) Yang, W. J., *J. Biomech.*, **4**(1971), 119.
- (10) Yang, W. J., ほか3名, *J. Biomech.*, **4**(1971), 275.
- (11) Johnson, R. J. R., ほか3名, *Br. J. Radiol.*, **41**(1968), 749.
- (12) Shima, A. and Tsujino, T., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **45**-1(1978), 37.
- (13) Tsujino, T. and Shima, A., *J. Biomech.*, **13**(1980), 407.
- (14) Casson, N., *A Flow Equation for Pigment-Oil Suspensions of the Printing Ink Type, Rheology of Disperse Systems*, (1959), 84, Pergamon Press.
- (15) Powell, R. E. and Eyring, H., *Nature*, **154**(1944), 427.
- (16) Eyring, H., *J. Chem. Phys.*, **4**(1936), 283.
- (17) Shima, A. and Tsujino, T., *Chem. Eng. Sci.*, **36**(1981), 931.

- (18) 島・辻野, 東北大学速研報告, **47**-413(1981), 97.
 - (19) Shima, A. and Tsujino, T., *Appl. Sci. Res.*, **38** (1982), 255.
 - (20) Shima, A., ほか2名, *Rep. Inst. High Speed Mech.*, Tohoku Univ., **46**-359(1983), 104.
 - (21) Tsujino, T., and Shima, A., *Rep. Inst. High Speed Mech.*, Tohoku Univ., **46**-360, 361(1983), 131, 153.
 - (22) Sisko, A. W., *Ind. Eng. Chem.*, **50**(1958), 1789.
 - (23) Denn, M. M., *Chem. Eng. Sci.*, **22**(1967), 395.
 - (24) Markovitz, H. and Coleman, B. D., *Adv. Appl. Mech.*, **8** (1964), 69.
 - (25) Cross, M. M., *J. Colloid Sci.*, **20**(1965), 417.
 - (26) Bird, R. B., ほか2名, *Dynamics of Polymeric Liquids*, **1** (1977), 210, John Wiley and Sons, Inc.
 - (27) Sutterby, J. L., *AIChE J.*, **12**(1966), 63.
 - (28) Shima, A. and Tsujino, T., *Trans. ASME, J. Lubr. Technol.*, **99**-4(1977), 455.
 - (29) Shima, A. and Tsujino, T., *Rep. Inst. High Speed Mech.*, Tohoku Univ., **36**-302(1977), 35, **42**-326(1980), 25, **36**-301(1977), 13, **40**-318(1979), 1, **42**-327(1980), 43, **49**-370(1984), 39.
 - (30) Bird, R. B., ほか2名, *Dynamics of Polymeric Liquids*, **1**(1977), 279, John Wiley and Sons, Inc.
 - (31) Tanasawa, I. and Yang, W. J., *J. Appl. Phys.*, **41**(1970), 4526.
 - (32) Tsujino, T., ほか2名, *Rep. Inst. High Speed Mech.*, Tohoku Univ., **55**-389(1988), 1.
-