渦層とこれに沿う無限弾性壁の静的・動的安定性の解析*

瀬 川 頼 英^{*1}Analysis of Static and Dynamic Stabilities of Vortex Layer and
Infinitely Long Elastic Wall Adjoined to This Layer

Yorihide SEGAWA

Stabilities of the vortex layer and elastic wall adjoined to this layer are analyzed taking into account the presence of the Coriolis force of the system. The following are clarified. (1) As static characteristics, the system is concerned with the generation of buckling and a stationary vortex, and the vortex layer of IS type (velocity U_2 (near the wall) < velocity U_1 (far from the wall)) is stabilized while the vortex layer of the NS type ($U_2 > U_1$) is destabilized according to the decrease in the distance between the vortex layer and the wall.

(2) As dynamic characteristics, the system is concerned with the generation of flutter and free vortex (vortex shedding), and the coupled system of the vortex layer and the elastic wall is stable, as the distance decreases where the virtual mass ratio related to the wall is large.

Key Words: Flow Induced Vibration, Buckling, Flutter, Stability, Vortex Layer, Elastic Wall, Coupled System, Coriolis Force, Virtual Mass

1. ま え が き

流体を取扱った産業機械が多く見られる現状の中で、流体に関連した振動や変形の問題も多くなってきた。これは、機械の性能向上に伴う流速増大や経済性の配慮に基づく軽量化とこれによる材料の剛性低下も無視できないことを示しているように思われる。

本研究の目的は、このような問題の中で、流体が弾性体に平行して流れる場合の問題として、とくに、その不安定現象を取り上げ、これを予測する統一的手法を見いだすことである。個々の対象に対する手法をまとめた研究は近年多く見られるようになった。これらの研究の中には、有限長の物体⁽¹⁾、流体の粘性⁽²⁾、物体表面の境界層⁽³⁾を考慮してこの不安定現象を扱ったものが多い。また、これらが無視して扱ったものもある⁽⁴⁾。本研究では、流体に関連した振動や変形の不安定現象を基本に立ち返って把握するために、渦層とこれに沿う無限弾性壁の安定性を取り上げ、その理論解析を行った。とくにこの力学モデルを取り上げた理由は、数学的な取り扱いが簡単であるほか、渦層につい

ては、実際にもしばしば現れる高レイノルズ数のせん断流がこの渦層で取扱えると考えられること、また、無限弾性壁については、安定性特性が全波数にわたり全体的にとらえ得ると考えたこと、のためである。

本論文では、このモデルにおいて、エネルギー保存系で扱うとき、静的不安定現象として弾性壁の座屈および渦層による固定渦の形成⁽⁵⁾、また、エネルギー非保存系で扱うとき、動的不安定現象として弾性壁のフラッタおよび渦層による不安定波の発生とこれに続く自由渦(渦流れ)の形成⁽⁶⁾が予測できることを示す。また、数値計算により、渦層と弾性壁の連成系について、渦層と弾性壁の間隔を変えたときの静的・動的特性変化をとらえ、その一般特性を明らかにする。

なお、解析に当たって、流れは微小幅の渦層部を除いてポテンシャル流れとし、ポテンシャル理論を適用し、また、渦層および弾性壁の変動は小さいとして線形理論による。

2. 理 論

2・1 主な記号

c' : 渦層と弾性壁の間隔 s に関する定数

D : 一次元無限平板の曲げ剛性(付記なきとき、複素曲げ剛性 $E^*h^3/12$) $N \cdot m$

* 平成元年11月8日 流体工学部門講演会において講演、原稿受付 平成元年3月2日。

*1 正員、日立製作所機械研究所 (〒317 日立市幸町3-1-1)。

E : ヤング率 N/m^2
 $E^*: E(1+j\delta/\pi)$, 複素ヤング率 N/m^2
 e_1, e_2 : 一様流に沿う境界面における時間微分 s^{-1}
 $F_1: F_1(t)$, 渦層の変動変位の時間成分 m
 f : 振動数 Hz
 g : 重力の加速度 m^2/s
 $H: H(t)$, 弾性壁の変動変位の時間成分 m
 h : 弾性壁の厚さ m
 j : 虚数単位
 k : 波数(円波数) $=2\pi/\lambda$ m^{-1}
 k_c : 流れに沿った弾性壁の座屈, フラッタに対する安定限界波数 m^{-1}
 L : 弾性壁の振動の微分演算子 N/m^3
 $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$: 渦層によって仕切られた2流域での変動圧力 N/m^2
 s : 渦層と弾性壁の間隔 m
 U_1, U_2 : 渦層を作る一様流の流速 m/s
 U_{bc}, U_{fc} : 流れに沿った弾性壁の座屈, フラッタに対する安定限界流速 m/s
 u_a : 波の波数 k に対する増幅減衰率比 m/s
 u_m : 波の位相速度 $=f\lambda$ m/s
 x, y : 一様流に平行な座標, 垂直な座標 m
 Δ, Δ' : 保存系, 非保存系での渦層の振動の微分演算子, 特性式 N/m^4
 Δ'', Δ''' : 保存系, 非保存系での連成系振動に関する微分演算子, 特性式 N/m^2
 Δ_m, Δ_m' : 保存系, 非保存系での流れに沿う弾性壁の振動の微分演算子, 特性式 N/m^3
 δ : 弾性壁の対数減衰率
 η_1, η_w : $\eta_1(x, t), \eta_w(x, t)$, 渦層, 弾性壁の変動変位 m
 λ : 波長 m
 μ : 弾性壁の質量に対する壁面流体の付加質量の比
 ρ_1, ρ_2 : 渦層を作る一様流の密度 $\text{N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4$
 ρ_m : 弾性壁の密度 $\text{N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4$
 σ : 特性方程式を満たす特性値 s^{-1}
 σ_1 : $-ku_m$, σ の虚数部, 波の円波数 s^{-1} ($u_m > 0$ 進行波, $u_m < 0$ 後進波)
 σ_r : ku_a , σ の実数部, 増幅減衰率 s^{-1} ($u_a > 0$ 増幅不安定, $u_a < 0$ 減衰不安定, $u_a = 0$ 安定)
 ϕ_1, ϕ_2 : $\phi_1(x, y, t), \phi_2(x, y, t)$, 渦層によって仕切られた2流域での変動速度ポテンシャル m^2/s

2.2 計算上の仮定

計算モデルの設定に当たり、次の仮定を設けた。

(1) 流れは弾性壁に沿い、渦層を形成する。

- (2) 流れは非圧縮性流れで、二次元平行流である。
 (3) 弾性壁は表面が滑らかな二次元無限平板である。
 (4) 渦層で仕切られた各流域での温度、密度は均一である。
 (5) 流れは微小幅の渦層部を除きポテンシャル流れである。
 (6) 流れは境界層の未発達な初期流れである。
 (7) 渦層および弾性壁の変動は小さい。
 (8) 流れは水平流である。

2.3 計算モデル

渦層に沿う弾性壁の計算モデルを図1に示す。流速 U_1, U_2 の一様流が渦層をなす。ここに、壁面遠方の流速 U_1 と壁面近傍の流速 U_2 に対して、 $U_1 > U_2$ の渦層をIS形渦層、 $U_1 < U_2$ の渦層をNS形渦層と呼ぶ。

2.4 特性方程式の導入

(1) 非保存系の場合

図1で渦層および弾性壁の変動変位 η_1, η_w によって生ずる変動ポテンシャルおよび全速度ポテンシャルを、渦層によって仕切られた流域 (I), (II) で ϕ_1, ϕ_2 および Φ_1, Φ_2 とすると、次式が成り立つ。

$$\Phi_1 = \phi_1 + U_1 x \quad \Phi_2 = \phi_2 + U_2 x \quad \cdots \cdots (1)$$

式(1)を用いて渦層の両面および弾性壁面での y 軸方向の速度に対する境界条件式を立て、仮定(7)を考慮すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \quad (y = \eta_1 + 0) \quad \cdots \cdots (2)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} = \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \quad (y = \eta_1 - 0) \quad \cdots \cdots (3)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} = \frac{\partial \eta_w}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \eta_w}{\partial x} \quad (y = -s + \eta_w) \quad \cdots \cdots (4)$$

また、渦層(不連続面)での変動圧力に関する条件式

$$\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 \quad (\eta_1 - 0 < y < \eta_1 + 0) \quad \cdots \cdots (5)$$

およびBernoulliの定理を用いると、仮定(7)を考慮するとき次式が得られる。

図1 計算モデル

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) - \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) + g(\rho_1 - \rho_2)\eta_1 = 0 \quad \cdots (6)$$

$$(y = \eta_1)$$

また、弾性壁の振動方程式は次式で与えられる、

$$L\eta_w = -\tilde{p}_2 = \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) + \rho_2 g \eta_w \quad \cdots (7)$$

$$L = \rho_m h \frac{\partial^2}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4}{\partial x^4} \quad (y = -s + \eta_w)$$

そこで、 η_1 , η_w および Laplace 方程式を満たす ϕ_1 , ϕ_2 を次の波動の式で仮定する、

$$\eta_1 = F_1(t) e^{jkx} \quad \cdots (8)$$

$$\eta_w = H(t) e^{jkx} \quad \cdots (9)$$

$$\phi_1 = G_1(t) e^{-ky} e^{jkx} \quad \cdots (10)$$

$$\phi_2 = \{G_2(t) e^{ky} + G_3(t) e^{-k(y+s)}\} e^{jkx} \quad \cdots (11)$$

式(8)~(11)を式(2)~(4), 式(6), (7)に代入し、

$$e_1 = \frac{d}{dt} + jkU_1 \quad e_2 = \frac{d}{dt} + jkU_2$$

$$c = 1 - e^{-2ks} \quad c' = (1 + e^{-2ks})/c$$

$$d' = (2e^{-ks})/c$$

とおいて、式を整理し、 G_1 , G_2 , F_1 を消去すると、弾性壁に関する振動方程式として次式が得られる、

$$\Delta \Delta_m H = -\frac{\rho_2 e_2^2}{k} \Delta'' H \quad \cdots (12)$$

$$\Delta = \rho_1 e_1^2 + c' \rho_2 e_2^2 - kg(\rho_1 - \rho_2)$$

$$\Delta_m = \rho_m h \frac{d^2}{dt^2} + Dk^4 + \frac{\rho_2 e_2^2}{k} - \rho_2 g$$

$$\Delta'' = (c' - 1) \{(\rho_1 e_1^2 - \rho_2 e_2^2) - kg(\rho_1 - \rho_2)\}$$

式(12)で、 $H = H_0 e^{\sigma t}$ とおくと、計算モデルの特性方程式は、微分演算子 Δ , Δ_m , Δ'' の中の d/dt を σ として扱うことにより次式で与えられる、

$$\Delta \Delta_m = -\frac{\rho_2 e_2^2}{k} \Delta'' \quad \cdots (13)$$

(2) 保存系の場合 図1で、この力学系をエネルギーの保存系として扱う場合、その特性方程式は、式(13)からとくに e_1^2 , e_2^2 を

$$e_1^2 \rightarrow \sigma^2 - k^2 U_1^2 \quad e_2^2 \rightarrow \sigma^2 - k^2 U_2^2 \quad \cdots (14)$$

と置換することで得られ、このときの特性式 Δ , Δ_m , Δ'' を Δ , Δ_m , Δ'' とすると、次式で表される、

$$\Delta \Delta_m = -\frac{\rho_2}{k} (\sigma^2 - k^2 U_2^2) \Delta'' \quad \cdots (15)$$

この置換(14)は下記の考え方に基づく、

式(12)の両辺を波数 k で除るとき、共通の式

$$\frac{\rho_1 e_1^2}{k} - \rho_1 g \quad - \frac{c' \rho_2 e_2^2}{k} - \rho_2 g$$

$$\frac{\rho_2 e_2^2}{k} - \rho_2 g$$

が得られる。これらは、それぞれに F_1 , F_1 , H を右乗

するとき、下記した不連続面における変動圧力に対応することがわかる(証明は省略する)。

$\rho_1 e_1^2/k - \rho_1 g$流速 U_1 の一様流に接する渦層部上面

$-c' \rho_2 e_2^2/k - \rho_2 g$流速 U_2 の一様流(背後の弾性壁の所に固定壁があると)に接する渦層部下面

$\rho_2 e_2^2/k - \rho_2 g$流速 U_2 の一様流に接する弾性壁面

これら共通の式はさらに共通化して次式で表せる、

$$c'' \rho e^2/k - \rho g \quad (c'': 1 \text{ また } -c')$$

これに伴い F_1 , H を共通化するとともに、波動を一般の変動とみなすと、 e は $\partial/\partial t + U\partial/\partial x$, F_1 , H は η などとして、この共通の式に対応する変動圧力 $\tilde{p}_w$ は次式で表すことができる、

$$\tilde{p}_w = \frac{c'' \rho}{k} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 2 \frac{c'' \rho}{k} U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) + \frac{c'' \rho}{k} U^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \rho g \eta$$

この右辺について、変動不連続面に接する一様流の付加質量 $|c''|\rho/k$ に対して[2・5節(4)参照]、第1項は慣性力、第2項はコリオリの力、第3項は遠心力、第4項は浮力(自重)に相当する、とくに、第2項は角速度 $\partial(\partial\eta/\partial t)/\partial x$ に比例するものであり、力学系がエネルギーの非保存系であることを示している、

ところで、このコリオリの力に対応する項を特性方程式からすべて取り除くと、力学系から速度に比例する力が除かれることになり、力学系は基本的にエネルギーの保存系となる(弾性壁の材料減衰によるエネルギーの非保存系としての性質は力学系全体から見たとき基本的性質ではないとする)。

このとき、 e^2 は $\partial^2/\partial t^2 + U^2 \partial^2/\partial x^2$ となり、 $\tilde{p}_w$ も

$$\tilde{p}_w = \frac{c'' \rho}{k} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{c'' \rho}{k} U^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \rho g \eta$$

となる。したがって、(14)の置換が考えられる、

次に、エネルギーの保存系、非保存系の力学系における安定性を定義すると、次のようである、

保存系での安定性.....力学系に変位または速度の微小じょう乱を加えたとき、系が変形していくとき不安定、系が変形しないままのとき安定、

非保存系での安定性...力学系に変位または速度の微小じょう乱を加えたとき、系が変動伝搬していくとき不安定、系が変動伝搬しないままのとき安定、

ここに、安定判別の対象が、保存系では系の変形、非保存系では系の変動伝搬であることから、系の安定性特性を保存系では静特性、非保存系では動特性と呼ぶ

ことができる。

なお、同じ力学系で静特性と動特性のいずれが現れるかは、微小じょう乱の与え方の相違によるもののほかに、流速分布条件や壁の拘束条件によるものと考えられる。

2・5 主な基本特性 式(13), (15)から, $s \gg \lambda$ のとき $c'=1$ として Δ'' , $\Delta'''=0$ となり,

$$\Delta=0 \quad \text{または} \quad \Delta_m=0$$

$$\Delta=0 \quad \text{または} \quad \Delta_m=0$$

が得られる。 $\Delta=0$, $\Delta_m=0$ は弾性壁を固定壁とした場合の渦層単独の特性方程式であり, $\Delta_m=0$, $\Delta_m=0$ は渦層を弾性壁から十分に遠ざけた場合の弾性壁単独の特性方程式である。一般の場合, $c' \neq 1$ として Δ'' , $\Delta''' \neq 0$ となり, 上記の単独渦層と単独弾性壁が連成系をなすものと考えられる。そこで, この連成系の基本特性となる $\Delta=0$, $\Delta_m=0$, $\Delta=0$, $\Delta_m=0$ の特性値を求め, その一般的性質を以下に記す。また, 連成系の特性については数値計算により求め, 3章に記す。

(1) $\Delta=0$ の特性

式(12)の Δ から $\Delta=0$ の特性値 σ を求めると次の結果を得る。

$$D_0 > 0 \text{ のとき } \sigma = ku_a \quad u_a = \pm \sqrt{D_0}$$

$$D_0 < 0 \text{ のとき } \sigma = -jku_m \quad u_m = \pm \sqrt{-D_0}$$

$$D_0 = \frac{\rho_1 U_1^2 + c' \rho_2 U_2^2}{\rho_1 + c' \rho_2} + \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{k(\rho_1 + c' \rho_2)}$$

ここに, $D_0 > 0$ のとき, 渦層は不安定であり, 微小じょう乱により固定渦を形成すると考えられる。また, $D_0 < 0$ のとき, 渦層は安定であり, 微小じょう乱によって固定渦は形成されないと考えられる。

とりわけ, 波長 λ に対する Froude number

$$Fr_1 = U_1 / \sqrt{g\lambda} \quad Fr_2 = U_2 / \sqrt{g\lambda}$$

が大きいとして, 重力の影響を無視すると, $D_0 > 0$ として渦層は常に不安定であり, $s \ll \lambda$ のとき, 次の結果を得る。

$$U_2 = 0 \text{ の場合} \quad u_a = \pm U_1 \sqrt{\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) ks}$$

$U_2 \neq 0$ の場合

$$u_a = \pm U_2 \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{U_1^2 - U_2^2}{2U_2^2} ks \right)$$

すなわち, $U_2 = 0$ の場合, s の減少とともに渦層は安定化する。また, $U_2 \neq 0$ の場合, s の減少とともに

$U_1 > U_2$ のとき 渦層の不安定化が減少し

$U_1 < U_2$ のとき 渦層の不安定化が増大する。

この結果, s の減少とともに, IS 形渦層では微小じょう乱により固定渦の形成は困難になるが, NS 形渦層では微小じょう乱により固定渦の形成は容易になると

考えられる(2・3節参照)。

なお, これらの現象変化が, 重力を無視しても $\rho_1 > \rho_2$ のとき顕著であり, $\rho_1 < \rho_2$ のとき緩慢であることは注目すべきことと考える。

(2) $\Delta_m=0$ の特性

式(12)の Δ_m から $\Delta_m=0$ の特性値 σ を求めると,

$$k_c = \sqrt[4]{\frac{\rho_2 g}{D}}$$

$$U_{bc} = \sqrt{\frac{1}{\mu} (k^4 - k_c^4) \frac{D}{k^2 \rho_m h}}$$

$$(D = Eh^3/12) \dots \dots \dots (16)$$

$$\mu = \rho_2 / k \rho_m h$$

とおくとき, 次の結果を得る。

(i) $k < k_c$ の場合 $\sigma = ku_{a1}$

(ii) $k > k_c$, $U_2 > U_{bc}$ の場合 $\sigma = ku_{a2}$

(iii) $k > k_c$, $U_2 < U_{bc}$ の場合 $\sigma = -jku_m$

ただし, $u_{a1} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{1+\mu} \left\{ U_2^2 + \frac{1}{\mu} (k_c^4 - k^4) \frac{D}{k^2 \rho_m h} \right\}}$

$$u_{a2} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{1+\mu} (U_{bc}^2 - U_2^2)}$$

$$u_m = \pm \sqrt{\frac{\mu}{1+\mu} (U_{bc}^2 - U_2^2)}$$

ここに, (i), (ii) の場合, 弾性壁は不安定であり, 微小じょう乱により座屈を生じることを示し, また, (iii) の場合, 弾性壁は安定で, 微小じょう乱により座屈を生じないことを示す。

ここに, k_c , U_{bc} は, 弾性壁の座屈に対する安定限界波数, 安定限界流速, μ は弾性壁の質量に対する壁面流体の付加質量の比と呼ぶ。

ところで, (ii) で $u_{a2}=0$ を満たす条件式 $U_2 = U_{bc}$ は式(16)を用いるとき次式で表される。

$$k = \sqrt{k_b^2 + \sqrt{k_b^4 + k_c^4}} = k_{bm} \quad k_b^2 = \frac{\mu \rho_m h U_2^2}{2D} \dots (17)$$

式(17)は, 静特性として流速 U_2 と波数 k に関する弾性壁の安定限界特性を与えるものであり, 図2(a)に特性図を示す。同じ流速 U_2 に対して, 弾性壁は, $k > k_{bm}$ で安定であり, $k < k_{bm}$ で不安定である。とくに, μ が小さいほど, また, D が大きいほど, 大きい流速で

(a) 静特性

(b) 動特性

図2 弾性壁単独の安定限界特性

の安定波数領域が拡大する。さらに、重力を無視するとき、小さい流速での安定波数領域が拡大する。

(3) $\Delta=0$ の特性⁽⁷⁾

式(12)の Δ から特性方程式 $\Delta=0$ の特性値 σ を求めると次の結果を得る。

$$D_0 > 0 \text{ のとき } \sigma = -jku_m + ku_a \quad u_a = \pm \sqrt{D_0}$$

$$D_0 < 0 \text{ のとき } \sigma = -jk(u'_m + u''_m)$$

$$u''_m = \pm \sqrt{-D_0}$$

$$D_0 = \frac{c' \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2}{(\rho_1 + c' \rho_2)^2} + \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{k(\rho_1 + c' \rho_2)}$$

$$u_m, u'_m = \frac{\rho_1 U_1 + c' \rho_2 U_2}{\rho_1 + c' \rho_2}$$

ここに、 $D_0 > 0$ の場合、渦層は不安定であり、微小じょう乱により振動数

$$f_u = u_m / \lambda$$

をもった不安定波を発生し、振幅の増大とともに自由渦(渦流れ)の形成が考えられる。また、 $D_0 < 0$ の場合、渦層は安定であり、微小じょう乱により振動数

$$f_s = (u'_m + u''_m) / \lambda$$

をもった安定波が存在し得るだけで、自由渦の形成は考えられない。

(4) $\Delta_m=0$ の特性⁽⁷⁾

式(12)の Δ_m から特性方程式 $\Delta_m=0$ は次式で表される。

$$\left(\rho_m h + \frac{\rho_2}{k} \right) \sigma^2 + 2j(\rho_2 U_2) \sigma + (Dk^4 - k\rho_2 U_2^2 - \rho_2 g) = 0$$

ここに、弾性壁の質量に対する壁面流体の付加質量の比 μ を

$$\mu = \rho_2 / k\rho_m h \quad (k = 2\pi/\lambda)$$

とすると、

$$k_c = \sqrt{\frac{\rho_2 g}{D}}$$

$$U_{fc} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) (k_c^4 - k^4) \frac{D}{k^2 \rho_m h}} \dots \dots \dots (18)$$

$$(D = Eh^3/12)$$

とおくとき、特性値 σ は次式で与えられる。

$$(i) \quad k < k_c \text{ の場合 } \sigma = -jku_m + ku_{a1}$$

$$(ii) \quad k > k_c, U_2 > U_{fc} \text{ の場合}$$

$$\sigma = -jku_m + ku_{a2}$$

$$(iii) \quad k > k_c, U_2 < U_{fc} \text{ の場合}$$

$$\sigma = -jk(u'_m + u''_m)$$

ただし、

$$u_m, u'_m = \frac{\mu U_2}{1 + \mu}$$

$$u_{a1} = \pm \frac{\sqrt{\mu}}{1 + \mu} \sqrt{U_2^2 + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) (k_c^4 - k^4) \frac{D}{k^2 \rho_m h}}$$

$$u_{a2} = \pm \frac{\sqrt{\mu}}{1 + \mu} \sqrt{U_2^2 - U_{fc}^2}$$

$$u''_m = \pm \frac{\sqrt{\mu}}{1 + \mu} \sqrt{U_{fc}^2 - U_2^2}$$

ここに、(i)、(ii)の場合、弾性壁は不安定であり、微小じょう乱により振動数

$$f_u = u_m / \lambda$$

をもった不安定波すなわちフラッタを生じることを示す。また、(iii)の場合、弾性壁は安定であり、微小じょう乱により振動数

$$f_s = (u'_m + u''_m) / \lambda$$

をもった安定波が存在し得るだけで、フラッタの発生を示さない。

ところで、(ii)で $u_{a2}=0$ を満たす条件式 $U_2 = U_{fc}$ は式(18)を用いるとき次式で表される。

$$k = \sqrt{k_f^2 + \sqrt{k_f^4 + k_c^4}} = k_{fm} \quad k_f^2 = \frac{\mu \rho_m h U_2^2}{2(1 + \mu) D} \dots (19)$$

式(19)は、動特性として流速 U_2 と波数 k に関する弾性壁の安定限界特性を与えるものであり、図2(b)に特性図を示す。

3. 数 値 計 算

図1に示す計算モデルに関して、式(13)、(15)の特性方程式 $W=0$ の特性値 σ を計算するには次の方法による。ある複素数 $\sigma = \sigma_r + j\sigma_i$ を仮定し、これに対して W が最も零に近づくように σ を微小修正する。これに最小二乗法を適用すると、最適微小修正量 $\Delta\sigma_r$, $\Delta\sigma_i$ として

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_r \\ \Delta\sigma_i \end{Bmatrix} = \frac{-1}{a_{11}^2 + a_{21}^2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_r \\ W_i \end{Bmatrix}$$

$$a_{11} = \partial W_r / \partial \sigma_r \quad a_{21} = \partial W_i / \partial \sigma_r$$

が得られる。これを用いて逐次計算する。

計算に当たっては、渦層と弾性壁との連成系におい

表 1 計算条件

condition	A	B
fluid	air	water
elastic wall	steel plate	acryl plate
U_1, U_2 m/s	variable, 1(1S, t.) 1, variable(NS t.)	variable, 1(1S, t.) 1, variable(NS t.)
ρ_{mg}, ρ_g kgf/m ³	7800, 1.293	1100, 1000
E kgf/m ²	2.1×10^{10}	2.1×10^8
δ	0.002	0.040
h mm	0.0008	0.0064
s mm	2 ~ 200	2 ~ 200
k m ⁻¹	18.18	18.18
μ	0.0114	7.81
k_c m ⁻¹	1.10	3.84
U_{bc}, U_{fc} m/s	202, 204	16.4, 48.9

⁺ ρ_g : specific weight $\rho_{1g}, \rho_{2g} (\rho_1 = \rho_2)$

て、弾性壁に関する壁面流体の付加質量比 μ に着目し、 μ が小さい条件 A および μ が大きい条件 B を定める。表 1 に数値計算で用いる計算条件を示す。表 1 中、IS t. は $U_1 > U_2$ として IS 形の渦層を、NS t. は $U_1 < U_2$ として NS 形の渦層を示す。 σ は実験値の一例である。

3.1 連成系の静特性 式(15)の特性値 σ を表 1 に示す条件で計算した結果を図 3～6 に示す。図 3、4 は IS 形の場合、図 5、6 は NS 形の場合を示す。図 3～6 中 ①は渦層に対応する特性、②、③は弾性壁に対応する特性を示し、いずれの図も、渦層と弾性壁の間隔 s を 200, 20, 2 mm と変化させた場合の特性図である。

連成系の静特性として、 s の減少とともに、弾性壁は、IS 形で不安定化の傾向を示し、NS 形で座屈の限界流速が上昇して安定化することを示す。これは μ の

大きいとき顕著である。また、渦層は、IS 形で不安定化の減少を、NS 形で不安定化の増大を示す。これは IS 形で μ の小さいとき顕著である。

ここに、渦層に関する上記の特性は 2.5 節の(1)の結果とよく一致していることがわかる。これは、弾性

図 3 静特性 (IS 形, $\mu=0.0114$)

図 4 静特性 (IS 形, $\mu=7.81$)

図 5 静特性 (NS 形, $\mu=0.0114$)

図 6 静特性 (NS 形, $\mu=7.81$)

壁が固定壁として渦層に作用した結果によるものにはかならない。

また、弾性壁に関する上記の特性については次のように考えると理解ができる。 σ の減少とともに、壁面遠方の流れが壁面近傍の流れに比べて支配的になるためである。すなわち、IS形では小さい流速 U_2 から大

図 7 動特性 (IS 形, $\mu=0.0114$)

図 8 動特性 (NS 形, $\mu=0.0114$)

きい流速 U_1 によって、また、NS 形では大きい流速 U_2 から小さい流速 U_1 によって弾性壁の安定性が定まるためと考えられる。

3.2 連成系の動特性 式(13)の特性値 σ を表 1 に示す条件で計算した結果を図 7～10 に示す。図 7, 8 は μ が小さい $\mu=0.0114$ の場合、図 9, 10 は μ が大きい $\mu=7.81$ の場合を示す。図 7～10 中 (a) は渦層に対応する特性、(c)、(c) は弾性壁に対応する特性を示し、また、①～④は渦層と弾性壁との連成系の振動次数を示す。いずれの図も、渦層と弾性壁の間隔 s を 200, 20, 2 mm と変化させたときの特性図である。

連成系の動特性として、 $\mu=0.0114$ の場合、 s の減少とともに、弾性壁は、IS 形で不安定化の傾向を示

図 9 動特性 (IS 形, $\mu=7.81$)

図 10 動特性 (NS 形, $\mu=7.81$)

し、NS形でフラッタの限界流速が上昇して、安定化することを示す。これに対して渦層は、IS形、NS形にかかわらず安定化することを示す。

ここに、渦層に関するこの特性は2・5節の(3)の結果とよく一致しており、渦層の固定壁に対する安定化効果を示すものに他ならない。また、弾性壁に関するこの特性は3・1節に記した理由と同じ理由により理解される。

また、同じ連成系の動特性として、 $\mu=7.81$ の場合、 s の減少とともに、IS形、NS形にかかわらず渦層と弾性壁の連成が強まる。 $s=2\text{ mm}$ では安定領域($k=18.18\text{ m}^{-1}$ の場合、IS形では $26 < U_1 < 43\text{ m/s}$ 、NS形では $24 < U_2 < 47\text{ m/s}$ で、いずれも $u_a=0$ として不安定波の全く発生しない領域ができる)の現れることがわかる。また、この現象は波数 $k=18.18\text{ m}^{-1}$ に限られず、 $4 < k < 40\text{ m}^{-1}$ の広い波数範囲で存在すること、とくに、小さい波数では s の大きい $s=20\text{ mm}$ でも存在し得ることが、同様の数値計算でわかった⁽⁷⁾。

この現象は、図9、10の $s=200\text{ mm}$ での特性から推測されるように(IS形で44 Hzの点、NS形で47 Hzの点)、渦層に対応する不安定波の振動数と弾性壁に対応する安定波の振動数が近い条件で存在するものである。このことから、この現象を共鳴安定現象と呼ぶことができる。

なお、本章の計算から重力は、 $k > 7.23\text{ m}^{-1}$ のとき、その影響が小さく、無視できることがわかった。

4. 結果の考察

μ が小さい場合、 s の減少とともに、渦層に関して、静特性としては、IS形で不安定化の減少が見られるものの、NS形で不安定化の増大が見られ、渦層の大きい安定化は見られなかった。これに対して、動特性としては、IS形、NS形にかかわらず、安定化が見られた。これを渦の形成から考えると、静特性としては固定渦の形成は避けられないのに対して、動特性としては、自由渦の形成は抑制されると考えられる。これより、この自由渦に基づく機械の効率低下も改善されることが考えられる。また、弾性壁に関しては、静特性、動特性にかかわらず、その安定性に渦層の流速分布が大きく関与することがわかった。このことは、座屈やフラッタの抑制を考えると、流速分布の配慮が必要であることを示している。

また、 μ が大きい場合、 s の減少とともに、静特性としては、 μ が小さい場合とおおむね同じ特性が見られた。これに対して、動特性としては、IS形、NS形にか

かわりなく、連成系の安定するのが見られた。これは、渦層の弾性壁による安定化の作用が μ の大きいことにより増大したこと、また、渦層に対応する不安定波の振動数と弾性壁に対応する安定波の振動数が接近したことでその増大効果が著しく高まったためと考えられる。この場合フラッタが発生しないばかりか、自由渦が形成されないことが考えられた。これより、この自由渦に基づく機械の効率低下も改善されることが考えられる。

5. む す び

高レイノルズ数のせん断流を想定した渦層とこれに沿う弾性壁の力学系について、コリオリの力の有無に着目した静的・動的安定性の解析を行った。その結果次のことが判明した。

(1) 静特性として、渦層と弾性壁の間隔 s の減少とともに、(i) 弾性壁は、IS形渦層($U_1 > U_2$)で不安定化の傾向を示し、NS形渦層($U_1 < U_2$)で座屈限界流速が上昇して、安定化を示す。これは付加質量比 μ の大きいとき顕著である。

(ii) 渦層は、IS形で不安定化の減少を、NS形で不安定化の増大を示す。これはIS形で μ の小さいとき顕著である。

(2) 動特性として、 s の減少とともに、(i) μ の小さい場合、弾性壁は、IS形で不安定化の傾向を示し、NS形でフラッタ限界流速が上昇して、安定化を示す。これに対して、渦層はIS形、NS形にかかわらず安定化を示す。

(ii) μ の大きい場合、IS形、NS形にかかわらず、渦層に対応する不安定波の振動数と弾性壁に対応する安定波の振動数が近い条件のとき、渦層と弾性壁の連成系が安定する。

これにより、流体が関連した振動や変形とくに流れに沿った弾性壁の不安定現象を統一的に把握できる見通しを得た。

文 献

- (1) Paidoussis, M. P., *J. Sound Vib.*, **65**-3(1979), 391.
- (2) Carpenter, P. W. and Garrad, A. D., *J. Fluid Mech.*, **170** (1986), 199.
- (3) Dowell, E. H., *AIAA J.*, **9**-5(1971), 834.
- (4) Kornecki, A., *Solid Mech. Arch.*, **3**(1978), 381.
- (5) Batchelor, G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, (1967), 511, Camb. Univ. Press.
- (6) Rotunno, R., *J. Fluid Mech.*, **87**(1978), 761.
- (7) 瀬川, 本論文集313ページ.