高レイノルズ数乱流場の統計的性質*
(第3報, 自己相似性と普遍平衡理論について)蒔田 秀治*¹, 飯田 明由*²Statistical Properties of High-Reynolds Number Turbulent Flow Fields
(3rd Report, The Self-similarity and Universal Equilibrium Theory)

Hideharu MAKITA and Akiyoshi IIDA

A simple model for turbulence eddy hierarchy was proposed to describe the Kolomogorov's local similarity theory in connection with the characteristic time and eddy scales of turbulence. In weakly anisotropic turbulence, the energy fraction of locally isotropic eddies to the whole turbulence energy increased downstream and exceeded 60 % of the total energy at $X/M=50$ for $Re_\lambda=460$. Most of the energy dissipation occurred in the quasi-equilibrium wave number range. The strong turbulence became quasi-self-similar and the turbulence Reynolds numbers were kept constant for $X/M>65$, where the time scale of the decay of turbulence energy became greater than 4~8 times as large as the characteristic time scale of the energy-containing eddy at the initial stage of the decay. The strong turbulence was confirmed to be capable of offering an ideal test field for practical large-scale turbulence phenomena.

Key Words: Turbulent Flow, Flow Measurement, Fluid Dynamics, Turbulent Eddy, Energy Spectrum, Local Similarity Hypothesis, Wind Tunnel.

1. 緒 言

コンピュータの急速な発達, N - S 方程式の直接数値シミュレーションによる中程度の乱流レイノルズ数の乱流場の解析⁽¹⁾⁽²⁾を可能とし, 従来はモデル化することなしには得られなかった乱流場の情報が得られるようになった。このような技術的進歩により N - S 方程式の解が直接求められることが, 乱流の理解の一助となっていることは事実である。しかし, 乱流場の解を求めるということが, “乱流”そのものを本質的に理解することではなく, このようにして得られたデータから簡単な物理的モデルや仮説をたてるという乱流解析の正統的な方法により, 乱流についての物理的な概念を確立することはさらに重要である。

著者らは実験的に乱流レイノルズ数の大きな, 準等方性乱流場の特性を調べ^{(3)~(6)}, その結果をもとにして, 高乱流レイノルズ数乱流場の統計的性質に関する解析⁽⁷⁾⁽⁸⁾を行ってきた。本研究は, 既報において示した三次元エネルギースペクトル, エネルギー散逸スペク

トルの測定結果および準理論的に導いた局所等方的な渦スケールの推定法を用いてエネルギースペクトルの自己相似性と乱流エネルギーの減衰に関する考察を行い, 乱流渦 (Eddy) 構造のヒエラルキー的性質を簡単なモデルを用いて表すことを試みたものである。

主 な 記 号

C : 散逸 ε に関する定数
 $E(k)$: 三次元エネルギースペクトル
 k : 波数
 l_0 : エネルギーを含む渦のスケール
 l_G : 局所等方的な渦スケール
 l_b : 粘性散逸が最大となる渦スケール
 $S(k)$: 散逸スペクトル
 T_G : 局所等方的な渦の特性時間
 T_L : 乱れの寿命時間
 T_0 : エネルギーを含む渦の特性時間
 その他, 特にことわりのない記号については, 既報⁽⁷⁾⁽⁸⁾を参照されたい。

2. 実験装置および乱流場の性質

本研究では, 著者らによる大規模乱流場の測定結果とその統計的性質^{(3)~(8)}から, 乱流場の構造を簡単な物

* 平成元年 10 月 15 日 第 67 期全国大会講演会において講演, 原稿受付 平成元年 3 月 29 日。

*¹ 正員, 豊橋技術科学大学 (〒440 豊橋市天伯町字雲雀ヶ丘 1-1)。

*² 准員, 豊橋技術科学大学大学院 (現在 (株)日立製作所機械研究所)。

理的モデルを用いて表すことを試みる。本乱流場は10%以上の乱れ強度とスケールの大きな渦を持つ、一様準等方的な乱流場である。平均流速 $U_c = 3 \sim 7$ m/s において、特性速度 $u_1 = (q^2/3)^{0.5}$ とテイラーのマイクロスケール λ をもとにした乱流レイノルズ数 Re_λ は約200~500に達し、エネルギースペクトル中には慣性小領域が明確に存在する。

計測に使用したXプローブの検査体積 ($0.8 \times 0.8 \times 0.2$ mm³) は乱流場のKolmogorovスケール η と同程度であり高周波数領域の解析に誤差を含む可能性があるが、高周波数領域のスペクトル分布の計測結果は理論解析や数値計算によって得られたものとよく一致することが確認されており⁽⁸⁾、スペクトル分布に関するデータは、本論文における乱流場の渦構造に関する推論を行ううえでの十分な精度を持つものである。

3. 普遍平衡理論について

3.1 乱流場の渦のスケールについて 図1に本乱流場の三次元エネルギースペクトル $E(k\eta)$ 、エネルギー散逸スペクトル $S(k\eta)$ の一例 ($Re_\lambda \sim 380$) を示す。既報中で述べた諸渦スケールをもとに乱流場をモデル化すると、エネルギースペクトル中には、乱れの発生に関係しエネルギーの大部分を含む渦 l_0 、等方的な最大渦 l_0 や粘性散逸を代表する渦スケール λ , η などが存在する。また、慣性小領域と粘性散逸領域を含む普遍平衡領域は(オーダ的に)、これらのスケールにより定義される。乱流エネルギーの大部分は $k\eta \sim \eta/l_0$ を中心とする低波数領域に集中し、エネルギースペクトルはそこにピークを持つ。一方、エネルギー散逸スペクトルは $k\eta = \eta/l_0 \sim 0.15$ 程度の高波数領域にピー

クを持ち、この波数は慣性小領域の最大波数とも一致している。粘性の影響は波数 $k\eta > \eta/l_0$ において顕著となり、乱流エネルギーは最大渦 l_0 に比べ十分に小さな渦 $l_0 = 6.7\eta$ 程度の大きさ以下のスケールを持った渦において消散される。したがって、 $k < 1/l_0$ の波数領域では、粘性によるエネルギー散逸は無視できる程度であり、輸送される単位時間当たりの乱流エネルギーは、高波数領域において粘性によって熱エネルギーに変換される単位時間当たりのエネルギー量、すなわち、散逸 ε に等しくなる。 $k\eta > 0.15$ の領域では、乱流エネルギーが熱として消散されるため単位時間当たりに伝達されるエネルギー量は小さくなり、波数空間におけるエネルギー伝達 $W(k)$ は、図1の実線のようになりと予想される⁽⁹⁾。

既報⁽⁷⁾において乱れの寿命時間、渦の特性時間、乱流渦のヒエラルキー的構造 ($l_i = 2^{-i} l_0$: i は渦の世代) および自己相似性に対する考察をもとに乱流レイノルズ数と乱流場を代表する渦スケールの大きさの関係を示した。表1に本乱流場の諸統計量を示す。表1中の渦スケールをもとに、 $Re_\lambda \sim 380$ 程度の乱流場の渦構造を模式的に表すと図2のようになり、複雑で物理的なイメージをとらえにくい乱流場を簡単なモデルで表せる。ただし、図2中では渦の相対的な大きさを対数で示した。乱流発生時の特徴を保持した非等方的な大規模渦(点線)を通して(主流から)エネルギーが供給されているエネルギーを含む渦 l_0 (第零世代)を母体とし、Kolmogorovスケール η を最小渦とする(スケール l_0 の渦からエネルギーの供給を受ける)約10世代程度の渦の集合体と考えられる。カスケードモデルでは同世代の渦はエネルギー密度などが(統計的に)

エネルギー伝達関数 $W(k\eta) = W(k)/\varepsilon$ は推定値
L. E. P. C (Largest eddies of permanent character)

図1 高レイノルズ数乱流場のエネルギースペクトルと散逸スペクトル ($Re_\lambda = 380$)

(実線は等方的な渦、破線と一点鎖線は非等方的な渦を表す)

図2 乱流場の渦スケールの模式図 ($Re_\lambda \sim 380$)

表 1 乱流場の諸統計量

U_c (m/s)	Re_λ	q^2 (m ² /s ²)	ϵ (m ² /s ³)	C	η / l_0	η / l_0	η / λ	η / l_0	X/M
					$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-3}$		
1	88.3	0.022	0.007	0.805	6.246	48.72	54.08	0.15	50
3	254.7	0.466	0.371	0.492	2.013	7.51	31.84	0.15	50
5	420.5	4.741	4.544	0.469	0.967	3.36	24.78	0.15	10
	417.2	3.304	6.370	0.481	1.015	3.67	24.89	0.15	20
	379.5	1.440	1.601	0.459	1.293	4.36	26.12	0.15	50
	329.9	0.628	0.404	0.419	1.657	4.51	27.99	0.15	100
7	460.3	3.148	5.205	0.497	0.847	3.22	23.82	0.15	50

等しく、各渦のエネルギーは、波数空間において隣合せの渦ほど活発に、統計的には大きな渦から小さな渦へと伝達されていく。その過程において個々の渦の特徴、例えば大規模渦の異方性は、次第に薄れていき、小さな渦は統計的に普遍的な構造（局所等方かつ自己相似的な渦構造）を持つに至る。第1報⁽⁷⁾で示したように、 $Re_\lambda=200\sim 500$ 程度の乱流場で局所等方的とみなせるのは l_0 から2～3世代後の渦スケール l_c 以下の渦である。また本乱流場では自己保存的な渦スケールは l_c とほぼ同程度であり、 l_c から散逸スペクトルが最大となるスケール l_d までがほぼ慣性小領域に相当する。 $Re_\lambda\sim 380$ 程度の乱流場では、約5世代の領域にわたり慣性小領域が存在する。 l_d より小さな渦のエネルギーは粘性により急速に消散する。図2の模式的に表された渦構造により、大規模な乱流場がいくつかのスケールを持った渦の集合であり、固有のエネルギーや特徴的なスケールを代表的尺度を持つヒエラルキーの構造をなすことを視覚的に表現することができる。

3.2 乱流場の自己相似機能 波数 k における乱流エネルギー、エネルギー散逸が全乱流エネルギー q^2 および全散逸 ϵ に占める割合 ϕ, ψ は次式で表せる。

$$\phi = \int_0^{k\eta} E(k\eta) dk\eta / \int_0^\infty E(k\eta) dk\eta \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\psi = \int_{k\eta}^\infty (k\eta)^2 E(k\eta) dk\eta / \int_0^\infty (k\eta)^2 E(k\eta) dk\eta \quad \dots\dots\dots (2)$$

前報⁽⁸⁾に示した三次元エネルギースペクトルおよび散逸スペクトルの測定結果から求めた、 $X/M=50$ における ϕ, ψ の波数依存性を図3に示す。等方性乱流場のエネルギースペクトルを全波数領域にわたり計算することが可能な、Driscollら⁽¹⁰⁾によるEVK (Extended Von Kármán) モデルによる計算結果およびUberoi⁽¹¹⁾が求めた実験結果 ($Re_\lambda\sim 75$, 格子乱流)を合せて示す。EVKモデルによる ψ の計算結果と本実験結果は主流流速 $U_c(Re_\lambda)$ にかかわらずほぼ一致し、Uberoiによる実験結果ともよく一致するため、 ϕ のEVKによる計算結果は1本の曲線で表した。

実験結果、 ϕ : Δ : $U_c=1$ m/s, $\blacksquare$: 3 m/s, $\bullet$: 5 m/s, $\blacklozenge$: 7 m/s, $\blacktriangledown$: Uberoi⁽¹¹⁾
 ψ : $\triangle$: $U_c=1$ m/s, $\square$: 3 m/s, $\circ$: 5 m/s, $\diamond$: 7 m/s, $\triangledown$: Uberoi⁽¹¹⁾
 EVKモデル ϕ : $---$: $U_c=1$ m/s, $---$: 3 m/s, $---$: 5 m/s, $---$: 7 m/s.
 ψ : $---$: 流速の違いによる影響は無視できる程度である

図3 乱流エネルギー、エネルギー散逸の波数依存性

等方性乱流では、 l_0 より大きな渦にはエネルギーはほとんど存在しないと考える。本乱流場は完全には等方ではないため、 l_0 より大きなスケールの非等方的な渦に全乱流エネルギーの20%程度のエネルギーが存在する。これは、縦相関と横相関から求めた積分特性距離の比をもとに、 l_0 の値を近似的に求めた⁽⁷⁾ことによる誤差とも考えられるが、本乱流場のような弱い異方性を持った準等方性乱流場において、全乱流エネルギーの80%を含む渦のスケールを l_0 と定義したことはオーダ的には十分妥当なものと考えている。

著者らは局所等方的な最大渦スケール l_c を、

$$l_c = 0.0107 (Re_\lambda / C)^{3/2} \cdot \eta \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表すことができることを示した⁽⁷⁾。ここで、 C は散逸 ϵ に関する定数 ($C = \epsilon l_0 (q^2/2)^{-3/2}$) である。スペクトル解析の結果、本乱流場の局所等方的な渦スケール l_c は自己相似的であり、慣性小領域の最大渦スケール

とほぼ同程度の大きさであった。局所等方領域と普遍平衡領域がほぼ一致することから、 l_c を用いて平衡領域内の ϕ, ψ を求めることができる。表2に示すように、平衡領域内 ($k > 1/l_c$) の乱流エネルギー q_c^2 は全乱流エネルギーの30~60%、散逸 ϵ_c には、ほとんど全エネルギー散逸が存在する。エネルギースペクトルには異方性の影響が見られたのに対し、エネルギー散逸スペクトルは等方かつ自己相似的とみなせる普遍平衡領域 (慣性小領域と粘性散逸領域) に集中している。したがって、本乱流場の乱流エネルギーの減衰率や λ の変化率などの減衰に関する統計量を等方性を仮定した理論によって近似したこと⁽⁴⁾⁽⁵⁾や、前報での λ の自己保存性に関する考察が妥当であったことがわかる。また、エネルギースペクトル分布が慣性小領域から外れ始め、散逸スペクトルがピークに達する無次元波数 $\eta/l_b \sim 0.15$ 以上に全散逸量の約80%以上が含まれていること、局所等方の概念が適用できるような大きな Re_λ を持った乱流場においては l_b の局所等方性が常に保証される⁽⁸⁾ことや、 l_b/η が乱流レイノルズ数などの条件によらず普遍であることなどは、 l_b が乱流エネルギーを代表する重要な渦スケールであるのと同じように、 l_b が散逸を代表する重要な渦スケールの一つであることを示している (前報で l_b が必ずしも慣性小領域の最小渦であるとはいえないことも示したが、近似的には l_b を慣性小領域の最小渦とみなしうる)。

Uberoi の格子乱流場 ($Re_\lambda \sim 75$) に比べ、本乱流場の乱流レイノルズ数 ($U_c \geq 3 \text{ m/s}$, $Re_\lambda = 200 \sim 500$) は十分大きく、その結果、エネルギーを含む渦の領域と散逸渦の領域 ($\phi = 80\% \sim \psi = 80\%$) が明確に分離されていることから、乱流エネルギーの減衰に関しては l_c より大きな渦に存在する非等方成分の寄与は小さいと考えられる。本乱流場の乱流エネルギーの減衰率⁽⁴⁾ $n = 1.2 \sim 1.4$ が等方性乱流場の理論⁽¹²⁾や実験結果⁽¹¹⁾⁽¹³⁾とほぼ一致すること⁽⁴⁾や、Batchelor の示した乱流レイノルズ数が時間の変化に対して一定、すなわち、乱れ強度と渦スケールの積が常に一定であり、乱流場の諸統計量が初期値に対して相似である自己相似的な乱流場の乱流エネルギーの減衰 $u^{-2} \sim (t - t_0)$ に近いこと⁽¹⁴⁾は、流れに強制的なかく乱を与えることにより実

現した本乱流場が、格子乱流場と同程度の準平衡状態にあるとしてよいことを示している。

一方、Kida と Murakami⁽¹⁾ は N - S 方程式の直接数値計算によりエネルギーを含む渦が線スペクトルとして与えられる場合、乱流エネルギーは指数関数的に減衰することを示した。また、蒔田ら⁽¹⁵⁾は慣性小領域を人為的に破壊した乱流場の乱流エネルギーの減衰は時間のべき乗形ではあるが、 n の値が減衰の初期では極めて小さい (0.1 程度) ことを示した。実際の工学的な乱流場の多くは、低波数領域に特異な渦構造を持つ乱流場や慣性小領域が変形された乱流場を形成しており、それが自己相似的な乱流場と明らかに異なる乱流エネルギーの減衰を示すということは、そのような乱流場における乱流エネルギーの減衰を見積もるうえで、低波数領域でのエネルギー成分の等方性からの隔たりの程度や最大渦と最小渦のスケールの比がどの程度かなどを考慮する必要があることを示している。異方性の小さい準等方な乱流場のスケールに関しては、本研究によって得られた近似式 [例えば、式(3)や第1報⁽⁷⁾の各式] を用いることにより、比較的簡単に実験的な裏付けのある値を得ることができ、渦スケールの推定や、数値計算や乱流理論の検証に利用できる。これらの式は異方性の大きい場合に関しては精度は欠けるものの、オーダの推定には役立つので、工学的な利用価値は大きいと考えられる。

乱流エネルギーの減衰は低波数領域のスペクトル分布に依存し⁽¹²⁾、それから低波数領域の三次元エネルギースペクトルを推定できる。Lesieur と Schertzer⁽¹⁶⁾によれば、等方性乱流場の場合、低波数領域のスペクトル分布は、波数 k の a 乗に比例する。ここで、 a は減衰率 n に依存する定数であり、

$$a = (2 - 3n)/(n - 2) \dots\dots\dots (4)$$

と表される。本乱流場の場合、 $n = 1.2 \sim 1.4$ より $a = 2 \sim 3.7$ である。しかし、前報に示した三次元エネルギースペクトルでは、 $X/M = 40 \sim 100$ の範囲において $a = 1 \sim 2$ である。前報の三次元エネルギースペクトルは等方性の仮定を用いて求めたものであるが、等方性の仮定を用いて全波数領域にわたり、正確に三次元エネルギースペクトルを求めるためには、例えば、Comte-Bellot と Corrsin⁽¹³⁾⁽¹⁷⁾が行ったように格子下流に縮流グクトを設けることなどにより、低波数領域における異方性を極力押さえたうえで、さらに厳密な測定を行う必要がある。したがって、本実験によって得られているデータを用いて、低波数領域におけるスペクトル分布について言及することは厳密性を欠くことは確かであるが、減衰率 n と低波数領域のスペクトル分布

表2 自己相似領域内の乱流エネルギー、エネルギー散逸の割合 (q^2, ϵ を1とする, $X/M = 50$)

$U_c (\text{m/s})$	1	3	5	7
ϕ_c	0.50	0.56	0.58	0.60
ψ_c	0.98	1.00	1.00	1.00

の間には、式(4)の関係が近似的に成立するのではないかと予測している。乱流発生装置から十分下流には、近似的に乱流レイノルズ数が一定値に近づく領域が存在し⁽⁶⁾、そのような乱流場では漸次 $n=1$ に近づくと考えられ、式(4)より $a \sim 1$ となる。完全に自己相似的な乱流場の a の理論値と、本実験による a の測定値が近いことは、本乱流場のスペクトル中に全乱流エネルギーの半分以上のエネルギーを保有する自己相似的な波数領域が存在することによると考えられる。

図4に ϕ, ψ の下流方向変化を示す。 ϕ は下流にいくにつれ等方化するため、EVKモデルとよい一致を示すようになる。一方、 ψ は図3と同様、測定部上流 ($X/M=10$) からほぼ自己相似領域内のみに存在し、下流方向にほとんど変化しない。前報に示した規格化された一次元エネルギースペクトルでは、波数空間において局所等方領域および自己相似領域の広さは下流方向にほとんど変化しない。すなわち、平衡領域内の規格化されたエネルギー量はほぼ一定である。一方、低波数領域の異方性成分は等方化の過程に伴い急速に減衰するため、相対的に全乱流エネルギーに対する平

表3 自己相似領域内の乱流エネルギー、エネルギー散逸の割合の下流方向変化 ($U_c=5$ m/s)

X/M	10	20	50	100
ϕ_c	0.42	0.44	0.58	0.58
ψ_c	1.00	1.00	1.00	1.00

実験結果、 ϕ : ▲: $X/M=10$, ■: 20, ●: 50, ◆: 100
 ψ : △: $X/M=10$, □: 20, ◻: 50, ◊: 100
 EVKモデル ϕ : —: $X/M=10$, ---: 20,
 ---: 50, - - - : 100
 ψ : --下流方向の変化は無視できる程度である

図4 乱流エネルギー、エネルギー散逸の波数依存性 ($U_c=5$ m/s)

衡領域内のエネルギーの寄与が大きくなる。表3に図4から求めた平衡領域内の ϕ_c, ψ_c の下流方向変化を示す。下流にいくにつれ ϕ_c が増大し、平衡領域の寄与が大きくなり、乱流場が次第に平衡状態に近づいていくことがわかる。本乱流場のように弱い異方性を持つ場合、規格化したスペクトル分布の低波数領域には異方性成分間におけるエネルギー交換による下流方向(時間)変化が見られるが、乱流レイノルズ数が十分に大きい発達した慣性小領域を持つ乱流場では、非等方成分が乱流場のヒエラルキー的構造全体に及ぼす影響は小さく、減衰などに関して等方性の仮定を適用することは妥当であることがわかる。

3.3 自己相似的な乱流場にいたる過程 風洞を用いて大気拡散実験や工学的基礎実験を行う際、可能な限り単純な構造を持つ乱流場が要求される。乱流レイノルズ数が一定であり、自己相似的な平衡状態に達した乱流場もその一つである。そのような乱流場の存在領域を推定することは風洞実験を行ううえでの基本的な要求である。このような理由から、“乱流場がどのような過程を経て自己相似的な状態に達するか”を明らかにすることは興味ある問題である。

Corrsin⁽¹⁸⁾は、流れ場の一様性が満足され格子の影響が無視できるようになるための条件を、

$(d\phi/dX)$ ▲: $U_c=1$ m/s, ■: 3, ●: 5, ◆: 7.
 ---: Corrsin⁽¹⁸⁾
 $(l_0/\lambda)(d\lambda/dX)$ △: $U_c=1$ m/s, □: 3, ◻: 5, ◊: 7.
 ---: Corrsin⁽¹⁸⁾
 $(l_0/u^2)(du^2/dX)$ △: $U_c=1$ m/s, □: 3, ◻: 5, ◊: 7.
 ---: Corrsin⁽¹⁸⁾

図5 $(d\phi/dX), (l_0/\lambda)(d\lambda/dX), (l_0/u^2)(du^2/dX)$ の下流方向変化 (Corrsinによる乱流場の平衡領域の推定法)

$$\left. \begin{aligned} dl_0/dX &\ll 1 \\ (l_0/\lambda)(d\lambda/dX) &\ll 1 \\ (l_0/u_1^2)(du_1^2/dX) &\ll 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

とした。Corrsin は測定上の問題から l_0 ではなく、縦方向積分特性距離 L_{ux} を用いたが、 $l_0 \sim L_{ux}$ であること、および本質的には l_0 を用いるべきであることから、本論文では l_0 を用いた。図5に示すように、本乱流場の結果は Corrsin の実験に比べ各パラメータはやや大きい、 $X/M > 40$ では式(5)を満足していると思われる。下流域で一定に近づく傾向も Corrsin の場合と同様である。しかし、式(5)において“1より十分に小さい”とみなす判断は主観的なものであり、一般性にかける。

非等方、非一様な渦成分を作りだす原因は、乱れの発生原因そのものにあると考えられる。例えば、ダクトの径、表面粗度、乱流格子、乱流発生装置などの大きさや特徴によってエネルギーを含む渦スケールは決定され、乱流場によって全く異なる性質を持つ⁽¹⁴⁾。一方、小さな渦はカスケードプロセスを通じて等方化するため、装置の種類や乱れの発生の初期条件とほぼ無関係な普遍的な渦構造を有する。乱流中のほとんどの渦がほぼ等方的かつ自己相似的であり、乱流場が全体として準平衡状態（乱流レイノルズ数が下流方向にほぼ一定）になるためには、乱れの発生原因によって特徴づけられた“渦の個性”がカスケードプロセスを通じて失われなければならない。Townsend⁽⁹⁾⁽¹⁹⁾は自由せん断乱流場を比較的単純で、個々の自由せん断乱流に特有の構造を持った“大きな渦(Coherent motion)”と普遍的な構造の“乱流流体(main turbulent motion)”と呼ばれる小さな渦に分けて自由せん断乱流場の構造について調べた。このような乱流渦の二重構造は、自由境界面を持たない管内流中においても存在する⁽²⁰⁾ことが知られており、準等方性乱流に関しても、乱れの発生に起因した“個性を持った大規模渦”と“普遍的な乱流流体”に分けて考えることが可能であると思われる。したがって、どの程度のスケールの渦まで“個性”を失えば乱流場全体が準平衡状態とみなせるかについて考察することにより、下流方向に乱流場が自己相似とみなせるようになる領域（以後、波数空間における自己相似領域と区別するため、自己相似区域と呼ぶ）を決定することができるとと思われる。

既報に示したように、乱れの寿命 T_L とエネルギーを含む渦の特性時間 T_0 は次のように表される。

$$T_L = u_1^2 / (-du_1^2/dt) \dots\dots\dots (6)$$

$$T_0 = l_0 / u_1 \dots\dots\dots (7)$$

格子乱流場や本乱流場では、仮想原点を t_0 とすれば、

$$u_1^2 \sim (t - t_0)^{-n}, \quad l_0 \sim (t - t_0)^m \dots\dots\dots (8)$$

と表せる⁽⁵⁾。座標系を $t' = t - t_0$ に変換すると、

$$T_L \sim t' \dots\dots\dots (9)$$

$$T_0 \sim t'^p; \quad p = n/2 + m \dots\dots\dots (10)$$

となり、 T_L は時間に比例する。 T_0 は $p=1$ のとき、時間に比例する。本乱流場では $p < 1$ であり⁽⁷⁾、厳密には T_0 は時間に比例しないが、 T_L と T_0 は散逸 ϵ の定義⁽¹²⁾より、第1報⁽⁷⁾に示したように、

$$T_L = \{(2/3)^{1/2}/C\} \cdot T_0 \dots\dots\dots (11)$$

と表される。 $Re_\epsilon > 200$ において $C \sim$ 一定 (表1, $C = 0.4 \sim 0.5$) とみなせること⁽⁷⁾から、 T_0 も近似的には時間に比例する。ただし、 C は本来、乱流レイノルズ数 Re_ϵ に依存する定数であり、本論文における解析では、 C の値はすべて局所的な測定値を用いた。エネルギーを含む渦 l_0 と特性時間が乱れの寿命時間の $1/b$ 倍の渦 l_b のスケールの比は、上式⁽⁷⁾より、

$$l_0/l_b \sim (T_0/T_b)^{3/2} \sim (\sqrt{3}/2Cb)^{3/2} \dots\dots\dots (12)$$

で与えられる。乱れの寿命時間の約 $1/4$ の特性時間を持った渦は統計的に安定であり⁽⁷⁾、それに基づき本乱流場の乱流レイノルズ数の範囲では、局所等方的な渦スケール l_c は l_0 の約 $1/4$ と考えられる。また、三次元エネルギースペクトルの測定結果(第2報⁽⁸⁾, 図2)から慣性小領域が始まり平衡状態にあるとみなせる渦スケール l_b は l_c と同程度かその半分程度のスケールである。したがって、自己相似的な渦スケール l_b は l_0 の約 $1/4 \sim 1/8$ 程度であり、式(12)より、 $b = 4 \sim 6.5$ となる。すなわち、装置直後のエネルギーを含む渦の特性時間を T_{01} とすれば、乱れの寿命時間 T_L が T_{01} の約

(l_b は乱れの寿命時間に相当する特性時間を持った渦)

図6 エネルギースペクトルと局所等方領域の関係 (模式図)

4~6.5 倍以上になったとき装置の影響を直接持った渦は自己相似的な状態に達すると推定される。

図6に模式的に示すように、時間 t' を下流方向距離に置き替えて考えれば、 $X/M=0$ におけるエネルギーを含む渦スケールを l_{01} とすると、 l_{01} は $X/M \sim 0$ において非等方的であるが、 $X/M \sim \xi$ に達すると、局所等方的渦スケール l_c はスケール $l_{01}(l_{01} \sim l_c)$ にまで広がる。このとき、 l_{01} より大きな渦はまだ非等方的であるが、装置直下のエネルギーを含む渦 l_{01} (非等方性を決定づけ、“渦の個性”を与える) が等方化したことにより、非等方領域におけるエネルギーの全乱流場に対する寄与は、それほど大きくないと予想される。図7に T_L , T_0 および T_L/T_0 の下流方向距離 $X/M(\sim t)$ に対する変化を示す。ただし、 T_{01} は乱流発生装置直後から乱流場が十分に発達し、式(9)、(10)が成立するものとし、さらに $k \sim 1$ として推定した。蒔田⁽⁶⁾が示したように、乱流レイノルズ数がほぼ一定とみなすことができるようになる位置 $X/M \sim \xi$ における T_L/T_{01} は 6.7~8 程度であり(表4)、先に求めた、 $b=4 \sim 6.5$ と比較的良好一致を示している。著者やの用いたモデルにより、自己相似区域の推定が可能であると考えられる。 $b=4 \sim 8$ とすると、自己相似的な渦のスケールは局所等方的な渦スケール $l_c(b=4)$ と同程度か、その1/3程度の大きさと考えられる(本研究では渦スケールが1/2になるごとに渦の世代が変化するヒエラルキ

一的構造を仮定しており、 $l_b = l_c/3 \sim l_c$ は、ほぼ同世代とみなせる)。したがって、慣性小領域の広さは、

$$k\eta = \eta/l_b \sim \eta/l_0 \quad \cdots \cdots (13)$$

となる。 $Re_\lambda \sim 460$ の場合(表5)、 $l_b = l_c/3 \sim l_c$ とすれば、式(3)より、 $\eta/l_b = 0.0094 \sim 0.0033$ である。 $\eta/l_0 = 0.15$ より、慣性小領域は l_b の約16~46倍の大きさの渦から始まることになる。これは式(13)によれば少なくとも1けたをこえる慣性小領域が明確に存在することになる。この値はスペクトルが波数の $-5/3$ 乗に比例するとみなして求めた慣性小領域の広さ(一次元スペクトルの場合2けた強)⁽⁸⁾より狭いが、 $l_b = l_c$ としたときは、三次元スペクトルが波数の $-5/3$ 乗に比例するとみなして求めた場合(2けた弱)⁽⁸⁾に近く、 $l_b = l_c/3$ としたときは、散逸スペクトルから求めた慣性小領域の広さ(1けた強)⁽⁸⁾とほぼ一致し、慣性小領域の最大渦 l_b を $l_c/3 \sim l_c$ 程度とみなすことができることがわかる。ただし、装置の影響を直接持った渦が統計的に安定になっても、乱流中に存在するさらに大きな渦は非等方的であり、乱流場全体を自己相似的とみなすには、これらの渦の保有するエネルギーの全乱流エネルギーへの寄与率が無視できる程度になる必要がある。式(12)に基づく慣性小領域の広さの推定法は、低波数領域のエネルギーの寄与を無視していることや、 T_{01} , T_0 の正確な決定が困難であることなどによる誤差を含む可能性もあるが、スペクトルが波数の $-5/3$ 乗に比例しているように見える領域を慣性小領域とする従来の方法に比べ、より客観的な決定法であると思われる。特に、一次元スペクトルの場合、異方性の影響により、特定方向のスペクトルのみ波数の $-5/3$ 乗に

図7 乱れの寿命時間 T_L 、エネルギーを含む渦の特性時間 T_0 および T_L/T_0 の下流方向変化
 T_L : $\triangle$: $U_c=1$ m/s, $\square$: 3 m/s, $\circ$: 5 m/s, $\diamond$: 7 m/s.
 T_0 : $\blacktriangle$: $U_c=1$ m/s, $\blacksquare$: 3 m/s, $\bullet$: 5 m/s, $\blacklozenge$: 7 m/s.
 T_L/T_0 : $\triangle$: $U_c=1$ m/s, $\square$: 3 m/s, $\circ$: 5 m/s, $\diamond$: 7 m/s.

図7 乱れの寿命時間 T_L 、エネルギーを含む渦の特性時間 T_0 および T_L/T_0 の下流方向変化

表4 自己保存領域と T_L/T_{01} の関係

U_c (m/s)	1	3	5	7
$X/M = \xi$	35	51	62	71
T_{01}	0.200	0.092	0.070	0.052
T_L/T_{01}	6.638	8.066	7.520	7.948

表5 慣性小領域の最小波数と最大波数

Re_λ	b	η/l_0	η/l_v	l_b/l_v	$\log(l_b/l_0)$
$\times 10^{-3}$					
88.3	4.00	48.72	0.15	3.060	0.486
	6.68	105.14	0.15	1.427	0.154
254.7	4.00	7.51	0.15	19.974	1.300
	8.07	21.52	0.15	6.970	0.843
329.9	4.00	4.87	0.15	30.788	1.488
	7.52	12.55	0.15	11.949	1.077
379.5	4.00	4.35	0.15	34.530	1.538
	7.52	11.21	0.15	13.377	1.126
460.3	4.00	3.20	0.15	46.847	1.671
	7.95	8.97	0.15	16.733	1.223

比例する場合もありうるため、一次元スペクトルが $5/3$ 乗則に従う領域を慣性小領域とみなすのは、オーダ的な推定であることに注意しなくてはならない。

エネルギーを含む渦は時間の m 乗に比例して大きくなる。十分下流では時間変化を下流方向の位置の変化に置き換え、経験的に次式のように表される。

$$l_0 \sim l_{01}(X/M + X_0/M)^m \dots\dots\dots (14)$$

ただし、数学的には厳密ではないが、 $(X/M + X_0/M) \sim 0$ 付近において、 l_0 の初期値 l_{01} が有限になるよう、 $(X/M + X_0/M) < 1$ では $l_0 = l_{01}$ とする。自己相似区域が成立するには、 $l_{01} = l_0$ でなくてはならないから、自己相似区域 $X/M \sim \zeta$ では、式(14)より、 $l_0 \sim l_{01} \zeta^m / \delta$, $\delta = l_0 / l_0$, $X_0/M \sim 0$ より、

$$\zeta \sim \delta^{1/m} \quad 4 < \delta < 12 \dots\dots\dots (15)$$

を満たさなければならない。本乱流場では、 $U_c = 1, 3, 5, 7$ m/s に対し、 $m = 0.32, 0.232, 0.19, 0.13$ である⁽⁷⁾。式(15)より、 $U_c = 1$ m/s, $b = 4 \sim 5$ の場合を除き、自己相似区域は X/M が数百以上の区域にのみ存在し、本実験における測定区域内($X/M \leq 120$)に自己相似区域は存在しないことになる。仮に、等方性乱流場における m の理論値 $0.4^{(12)}$ を用いれば、 $Re_\lambda = 200 \sim 500$ の場合、自己相似区域は $X/M = 32 \sim 181$ と推定され、本実験によって得られた相似区域 $X/M = 35 \sim 65^{(6)}$ にかなり近い値になる。一般的な格子乱流場の場合、 δ ($= 5 \sim 50$ 程度)が大きくなり、自己相似区域の存在条件はさらに厳しくなる。例えば、格子乱流場における平均的な値である $\delta \sim 14$ ($C = 0.8, b = 6$), $m = 0.4$ の場合、自己相似区域は $X/M > 700$ にしか存在しない。したがって、格子寸法を数 cm としても、測定洞の長さ、10 m 以上必要である。通常の格子乱流場の場合、 $X/M = 700$ 以上下流では、乱れ強度は極めて小さくなり、高精度の計測を行うことは難しい。このことは一般的な格子乱流実験においては、乱流場の発生原因に依存しない乱流場を得ることが極めて困難であることを示している。ただし、本実験の場合、風洞の大きさに比べて大きな渦が存在する⁽⁵⁾ため、風洞壁によって渦の成長が押えられ、渦スケールの成長率 m が理論に比べ小さく、 C の測定値が完全に一定にならないなど、理論との差が生じており、式(15)の厳密な検証は難しい。また、 X_0/M , m の正確な測定も困難であり、式(15)の適用範囲や $(X/M + X_0/M) \sim 0$ 付近における仮定が厳密に成立するかは、今のところ数学的に証明することができないため、式(15)は自己相似区域を推定するための経験則以上のものではなく、自己相似区域が存在するための条件の目安ではあるが、必要条件とはいえない。自己相似区域の存在を仮定することは

乱流場の解析の基本的な手段であり、実験的にはスペクトル分布や諸統計量に関して自己相似を近似的に仮定できる場が得られていることから、本研究で提言されたように $T_L/T_{01} = 4 \sim 8$ を満たせば、近似的に自己相似区域が存在すると考えてよいと思われる。この推定法は簡単であり、Corssinの方法に比べ客観的であることから、工学的利用価値が高く、乱流場の解析や風洞実験を行ううえでの有効な手法であると思われる。

4. 結 論

大規模乱流場のエネルギースペクトルの自己相似性について以下の知見を得た。

- (1) 本乱流場の自己相似区域のエネルギーを含む渦、および局所等方的な渦は全乱流エネルギーの約80%、30~60%を含み、エネルギー散逸の約80%以上は散逸スペクトルが最大となる波数以降において行われる。
 - (2) 広い波数領域にわたって慣性小領域が存在する本乱流場の局所等方的な渦のスケールと自己相似的な渦のスケールは同程度である。
 - (3) エネルギー散逸の大部分は普遍平衡領域内で起こるため、散逸スペクトルは自己相似的である。
 - (4) 乱れの寿命時間とエネルギーを含む渦の特性時間は乱流場の発生からの時間に比例して大きくなる。
 - (5) 乱れの寿命時間を用いて、乱流レイノルズ数の変化がほぼ一定になり、乱流場が全体としてほぼ自己相似的とみなせるようになる区域を推定できる。
 - (6) 乱流場の実験を行うのに基本的に必要な自己相似区域の推定法をスペクトル解析より導いた。
 - (7) 乱流中で存在するさまざまな渦スケールの推定法を示し、乱流渦のヒエラルキ的構造を図式的に示した。
 - (8) 乱れの寿命時間、渦の特性時間の概念は、乱流場の構造を表す主要なパラメータの一つであり、カスケードモデルを理解するのに有用である。
- 本研究の一部は昭和63年度文部省科学研究費C(63550133)の援助により行われたものであることを記し、謝意を表する。

文 献

- (1) Kida, S. and Murakami, Y., *Phys. Fluids*, **30**-7 (1987), 203.
- (2) Yamamoto, K. and Hosokawa, H., *J. Pys. Soc. J.* **57**-5 (1988), 1532.
- (3) 時田・ほか3名, 機論, **53**-495, B (1987), 3173.

- (4) 蒔田・ほか3名, 機論, 53-495, B (1987), 3180.
- (5) 蒔田・ほか3名, 機論, 51-497, B (1988), 37.
- (6) 蒔田・ほか2名, 機論, 54-505, B (1988), 2333.
- (7) 蒔田・飯田, 機論, 55-515, B (1989), 1847.
- (8) 本論文集 341 ページ.
- (9) Townsend, A. A., *The Structure of Turbulent Shear Flow*, 2nd, ed. (1976), 55 Cambridge Univ. Press.
- (10) Driscoll, R. J. and Kennedy, L. A., *Phys. Fluids*, 26-5 (1983), 1228.
- (11) Uberoi, M. S., *Phys. Fluids*, 6 (1963), 1048.
- (12) Hinze, J. O., *Turbulence*, 2nd ed. (1975), 175, McGraw-Hill.
- (13) Comte-Bellot, G. and Corrsin, S., *J. Fluid Mech.*, 48 (1971), 273.
- (14) Batchelor, G. K., *The Theory of Homogeneous Turbulence*, (1953), 133 Cambridge Univ. Press.
- (15) 蒔田・ほか2名, 機論, 54-505, B (1988), 2408.
- (16) Lesieur, M. and Schertzer, D., *J. Mech.* 17 (1978), 609.
- (17) Comte-Bellot, G. and Corrsin, S., *J. Fluid Mech.*, 25 (1966), 657.
- (18) Corrsin, S. Flügge, S. and Truesdell, C., ed. *Handbuch der Physik*, 8 No. 2 (1963), Springer-Verlag.
- (19) Townsend, A. A., *Proc. R. Soc., London, Ser. A.*, 197 (1949), 124.
- (20) 巽編, 乱流現象の科学, (1986), 第6章, 東京大学出版.