高精度差分法による三次元非定常粘性流の
数値シミュレーション*一之瀬 健一^{*1}, 徳 永 宏^{*2}, 里 深信行^{*2}Numerical Simulation of Three-Dimensional Unsteady Viscous Flow
Using Higher Order Accurate Difference Method

Kenichi ICHINOSE, Hiroshi TOKUNAGA, and Nobuyuki SATOFUKA

A new direct simulation scheme using the eighth order accurate difference method is presented for three-dimensional instability of plane Poiseuille flow. The vorticity transport equation is transformed into a set of ordinary differential equations in time by using modified differential quadrature (MDQ) method for spatial discretization. The time integration is carried out by Runge-Kutta-Gill (RKG) scheme. The Poisson equations with respect to the vector potential are also discretized by MDQ method and solved by the iteration method. The multiple grid method, in addition, is employed to accelerate its convergence. The present method is compared with other method based on the primitive variables for certification. And further, our results of the amplitude decay and oscillation frequency of the disturbance, agree with those of pseudo-spectral method by Orszag, and the accuracy and efficiency of the present method is shown.

Key Words: Unsteady Flow, Viscous Flow, Poiseuille Flow, Three-Dimensional Flow, Multi-Grid Method, Vector Potential, Linear Instability

1. 序 論

流体工学の重要なテーマの一つである乱流は、複雑かつ微小な渦構造を持つとともに、きわめて非定常性の強い流れであり数値計算においては、空間的にも時間的にも十分高い精度が必要となる。このため、乱流の数値計算方法としては、波数空間で計算を行うスペクトル法、あるいは局所的にフーリエ級数展開する擬スペクトル法⁽¹⁾⁽²⁾などが最も広く用いられてきた。しかし、これらの方法は大規模な計算になるほど差分法に比べ計算能率が悪くなるほか、複雑な形状物体まわりの流れといった流れの周期性の仮定できない場合には適応が困難であった。そこで著者らは、高精度であり任意の流れ場への適用が可能な高精度差分法を用いる方法を開発した。この方法は、空間微分の離散化には修正微分求積(MDQ)法、時間積分には4段階四次精度のルンゲ・クッタ・ギル(RKG)法を用いるものであり、二次元流れ⁽³⁾や速度と圧力を基礎変数とする三次元流れ⁽⁴⁾において成果を上げている。本論文では、

この方法を渦度 ω とベクトルポテンシャル ϕ を用いた ω - ϕ 系に拡張する。 ω - ϕ 系の導入は、速度-圧力系に比べ、連続の条件が自動的に満足され、より正確な計算が可能であるという理由による。ただし、速度-圧力系ではポアソン方程式が1成分しかないのに対し、 ω - ϕ 系では3成分存在し、格子点数の多く要る本格的なシミュレーションではばう大な計算量となり、スーパーコンピュータをもってしても相当な計算時間を要す。そこで、手始めとして、少ない格子点で計算でき計算時間も少なめな平行平板間流れの線形安定性問題⁽⁵⁾を取扱い、他の方法と比較することにより本方法の有効性を調べた。

2. 基礎方程式

三次元非圧縮性粘性流体の運動は、次のナビエ・ストークス方程式および連続の式によって支配される。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta u_i \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$(i=1, 2, 3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし、これらの方程式は、平行平板間距離の1/2およびポアズイユ流れの中心線上の速度によって無次元化されており、 t は時間、 $\mathbf{u}$ は速度、 p は圧力、 Re は

* 平成元年10月15日 第67期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和63年7月15日。

^{*1} 学生員、京都工芸繊維大学工芸学部 (〒606 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

^{*2} 正員、京都工芸繊維大学工芸学部。

レイノルズ数を表す。

今、式(1)の回転をとり、渦度 ω を $\omega = \nabla \times u$ と定義すると、渦度輸送方程式

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega_i + (\omega \cdot \nabla) u_i + \frac{1}{Re} \Delta \omega_i \quad (i=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (3)$$

を得る。また速度 u はベクトルポテンシャル ϕ より、

$$\mathbf{u} = \nabla \times \phi \quad \dots\dots\dots (4)$$

と表され、 $\nabla \cdot \phi = 0$ を仮定することにより、 ϕ と ω に関するポアソン方程式

$$\nabla^2 \phi = -\omega \quad \dots\dots\dots (5)$$

を得る。次に、著者らの興味を平行平板間流れの線形安定性問題に限定するとともに、取扱いを容易にするため流れを主流とかく乱流とに分離する。すなわち、

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{U} \\ \phi = \bar{\phi} + \Psi \\ \omega = \bar{\omega} + \Omega \end{cases} \quad \dots\dots\dots (6)$$

($\bar{}$ はかく乱流、大文字は主流を表す。)

の関係を式(3)、(5)に代入し、さらに非線形項を省略すると最終的に

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\mathbf{U} \bar{\omega}_i + \mathbf{u} \Omega_i) \\ &+ \Omega \cdot \nabla \bar{u}_i + \bar{\omega}_i \cdot \nabla U_i + \frac{1}{Re} \Delta \bar{\omega}_i \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned} \quad (i=1, 2, 3)$$

$$\Delta \bar{\phi} = -\bar{\omega} \quad \dots\dots\dots (8)$$

を得る。以後の記述において「 $\bar{}$ 」を省略する。

3. 計算領域と境界条件

計算領域を示すと図1のようになる。

ここで、 α, β はそれぞれ x, z 軸方向の波数を表す。

境界条件は、壁面での粘着条件を満足するように定める。ポアソン方程式(8)に対する境界条件は、

$$\begin{cases} \phi_1|_{y=\pm 1} = \phi_3|_{y=\pm 1} = 0 \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y}|_{y=\pm 1} = 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (9)$$

を用いる。一方、渦度輸送方程式(7)に対する境界条件は、

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{\partial u_3}{\partial y} \\ \omega_2 = 0 \\ \omega_3 = -\frac{\partial u_1}{\partial y} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (10)$$

とした。 x, z 軸方向は流れの周期性を仮定し、周期境界条件を用いる。

4. 計算方法

4.1 計算格子および座標変換 壁付近で生ずる境界層を比較的少ない格子点数で分解できるように y 軸方向に関して、壁付近で格子が密になるよう次式

$$y = \frac{1}{a} \tanh(\eta \cdot \tanh^{-1} a) \quad \dots\dots\dots (11)$$

を用いて座標変換する。ここで、 η は $-1 \leq \eta \leq 1$ の等間隔格子を表し、座標変換のパラメータ $a=0.9$ として、図2に示すよう壁面近傍で格子を密にする。

4.2 直接解法による方法 本論文で取扱われる問題は、 x, z 軸方向に周期性が仮定されており、しかも線形であることから、比較的簡単で高精度な計算方法が、4.3節で述べる高精度差分法による方法に対する比較検定用として用いられる。この方法は、三次元ナビエ・ストークス方程式をかく乱流について線形化し、速度-圧力系で計算するもので、二次元の流れに対して有効性が示されている⁽⁶⁾。その最終的な基礎方程式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) U_i + (\mathbf{U} \cdot \nabla) u_i \\ = -\nabla p + \Delta u_i / Re \quad (i=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

である。次に x, z 軸方向の周期性により、 x, z 軸方向に関してフーリエ展開すると

$$\begin{aligned} u_i(x, y, z, t) &= u_{i1}(y, t) \cos(\alpha x + \beta z) \\ &+ u_{i2}(y, t) \sin(\alpha x + \beta z) \\ &\quad (i=1, 2, 3) \end{aligned}$$

図1 計算領域

図2 計算格子

$$\begin{aligned} p(x, y, z, t) &= p_1(y, t) \cos(\alpha x + \beta z) \\ &+ p_2(y, t) \sin(\alpha x + \beta z) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。これらの関係式を式(12), (13)に代入すると, y, t に関する方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{21}}{\partial t} = -\alpha U_1 u_{22} - \frac{\partial p_1}{\partial y} \\ \quad + \frac{1}{Re} \left[-(\alpha^2 + \beta^2) u_{21} + \frac{\partial^2 u_{21}}{\partial y^2} \right] \\ \frac{\partial u_{22}}{\partial t} = \alpha U_1 u_{21} - \frac{\partial p_2}{\partial y} \\ \quad + \frac{1}{Re} \left[-(\alpha^2 + \beta^2) u_{22} + \frac{\partial^2 u_{22}}{\partial y^2} \right] \\ \frac{\partial u_{31}}{\partial t} = -\alpha U_1 u_{32} - \beta p_2 \\ \quad + \frac{1}{Re} \left[-(\alpha^2 + \beta^2) u_{31} + \frac{\partial^2 u_{31}}{\partial y^2} \right] \\ \frac{\partial u_{32}}{\partial t} = \alpha U_1 u_{31} + \beta p_1 \\ \quad + \frac{1}{Re} \left[-(\alpha^2 + \beta^2) u_{32} + \frac{\partial^2 u_{32}}{\partial y^2} \right] \\ u_{11} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial u_{22}}{\partial y} - \beta u_{31} \right) \\ u_{12} = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial u_{21}}{\partial y} + \beta u_{32} \right) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (15)$$

および, 圧力に関するポアソン方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} - (\alpha^2 + \beta^2) p_1 = -2\alpha \frac{\partial U_1}{\partial y} u_{22} \\ \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} - (\alpha^2 + \beta^2) p_2 = 2\alpha \frac{\partial U_1}{\partial y} u_{21} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (16)$$

を得る。 y 軸方向の離散化は, 四次精度の MDQ 法で行い, 時間積分は後に述べる RKG 法を用いる。圧力に関するポアソン方程式の解法は, 四次精度の直接解法を用いる。この方法により, きわめて高速に, 比較的確な検定用の解が得られる。

4.3 高精度差分法による方法 3章で述べた渦度輸送方程式(7)およびポアソン方程式(8)は高精度差分法を用いることにより, 図3の手順に従って解かれる。渦度輸送方程式の空間微分項は, 八次精度の修正微分求積(MDQ)法により離散化され, 時間 t に関する常微分方程式に帰着される。この常微分方程式化された渦度輸送方程式の時間積分には, 4段階四次精度のルンゲ・クッタ・ギル(RKG)法が用いられる。RKG 法により, 新しい時間段階の ω が求められるが, 渦度輸送方程式の空間微分項には, 未知変数 u が含まれておりこのままでは次の時間積分を行うことができない。そこで, ポアソン方程式(8)を解くことにより,

ω から ψ を求めさらに式(4)により u を求める。ポアソン解法としては, 八次精度の MDQ 法により離散化を行い, その結果得られた多元連立代数方程式を反復解法で解く方法を用いている。これは, 三次元の場合格子点数が多くなると方程式の元が増え, 直接解法では誤差の蓄積が問題となるからである。一般に反復解法は計算時間が直接解法に比べかかるが, 本研究では反復解の収束の加速を図るために多重格子法⁽⁷⁾を用いている。

次に, MDQ 法と RKG 法について補足しておく。

(1) MDQ 法 今, 連続関数 $u(x)$ および, $u_i = u(x_i)$, ($i=1, 2, \dots$)を満たす値 u_i が与えられているとする。一般に点 $x=x_i$ における u の微分は, 適当な係数 a_{ij} を用いて,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=-n}^n a_{ij} u_{i+j} \quad \dots\dots\dots (16)$$

と近似される。この係数 a_{ij} はラグランジュ内挿を応用することにより, 次のように求められる。

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{\Pi'(x_i)}{(x_i - x_{i+j})\Pi''(x_{i+j})}, & i \neq j \\ \frac{\Pi''(x_i)}{2\Pi'(x_i)}, & i = j \end{cases} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\Pi(x_i) = (x_i - x_{i-n})(x_i - x_{i-n+1}) \cdots (x_i - x_{i+n}) \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで, $\Pi' = d\Pi/dx$, $\Pi'' = d^2\Pi/dx^2$ である。また, 2階微分は,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=-n}^n b_{ij} u_{i+j} \quad \dots\dots\dots (19)$$

と表され, 係数 b_{ij} は

$$b_{ij} = \sum_{l=-n}^n a_{il} a_{lj} \quad \dots\dots\dots (20)$$

で与えられる。一般に MDQ の精度を m とすると m

図3 計算手順

$=2n$ の関係が成り立ち、八次精度の場合は、 $n=4$ となる。

(2) RKG 法 前述の MDQ 法により常微分方程式化された渦度輸送方程式は形式的に、

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\omega}}{dt} &= \vec{F}(\vec{\omega}, \vec{u}) \\ \vec{\omega} &= (\omega_{1,121}, \omega_{1,221}, \dots, \omega_{3,imax-1,jmax-1,kmax-1})^T \\ \vec{u} &= (u_{1,121}, u_{1,221}, \dots, u_{3,imax-1,jmax-1,kmax-1})^T\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (21)$$

と表される。ここで $\vec{F}(\vec{\omega}, \vec{u})$ は MDQ 法により離散化された空間微分項、 $imax, jmax, kmax$ はそれぞれ、 x, y, z 軸方向の格子点数を表す。式(21)の時間積分は RKG 法により次の手順で行われる。今、時間段階が n から $n+1$ に進む場合を考える。 ω^{n+1} は

$$\begin{aligned}\begin{cases} \vec{\omega}^{(1)} = \vec{\omega}^n + \Delta t \vec{F}(\vec{\omega}^n, \vec{u}^n)/2 \\ \vec{G}^{(1)} = \Delta t \vec{F}(\vec{\omega}^n, \vec{u}^n) \end{cases} \\ \begin{cases} \vec{\omega}^{(2)} = \vec{\omega}^{(1)} + (1-1/\sqrt{2})\Delta t \vec{F}(\vec{\omega}^{(1)}, \vec{u}^{(1)}) \\ \vec{G}^{(2)} = (-2+3/\sqrt{2})\vec{G}^{(1)} \\ \quad + (2+\sqrt{2})\Delta t \vec{F}(\vec{\omega}^{(1)}, \vec{u}^{(1)}) \end{cases} \\ \begin{cases} \vec{\omega}^{(3)} = \vec{\omega}^{(2)} + (1+1/\sqrt{2})\Delta t \vec{F}(\vec{\omega}^{(2)}, \vec{u}^{(2)}) \\ \vec{G}^{(3)} = -(2+3/\sqrt{2})\vec{G}^{(2)} \\ \quad + (2+\sqrt{2})\Delta t \vec{F}(\vec{\omega}^{(2)}, \vec{u}^{(2)}) \end{cases} \\ \vec{\omega}^{n+1} = \vec{\omega}^{(3)} + \Delta t \vec{F}(\vec{\omega}^{(3)}, \vec{u}^{(3)})/6 - \vec{G}^{(3)}/3\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (22)$$

の4段階の手順で求められる。ここで Δt は時間刻み幅、 $\vec{\omega}^{(i)}, \vec{G}^{(i)}, i=1, 2, 3$ は中間段階の補助関数を表す。この RKG 法では4段階の手順で行われるため、時間段階が n から $n+1$ に進むのに、1成分につき4回、3成分ある $\omega-\phi$ 系の場合、都合12回ものポアソン解法が必要となる。

5. 計算結果と考察

5.1 初期条件 かく乱流の初期条件として、次の関数を与える。

$$\begin{aligned}u_1 &= -ka_1\alpha \cos(ax+\beta z) \left\{ \frac{\sinh(a_1y)}{\cosh(a_1)} + \frac{\sin(a_1y)}{\cos(a_1)} \right\} \\ u_2 &= -k(\alpha^2+\beta^2)\sin(ax+\beta z) \\ &\quad \times \left\{ \frac{\cosh(a_1y)}{\cosh(a_1)} - \frac{\cos(a_1y)}{\cos(a_1)} \right\} \\ u_3 &= -ka_1\beta \cos(ax+\beta z) \left\{ \frac{\sinh(a_1y)}{\cosh(a_1)} + \frac{\sin(a_1y)}{\cos(a_1)} \right\}\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 k はかく乱流の振幅で、 $k=0.0599$ 、 α, β は x, z 軸方向の波数で、今回 $\alpha=\beta=1$ とした。また a_1 は壁面($y=\pm 1$)で速度が零となるよう2.365とする。

5.2 計算結果と比較 前述の初期条件でレイノ

ルズ数 $Re=1550$ の場合について高精度差分法による方法と直接解法による方法とで計算を行い両者を比較した。両者による速度場を重ね合わせてみると図4のように全く両者は一致する。したがって、この時間段階までは、計算が良好に行われており、計算結果の信頼性は高いといえる。

次に、 $t=20$ における速度場の比較を図5に示す。この時間段階になると両者に違いがみられる。これは流れが強い遷移状態に入り、一時的に流れ場が複雑になり差分法による離散化に障害をきたしたことが考えられる。すなわち、このときの渦度 ω_1 の様子を図6に示すと、 y 軸方向に ω_1 の分布が複雑になり、計算がシビヤになるのがうかがわれる。このような複雑な ω_1 の分布は $t=10$ ではみられなかったものである。さらに高精度差分法による方法ではこのシビヤな計算のもと計算誤差が蓄積して流れ場に影響を与え、 x, z 軸方向に関して、 ω_1 の分布は式(14)で示した三角関数からずれてしまい、 $t=25$ (図7)ではこの傾向はより顕著になる。このため、高精度差分法による方法ではこれ以上計算できなくなる。

一方、直接解法による方法では x, z 軸方向に三角関数を用いてフーリエ展開しているので計算がシビヤになっても x, z 軸方向に関しては、三角関数のまま

図4 $t=10$ における速度場の比較

である。このため、 $t=20$ 前後で起こると考えられる強い遷移状態を乗り切ることが可能である。この方法で $t=110$ まで計算を行い速度 u_1 の振幅の時間的変化を図 8 に示すと、 $t=0\sim 30$ 付近まで遷移状態が続き、特に $t=20$ 前後で強い遷移が起こることがわかる。 $t=30$ 以後は一様な減衰状態になり、流れが遷移状態を脱出することがわかる。

次に、直接解法による方法により得られた $t=100$ の速度場の様子を図 9 に示す。図 9 より速度場は $t=20$ の速度場よりなめらかな分布になっていることがわかる。そしてこの流れ場は、平行平板間流れの線形安定性問題における $Re=1550$ の三次元固有解であると予想され、以後流れのパターンは一定のまま、速度の振幅が固有の減衰率で小さくなっていく。

そこで著者らは前述の $t=100$ の流れ場を初期条件として $t=110$ まで高精度差分法による方法で計算を行い、直接解法を用いた方法と比較した。これら $t=100$ の流れ場は式 (23) で与えられた初期条件とは異なり、十分系になじんだものであり、高精度差分法による計算は再度遷移状態に入ることなく、スムーズに行われることが期待されるからである。 $t=110$ の速度場の比較を図 10 に示す。図 10 において両者による結果がきわめてよく一致することが示される。また流れ

のパターンは $t=100$ のものとほぼ同じで、渦が主流方向に流されているのがわかる。図 11 に示した渦度 ω_1 は $t=20, 25$ (図 7, 8) の ω_1 の分布と比較して、全体的になめらかでフラットな分布となり、振幅も小さくなっている。また図 12 には、ベクトルポテンシャル ψ_1 、図 13 には ψ_2 を示す。 ψ_1, ψ_2 の分布はなめらかであり、ポアソン方程式の境界条件式 (9) が良好に満た

図 6 $t=20$ における ω_1 の分布

図 7 $t=25$ における ω_1 の分布

図 5 $t=20$ における速度場の比較

図 8 速度 u_1 の振幅の変化

図 9 $t=100$ の速度場

図 10 $t=110$ の速度場の比較

されているのがわかる。そして、かく乱流の振幅の時間的变化は図 14 に示したように、どの成分も一様に減衰している。ところで、かく乱流の振動数、減衰率は、Orszag⁽¹⁾らにより擬スペクトル法で計算されている。そこで、本研究により得られた振動数、減衰率を Orszag らによるものと比較すると表 1 のようになり、ほぼ一致している。

以上の図に示された流れ場は、格子点数 $9 \times 33 \times 9$ 時間刻み幅 $\Delta t = 1/200$ で行ったものであり、無次元時間 $t=10$ までに要する計算時間は、VP 200 で約 50 min である。このように Δt が小さいのはできるだけ時間精度を上げるという理由によるが、表 1 に示したように $\Delta t = 1/20$ の計算でも流れ場は多少ずれるものの減衰率、振動数とも良好な結果を得る。また $\Delta t = 1/20$ の場合の計算時間は先の 50 min に対して 20 min に短縮され経済的な計算が可能であることが示される。ところで、 Δt が 10 倍違うのに対し、計算時間が約 $1/3$ しか短縮されないのは、本方法において全計算時間の大半がポアソン解法に費され、 Δt が大きいとポアソン解法の収束が遅くなるためである。ゆえに、本方法も本格的な格子点数の多い計算に対応させるには、高速のポアソン解法が計算能率向上の点で最重要課題となる。

図 11 $t=110$ の ω_1 の分布

図 12 $t=110$ の ψ_1 の分布

図 13 $t=110$ の ψ の分布

図 14 かく乱流の振幅の時間的变化

6. 結 論

著者らは、乱流といった複雑な流れ場でしかも任意の流れ場への適応が可能な計算方法として、高精度差分法を用いる方法を開発し、手始めに平行平板間流れの線形安定性問題を取扱い、次のような結果を得た。

- (1) 遷移状態で流れが複雑になるまでは、高精度差分法による方法と直接解法による方法はきわめてよく一致した。
- (2) 直接解法による方法で得られた固有解を初期条件として高精度差分法による方法で計算したところ、直接解法による解ときわめてよく一致した。
- (3) 高精度差分法により得られたかく乱流の振幅の振動数、減衰率は Orszag らにより、擬スペクトル法で得られたものとほぼ一致した。

表 1 かく乱流の振動数と減衰率

$\alpha=\beta=1, Re=1550$			
	Orszag	present $\Delta t=1/200$	present $\Delta t=1/20$
oscillation frequency	0.400617	0.40	0.40
amplitude decay	-0.0278714	~ -0.028 ~ -0.032	~ -0.026 ~ -0.030

以上のことより、一部遷移状態は別として、高精度差分法による方法の有効性、正確性が示された。また、遷移状態の計算の不都合はシビヤな計算の繰返しによる計算誤差の蓄積が原因であり、倍精度で計算するなど、計算誤差を小さくすれば解決できる。そしてこのようなことを踏まえつつ、非線形安定性、乱流といった高度な問題に本方法を適応していくのが今後の課題である。なお、これらの数値計算には京都大学大型計算機センターの VP 200, VP 400 E を使用し、関係者の方々に感謝の意を表す。

文 献

- (1) Orszag, S. A. and Kells, L. C., Transition to Turbulence in Plane Poiseuille and Couette Flow., *J. Fluid. Mech.*, **96** Part 1(1980), 159-205.
- (2) Biringen, S., Final Stages of Transition to Turbulence in Plane Channel Flow., *J. Fluid. Mech.*, **148**(1984), 413-442.
- (3) Tokunaga, H., Satofuka, N. and Tanimura, Y., Higher Order Accurate Difference Method with New Direct Poisson Solver and its Application to Direct Simulation of Boundary Layer Instability., *Proc. Int. Symp. Comp. Fluid Dyman, Tokyo-2*(1986), 543-553.
- (4) Tokunaga, H., Satofuka, N. and Miyagawa, H., Direct Simulation of Shear Flow Turbulence in a Plane Channel by Sixth Order Accurate Method of Lines with New Sixth Order Accurate Multi-Grid Poisson Solver. *Lecture Notes in Physics*, **264**(1986), 617-621, Springer.
- (5) 巽・後藤, 流れの安定性理論, (1976), 産業図書.
- (6) 徳永, 流れの安定性に対する新しい高精度直接シミュレーションの方法とその応用, なかれ, **5**(1986), 27-33, 日本流体力学会.
- (7) Tokunaga, H., Satofuka, N. and Miyagawa, H. Direct Simulation on Instability of Plane and Hagen Poiseuille Flows. *Memoirs of Faculty of Engineering and Design*, **34** (1985), 72-84, Kyoto Institute of Technology.