導電性磁性流体の基本的流動特性に関する理論解析*
(第2報, 平行平板間の一定圧力こう配流れ)井 門 康 司*¹, 棚 橋 隆 彦*²A Note on the Fundamental Dynamic Flow Characteristics
of Conducting Magnetic Fluids
(2nd Report, Constant Pressure Gradient Flow
between Two Parallel Plates)

Yasushi IDO and Takahiko TANAHASHI

Assuming that the homogeneous electric field, magnetic field and flow direction were orthogonal to one another, a constant pressure gradient flow between two parallel plates was analytically discussed. A set of the system equations for conducting magnetic fluids considering the internal rotation which had been proposed by the authors in a previous report was used. Physical quantities, such as velocity, angular velocity of fluid and suspended particles, were theoretically obtained. The constant pressure gradient flow of conducting magnetic fluids was characterized by some dimensionless parameters (magnetic effect parameter, micropolar effect parameter, electric effect parameter, etc.). Effects of these dimensionless parameters on the conducting magnetic fluids flow were investigated in detail. Furthermore, the limit of the range for the wall surface coefficient was given when applied electric and magnetic fields existed.

Key Words: Magnetic Fluid, Analytical Solution, Poiseuille-like Flow, Constant Pressure Gradient Flow, Electrical Conductivity

1. 結 言

現在市販されている多くの磁性流体は、非導電性の液体中に強磁性体微粒子を安定にけん濁させた流体である。粒子の表面処理とオレイン酸などの界面活性材の添加により磁性流体の分散性は非常によく、重力などの作用によって凝集や沈降が起こらず、粒子の濃度は一定している。非導電性磁性流体に関して、これまで Brenner⁽¹⁾⁽²⁾, Shliomis⁽³⁾, Buyevich⁽³⁾ および著者ら^{(9)~(11)(14)}によって理論的にあるいは数値的に、また、Rosensweig⁽⁸⁾, McTague⁽⁷⁾ および神山ら⁽⁴⁾⁽⁵⁾などにより実験的に研究がなされてきた。また一方で導電性を有する流体に関する研究が近年盛んに行われてきている。そして最近、液体金属を母液とした導電性を有する磁性流体が試作された。そしてこのような導電性磁性流体の応用として高効率のエネルギー変換機システムなどが考えられている。これに伴い著者らは熱力学的手法を用いて内部自由度を考慮した導電性磁性流体の基礎方程式系を導出し⁽¹⁰⁾、さらに前報⁽⁶⁾⁽¹²⁾において導電性磁性流体の平行平板間単純せん断流れの理論

解析を行った。導電性磁性流体の流れは一般に流れ場と電磁場の複雑な相互作用によるものであり、基本的な流れに関しても解析的に解を得ることは非常に困難である。解析的に解が得られるのは、いくつかの仮定のもとでの極めて特殊な場合に限られる。ここでは前報⁽¹²⁾に続き導電性磁性流体の流動現象の中でも最も基本的なものの一つである平行平板間における定常一定圧力こう配流れをとりあげ、粒子の角運動量の拡散効果を見捨てることなしに、速度、流体および粒子の回転角速度などの流体力学的諸量を解析的に求める。また、流れを特徴づける数個の無次元数を定義し、これらが流れに及ぼす影響について調べる。この際に、印加磁場の強さを変えろという一つの物理条件の変化に対して複数の無次元数が変化するなど完全に独立であるとは言えなかった従来 MHD および非導電性磁性流体の解析などに用いられてきたハルトマン数および磁性効果パラメータに代えて、磁場の効果を表す新しい無次元数、磁場効果パラメータを定義する。

主 な 記 号

A: 圧力こう配 $= -\partial p / \partial z$ B: 磁束密度ベクトル; $B = |B|$

b: 単位質量当たりの体積力

* 平成元年10月15日 第67期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和63年10月24日。

*¹ 正員、慶應義塾大学大学院(〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。*² 正員、慶應義塾大学理工学部。

D : 電束密度ベクトル
 E : 電場ベクトル; $E=|E|$
 E_0 : 印加した電場の強さ
 e_i : 基底ベクトル
 H : 磁場ベクトル; $H=|H|$
 H_0 : 印加した磁場の強さ
 Ha : ハルトマン数 $=\mu_0 H_0 l \sqrt{\sigma_e/\eta}$
 h : 磁化率パラメータ $=M_0/\mu_0 H_0$
 I : 恒等テンソル
 I : 単位体積当たりの粒子の慣性モーメントの合計 $=\rho i^2$
 i : 体積平均慣性半径
 j : 電流密度ベクトル
 l : 単位質量あたりの体積偶力
 $2l$: 平行平板間距離
 M : 磁化ベクトル; $M=|M|$
 M_0 : 平衡磁化の強さ
 P : 分極ベクトル
 Per : 回転ペクレ数 $=\tau A l/2\eta$
 p : 圧力
 Re_m : 磁気レイノルズ数 $=\mu_0 \sigma_e A l^3/2\eta$
 t : 時間座標
 v : 流速ベクトル
 α, β, γ : スピン粘性係数 $\gamma=i^2\eta$
 δ : 壁面係数
 ϵ : 三階の交代テンソル (Levi-Civita の記号)
 ϵ : 極性効果パラメータ $=\eta_1/\eta$
 ϵ_0 : 真空の誘電率
 ζ : 電場効果パラメータ
 $=E_0\eta\sqrt{8/\mu_0 A^3 l^5}$
 η : セン断粘性係数
 η_1 : 渦粘性係数 $=l/4\tau_s$
 η_2 : 第2粘性係数
 λ : 寸法効果パラメータ $=l/i$
 μ_0 : 真空の透磁率
 ρ : 流体の密度
 ρ_e : 電荷密度
 τ : 磁化の緩和時間
 τ_s : 流体摩擦に基づく回転運動の緩和時間
 σ : 磁場効果パラメータ
 $=H_0\sqrt{2\mu_0 A l}$
 σ_e : 電気伝導率
 σ_m : 磁性効果パラメータ
 $=\tau\tau_s H_0 M_0(1-h)/l$
 χ_m : 磁化率

Ω : 粒子の平均回転角速度ベクトル

ω : 流体の角速度ベクトル

$*$: 無次元量を表す添字

2. 解析モデルおよび基礎方程式系

2.1 基礎方程式系 解析にあたって前報⁽¹⁰⁾において導出された内部回転を考慮した導電性磁性流体に対する基礎方程式系を用いる。連続の方程式、運動方程式、角運動量方程式、電磁場の方程式および電流密度と磁化の構成方程式はそれぞれ以下ようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad \cdots \cdots (1)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv}{dt} = & -\nabla p + (\eta + \eta_2) \nabla (\nabla \cdot v) \\ & + \eta \nabla^2 v + 2\eta_1 \nabla \times (\Omega - \omega) + \rho_e E \\ & + (P \cdot \nabla) E + P \times (\nabla \times E) + j \times B \\ & + (M \cdot \nabla) H + M \times (\nabla \times H) + \rho b \quad \cdots \cdots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I \frac{d\Omega}{dt} = & (\alpha + \beta) \nabla (\nabla \cdot \Omega) + \gamma \nabla^2 \Omega \\ & + 4\eta_1 (\omega - \Omega) + P \times E + M \times H + \rho l \quad \cdots \cdots (3) \end{aligned}$$

$$\nabla \times E = -\partial B / \partial t \quad \cdots \cdots (4)$$

$$\nabla \times H = \partial D / \partial t + j \quad \cdots \cdots (5)$$

$$\nabla \cdot D = \rho_e \quad \cdots \cdots (6)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \cdots \cdots (7)$$

$$j = \sigma_e (E + v \times B) + \rho_e v \quad \cdots \cdots (8)$$

$$M = M_0 (I - \tau \Omega \cdot \epsilon) \cdot H / H \quad \cdots \cdots (9)$$

$$\omega = \nabla \times v / 2 \quad \cdots \cdots (10)$$

2.2 境界条件 速度の境界条件は壁面において no-slip 条件を適用する。また、粒子の回転角速度の境界条件として、本論文では前報⁽¹²⁾と同様にして Condiff-Dahler の条件を採用する。したがって、壁面において

$$\Omega = \delta \omega$$

となる。ここで δ は壁面係数である。また、電磁場に関する境界条件は、電場ベクトルの接線成分の連続性、電束密度の法線成分の連続性、磁場ベクトルの接線成分の連続性および磁束密度の法線成分の連続性である。

2.3 解析モデルおよび仮定 距離 $2l$ だけ隔たった半無限平行平板間に導電性磁性流体が満たされている。これに一定の圧力こう配をかけて磁性流体を流動させる。流れ方向が z 軸、両平板に垂直な方向が x 軸となるように直交座標系をとる (図1)。また、流体内の温度差は微小で温度変化は無視できるものとする。さらに解析にあたり以下のような仮定を設ける。

(I) 流体は非圧縮で、微粒子は剛体回転する ($\nabla \cdot v = 0, \nabla \cdot \Omega = 0$)。

- (II) 流体の物質定数の温度依存性を無視する。
 (III) 流れ場、電磁場は定常である。このため、流体は常に電氣的に中性である ($\rho_e=0$)。
 (IV) 電磁力以外の体積力, 体積偶力を無視する ($b=0, l=0$),
 (V) 流体の分極を無視する ($P=0$),
 (VI) z 方向の圧力こう配は一定である ($\partial p/\partial z = -A$).
 (VII) 回転ペクレ数 Per は 1 に比べて十分小さい ($Per = \tau\Omega \ll 1$).
 (VIII) 誘起磁場は印加磁場に比べて十分小さい ($H_z/H_0 \ll 1$).
 (IX) 上下壁面は絶縁体である。また、壁面での磁化率は $\chi_m \approx 0$ である。
 (X) 流体は十分に密な媒質で構成されており、電子の自由走行時間は電子の Lamor 振動周期に比べて十分小さい。このため、電気伝導率は磁場に依存しない。
- このとき、各物理量 v, ω, Ω, H, M および E は x のみの関数となる。

3. 方程式系の成分表示

3.1 電磁場の方程式 式(4)および式(6)を仮定(III)を考慮して成分表示すると次のようになる。

$$\frac{dE_x}{dx}=0, \frac{dE_y}{dx}=0, \frac{dE_z}{dx}=0 \quad (11)$$

また、壁面においては電流分布が存在しない。したがって、壁面内では x 方向には磁場が、また、 $-y$ 方向には電場がともに一様に印加されている。境界における電場ベクトルの接線成分の連続性、および電束密度の法線成分の連続性を考慮すると、式(11)より、電場ベクトルの成分は次のようになる。

$$E=(0, -E_0, 0) \quad (12)$$

仮定(III)より式(5)は次のようになる。

図1 平行平板間一定圧力こう配流れ

$$\nabla \times H = j \quad (13)$$

式(8)に仮定(III)を適用して式(13)に代入すると次式が得られる。

$$\nabla \times H = \sigma_e(E + v \times B) \quad (14)$$

式(14)を式(12)を考慮して成分表示すると

$$\sigma_e v B_y = 0 \quad (15)$$

$$\frac{dH_z}{dx} = \sigma_e E_0 - \sigma_e v B_x \quad (16)$$

$$\frac{dH_y}{dx} = 0 \quad (17)$$

が得られる。式(17)に境界条件を適用すると $H_y=0$ となる。以上より、磁場ベクトルおよび電流密度ベクトルを成分表示すると次のようになる。

$$H=(H_x, 0, H_z) \quad (18)$$

$$j=(0, j_y, 0) \quad (19)$$

3.2 磁化の方程式 式(18)を考慮して磁化の構成方程式(9)を成分表示すると次のようになる。

$$x \text{ 成分: } M_x = M_0(H_x + \tau H_z \Omega)/H \quad (20)$$

$$z \text{ 成分: } M_z = M_0(H_z - \tau H_x \Omega)/H \quad (21)$$

ここで、仮定(VIII)より $H \approx H_x$ とすれば式(20)および式(21)は仮定(VII)を考慮して次のように書き換えられる。

$$x \text{ 成分: } M_x \approx M_0 \quad (22)$$

$$z \text{ 成分: } M_z \approx M_0 \left(\frac{H_z}{H_x} - \tau \Omega \right) \quad (23)$$

3.3 運動方程式 運動方程式(2)を仮定(I)~(IX)および式(12), (18)および式(22)を考慮して成分表示すると以下の式を得る。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu_0 j_y H_x \quad (24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (25)$$

$$2(\eta + \eta_1) \frac{d\omega}{dx} - 2\eta_1 \frac{d\Omega}{dx} - M_0 \frac{dH_z}{dx} + \mu_0 j_y H_x - A = 0 \quad (26)$$

式(25)より圧力は y 方向に変化しないことがわかる。

3.4 角運動量方程式 仮定(I)~(IX)を考慮して角運動量方程式(3)の y 成分を表示すると次式のようにになる。

$$\gamma \frac{d^2 \Omega}{dx^2} - 4\eta_1(\Omega - \omega) - (M_0 H_z - M_z H_x) = 0 \quad (27)$$

また、 x および z 成分はそれぞれ $M_y H_z = M_z H_y$ および $M_x H_y = M_y H_x$ となるが、式(18), (22), (23)および $M_y=0$ より両辺とも零となり恒等的に成り立つ。

4. 方程式系の無次元化

本解析において $\nabla \cdot v = 0$ および $\nabla \cdot \Omega = 0$ は自動的に満足されている。式(10), (26)および式(27)を表1

の代表量 (主に Newton 流体の最大値) を用いて無次元化する。この結果、運動方程式の z 成分、角運動量方程式の y 成分、および流体の角速度の式はそれぞれ次のようになる。

$$\frac{d\omega^*}{dx^*} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot \frac{d\Omega^*}{dx^*} + \frac{Re_m \sigma^2}{2(1+\varepsilon)} v^* - \frac{\zeta Re_m \sigma + 2}{2(1+\varepsilon)} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{d^2 \Omega^*}{dx^{*2}} + 4\varepsilon \lambda^2 \omega^* - \{Per \sigma^2 h(1-h) + 4\varepsilon\} \lambda^2 \Omega^* = 0 \quad (29)$$

$$\omega^* = -\frac{1}{2} \cdot \frac{dv^*}{dx^*} \quad (30)$$

ただし

$$\varepsilon = \frac{\eta_1}{\eta} \quad (31)$$

$$Re_m = \sigma_e \mu_0 \frac{Al^3}{2\eta} \quad (32)$$

$$\sigma = H_0 \sqrt{2\mu_0 / Al} \quad (33)$$

$$\zeta = E_0 \eta \sqrt{8 / \mu_0 A^3 l^5} \quad (34)$$

$$\lambda = \frac{l}{i} \quad (35)$$

$$Per = \frac{\tau Al}{2\eta} \quad (36)$$

ただし

$$h = \frac{M_0}{\mu_0 H_0} \quad (37)$$

ここで σ は磁場の影響を表す無次元数であり、これを磁場効果パラメータと定義する。さらに ζ は電場の影響を表す無次元数であり、これを電場効果パラメータと定義する。また、 ε , Re_m , λ および Per はそれぞれ極性効果の大きさ、磁力線が流体に結びつく程度の大きさ、装置の寸法と粒子の大きさの比および粒子の回転しやすさを表す無次元数である。

5. 理論解析

5.1 支配方程式 運動方程式の z 成分と角運動量方程式の y 成分である式(28)および式(29)に式(30)を代入して得られる二つの式より、次の式(38)および式(39)が得られる。

$$\frac{d^4 v^*}{dx^{*4}} - \xi_1 \frac{d^2 v^*}{dx^{*2}} + \xi_2 v^* - \xi_3 = 0 \quad (38)$$

$$\Omega^* = \{(Re_m \sigma^2 - 4\varepsilon \lambda^2) dv^* / dx^* - (1+\varepsilon) d^3 v^* / dx^{*3}\} / 2\varepsilon \lambda^2 \times \{4\varepsilon + h(1-h)\sigma^2\} \quad (39)$$

ここで

$$\xi_1 = (4\varepsilon \lambda^2 + Re_m \sigma^2) / (1+\varepsilon) + \lambda^2 Per \sigma^2 h(1-h) \quad (40)$$

$$\xi_2 = \lambda^2 Re_m \sigma^2 \{4\varepsilon + Per h(1-h)\sigma^2\} / (1+\varepsilon) \quad (41)$$

$$\xi_3 = \lambda^2 \{4\varepsilon + Per h(1-h)\sigma^2\} \times (2 + \zeta Re_m \sigma) / (1+\varepsilon) \quad (42)$$

式(38)は速度 v に関する 4 階の微分方程式である。この微分方程式の特性方程式を考え、特性根を求めると、次に示す 3 個の場合に分けられることがわかる。

$$(a) \quad \xi_1^2 - 4\xi_2 > 0$$

$$(b) \quad \xi_1^2 - 4\xi_2 = 0$$

$$(c) \quad \xi_1^2 - 4\xi_2 < 0$$

(a) の場合には 4 個の特性根はすべて相異なる実数となり、(b) の場合には 2 組の実数の重根、(c) の場合には相異なる 4 個の複素数となる。

5.2 v^* , ω^* および Ω^* の解 流れを知るうえで最も基礎的な v^* , ω^* および Ω^* の 3 個の解析解を次の手順に従って求める。

(イ) 式(38)の特性方程式より特性根を求め、 v の一般解を求める。

(ロ) (イ) で求めた v の一般解を式(30)および式(39)に代入して ω^* および Ω^* の一般解を得る。

(ハ) (イ) および(ロ) で求めた v^* , ω^* および Ω^* の一般解は 4 個の積分定数を含んでいる。したがって、先に述べた境界条件 (no-slip 条件および Condiff-Dahler の条件) のもとでこれらを決定する。

(ニ) (ハ) で求めた 4 個の積分定数を一般解に代入して解析解を得る。

以上の手順によって、 v^* , ω^* および Ω^* の解析解が求められる。その結果表 2 を得る。

6. 解析結果および検討

6.1 解析解の形の場合分けに関する検討 前章において、 v^* , ω^* および Ω^* の解が $\xi_1^2 - 4\xi_2$ の値によってその形が 3 個の場合に分かれることが示された。(b) の場合、すなわち $\xi_1^2 - 4\xi_2 = 0$ となる場合を考える。この式に式(40)および式(41)を代入し、磁場効果パラメータ σ について解くと次式を得る。

表 1 無次元化に用いる代表量

x, z	l	H	H_0
v	$Al^2/2\eta$	M	M_0
ω, Ω	$Al/2\eta$	E	E_0
p	Al	j	$\sigma \mu_0 H_0 Al^2/2\eta$

$$\sigma = \frac{2\lambda[\epsilon\sqrt{Re_m} \pm \sqrt{\epsilon(1+\epsilon)R}]}{[\lambda^2(1+\epsilon)Per h(1-h) - Re_m]}$$

ただし

$$R = Re_m - \lambda^2 Per h(1-h)$$

上式の右辺において複号が+の場合の σ の値を σ_1 とし、複号が-の場合の値を σ_2 とする。このとき $\xi_1^2 - 4\xi_2$ の値が零または負になるのは次の関係が成り立つ場合である。

$$\sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_1$$

ところがこのような場合が存在するのは、けん濁粒子がかなり大きく、また、導電性磁性流体の電気導電率が異常に大きい場合のみである。しかし、粒子の径がある限度以上に大きくなると粒子を安定に分散させておくことができなくなり、また、低温での超伝導状態などの特殊な場合を除くと導電率を大きくすることには限界がある。したがってこのような場合を考慮する必要のある導電性磁性流体を作ることは現状では不可能である。したがって、本報ではこのような場合は考えないものとする。 $\xi_1^2 - 4\xi_2$ の値が正になる場合について前章で示した手順に従って v^* 、 ω^* および Ω^* の解析解を求めると表2のようになる。

6.2 無次元数が流れに及ぼす全体的傾向 前節までに得られた結果からわかるように、一様電磁場の作用下における導電性磁性流体の定常流れを特徴づける主な無次元数は ϵ 、 λ 、 Re_m 、 Per 、 σ 、 δ および ζ の7個である。また、導電性磁性流体の物質定数についてはまだ十分な測定結果が得られていないのが現状であり、ここでは従来の非導電性磁性流体および液体金属の物性値を目安として考えた。また、一般に装置の寸

法は粒子の大きさに比べて非常に大きい。そこで、ここでは次のような仮定をさらに設けて検討を進める。

(X I) 装置の寸法は粒子の径に比べて十分大きい($\lambda \rightarrow \infty$)。

この仮定を考慮すると、速度、流体および粒子の角速度の解析解はそれぞれ表3の式(46)、(47)および(48)のようになる。また、 ϵ 、 σ および ζ のパラメータの範囲は理論上可能な限り広くとり、次のように設定した。

$$0 \leq \epsilon < 1, 0 \leq \sigma < \infty, 0 \leq \zeta < \infty$$

ただし、 Re_m および Per は仮定を満足する範囲とし、導電性磁性流体に対する δ の値は6.3節で明らかにされる。

6.2.1 極性効果パラメータ ϵ による影響 図2を見ると粒子の角速度は ϵ を小さくすると非極性の電磁流体の流れに近づくことがわかる。速度、流体および粒子の角速度の解に対して $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとると表3の式(49)、(50)および(51)を得る。 x_2 はハルトマン数 Ha に相当するから、これらの式は非極性の電磁流体の流れに一致している。したがって ϵ を零に近づける、すなわち粒子の体積濃度を零に近づけると流れは非極性の電磁流体の流れに近づくことが確かめられる。また、この場合、非導電性磁性流体において全領域で成立していた $\Omega = \delta\omega$ の関係式は成立しない。

6.2.2 電場効果パラメータ ζ による影響 図3を見ると、電場効果パラメータを大きくすると流れが増速されることがわかる。このことは解析解(46)を見ても明らかである。このとき流体各点に働くLorentz力は次式で表される。

表2 平行平板間一定圧力こう配流れの解析解

Analytic Solutions			
v^*	$2\{k_1ch(ax^*)+k_2ch(bx^*)\}+k_0 \dots\dots\dots (43)$		
ω^*	$-k_1ash(ax^*)-k_2bsh(bx^*) \dots\dots\dots (44)$		
Ω^*	$2\{k_1f_1sh(ax^*)+k_2f_2sh(bx^*)\} \dots\dots\dots (45)$		
Coefficients			
D	$2g_1g_2\{ch(2a)ch(2b)-1\}-(g_1^2+g_2^2)sh(2a)sh(2b)$		
k_1	$-k_0[g_1g_2ch a\{ch(2b)-1\}-g_2^2shash(2b)]/D$	k_0	$\zeta/\sigma+2/Remo^2$
k_2	$-k_0[g_1g_2ch b\{ch(2a)-1\}-g_1^2shbsh(2a)]/D$	f_1	$-g_3a^3+g_4a$
g_1	$f_1+\delta a/2$	f_2	$-g_3b^3+g_4b$
g_2	$f_2+\delta b/2$	g_3	$(1+\epsilon)/2\epsilon\lambda^2g_5$
g_4	$(Remo^2-4\epsilon^2\lambda^2)/2\epsilon\lambda^2g_5$	g_5	$4\epsilon+Per\sigma^2h(1-h)$
a	$\sqrt{(\xi_1+\sqrt{\xi_1^2-4\xi_2})/2}$	b	$\sqrt{(\xi_1-\sqrt{\xi_1^2-4\xi_2})/2}$

$$\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \sigma_e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

この式を式(12)および $\mathbf{B} = (\mu_0 H_0, 0, B_z)$ であることを用いて書き換えると

$$\mathbf{F} = \sigma_e (\mu_0 v H_0 B_z - E_0 B_z) \mathbf{e}_x + \sigma_e \mu_0 H_0 (E_0 - \mu_0 v H_0) \mathbf{e}_z \quad (52)$$

となる。このうち、流れ方向成分は右辺第3項および第4項である。これらの項より明らかなように、電場効果パラメータを大きくする、すなわち印加電場 E_0 を大きくすると流れ方向に働く Lorentz 力が増加することになり、したがって流れが増速される。また、粒子の角速度分布および図4の磁場効果パラメータを変

化させた場合の粒子の角速度分布を見ると、 σ が大きい場合にはどの値にかかわらず平板間中央付近では粒子の回転がほぼ零になることがわかる。電場効果パラメータ ϵ を大きくすると壁面近傍では粒子の回転は激しくなるが、平板間中央付近では粒子の回転はほぼ零でほとんど変化しない。

6・2・3 磁場効果パラメータ σ による影響 図4を見ると、磁場効果パラメータ σ を大きくすると流れは減速されることがわかる。これは先の式(52)を用いて説明することができる。式(52)の流れ方向成分である右辺第3項と第4項のうち第3項は流れを増速させ

表3 解析解の極限

$\lambda \rightarrow \infty$	v^*	$k_0\{1-\text{ch}(\kappa_1 x^*)/\text{ch}\kappa_1\} \dots\dots\dots (46)$				
	ω^*	$k_0 \kappa_1 \text{sh}(\kappa_1 x^*)/2\text{ch}\kappa_1 \dots\dots\dots (47)$				
	Ω^*	$2k_0 \kappa_1 \text{Esh}(\kappa_1 x^*)/g_5 \text{ch}\kappa_1 \dots\dots\dots (48)$				
	Coefficient		κ_1	$\sigma \sqrt{\text{Rem} g_5}/(g_5 + \text{Per} \epsilon \sigma^2 h(1-h))$		
$\epsilon \rightarrow 0$	v^*	$k_0\{1-\text{ch}(\kappa_2 x^*)/\text{ch}\kappa_2\} \dots\dots\dots (49)$				
	ω^*	$k_0 \kappa_2 \text{sh}(\kappa_2 x^*)/2\text{ch}\kappa_2 \dots\dots\dots (50)$				
	Ω^*	$\delta \kappa_2 k_0 \tanh \kappa_2 \text{sh}(\kappa_3 x^*)/2\text{sh}\kappa_3 \dots\dots\dots (51)$				
	Coefficients		κ_2	$\sigma \sqrt{\text{Rem}}$	κ_3	$\sigma \lambda \sqrt{\text{Rem} h(1-h)}$
$\sigma \rightarrow \infty$	v^*	0 $\dots\dots\dots (53)$				
	ω^*	0 $\dots\dots\dots (54)$				
	Ω^*	0 $\dots\dots\dots (55)$				
$\zeta \rightarrow 0$	v^*	$k_3(1-x^{*2})-2k_4\{\text{ch}\kappa_4-\text{ch}(\kappa_4 x^*)\} \dots\dots\dots (56)$				
	ω^*	$k_3 x^*-k_4 \kappa_4 \text{sh}(\kappa_4 x^*) \dots\dots\dots (57)$				
	Ω^*	$4\epsilon k_3 x^*/g_5-2k_4 g_6 \text{sh}(\kappa_4 x^*) \dots\dots\dots (58)$				
$\text{Rem} \rightarrow 0$	Coefficients		κ_4	$\lambda \sqrt{g_5-4\epsilon^2}/(1+\epsilon)$	k_3	$g_5/(g_5(1+\epsilon)-4\epsilon^2)$
			k_4	$(\delta g_5-4\epsilon)k_3/(\delta g_5 \kappa_4-2g_5 g_6) \text{sh}\kappa_4$		
			g_6	$2\epsilon \kappa_4/g_5+(1+\epsilon)\kappa_4^3/2\epsilon \lambda^2 g_5$

2-1

2-2

2-3

$$(\sigma = 500, \zeta = 500, \text{Rem} = 10^{-3}, \text{Per} = 10^{-5})$$

図2 極性効果パラメータ ϵ による変化

る方向に働き、第4項は減速させる方向に働く。印加磁場 H_0 を大きくする、すなわち磁場効果パラメータを大きくすると第4項が大きくなる割合は H_0 の大きさが二乗のオーダーで効いてくるため第3項が H_0 の増大につれて大きくなる割合よりも勝っている。したがって、印加磁場 H_0 は流れを増速させる働きと減速させる働きとの両方を持っているが、全体としては減速させる働きがあるものとみなせることになる。また、図4の粒子の角速度分布を見ると、磁場効果パラメータを大きくする、すなわち強い磁場を印加すると磁気トルクの作用によって粒子はその回転が抑えられ回転しにくくなることを示している。したがって、印加し

た磁場が弱い場合には速度こう配が支配的で、印加した磁場が強い場合には磁化の作用が支配的となる。表3の式(53), (54)および(55)に磁性効果パラメータ $\sigma \rightarrow \infty$ の極限における解析解を示した。これらより σ を大きくしていくと流れおよび粒子の回転が抑えられ、 $\sigma \rightarrow \infty$ の極限において流れや粒子の回転は完全に止められてしまうことが確かめられる。

6・2・4 磁気レイノルズ数 Re_m による影響 図5の速度分布を見ると磁気レイノルズ数 Re_m を大きくする、すなわち磁性流体の電気伝導率を大きくすると壁面近傍では増速の傾向が見られ、平板間中央付近では減速傾向が見られる。したがって Re_m を大きくする

($\epsilon=0.4, \sigma=500, Re_m=10^{-3}, Per=10^{-5}$)

図3 電場効果パラメータ ζ による変化

($\epsilon=0.4, \zeta=500, Re_m=10^{-3}, Per=10^{-5}$)

図4 磁場効果パラメータ σ による変化

($\epsilon=0.4, \sigma=500, \zeta=500, Per=10^{-5}$)

図5 磁気レイノルズ数 Re_m による変化

とその結果, 壁面の影響が平板間の中央付近まで伝わりにくくなる。壁面近傍では流体の角速度は大きくなっていく。また, 粒子の角速度分布を見ると Re_m を大きくすると壁面近傍では粒子の回転が激しくなるが平板間中央付近では粒子の回転はほぼ零でほとんど変化しない。また, $Re_m \rightarrow 0$ かつ $\zeta \rightarrow 0$ の極限をとると表3の式(56), (57)および(58)のようになる。これらは非導電性磁性流体の解に一致する。したがって, Re_m および ζ を零に近づける, すなわち磁性流体の電気伝導率を小さくし, 印加電場を小さくすると非導電性磁性流体の流れに近づくことが確かめられる。

6・3 壁面係数 δ の適用限界 $\lambda \rightarrow \infty$ における解(47)と(48)を比較すると, 壁面上を除くあらゆる場所で

$$\Omega^* = \frac{4\epsilon}{4\epsilon + Per\sigma^2 h(1-h)} \omega^* \dots\dots\dots (59)$$

が成立することがわかる。したがって, 本解析モデルにおける壁面係数 δ の適切な範囲は

$$0 \leq \delta \leq \frac{4\epsilon}{4\epsilon + Per\sigma^2 h(1-h)} \dots\dots\dots (60)$$

となる。上式の右辺は前報⁽¹²⁾での $1/(1+\sigma_m)$ に相当するものであり, 式(60)で示される範囲の妥当性はすでに保証されている。ただし, σ_m は磁性効果パラメータである。

6・4 電磁場に関するパラメータについての検討

前報⁽¹²⁾ではハルトマン数 Ha および磁性効果パラメータ σ_m を用いた。ここではこれらのパラメータと磁場効果パラメータ σ との関係式を与えておく。ハルトマン数および磁性効果パラメータは本報における $\sigma, \epsilon, Per, Re_m$ および h を用いて次のように書き換えられる。

$$Ha = \sigma \sqrt{Re_m}$$

$$\sigma_m = Per\sigma^2 h(1-h)/4\epsilon$$

7. 結 言

著者らが誘導した内部自由度をもつ導電性磁性流体に対する基礎方程式系を用いて, 流れと印加電磁場が直交する場合の平行平板間の一定圧力こう配流れについて理論解析を行った結果, 次のような結論を得た。

(1) 平行平板間の一定圧力こう配流れに対して表2に示す速度, 流体および粒子の回転角速度の解析解が求められた。これらの解を特徴づける無次元数は極

性効果パラメータ ϵ , 磁場効果パラメータ σ , 回転ベクレ数 Per , 磁気レイノルズ数 Re_m , 寸法効果パラメータ λ , 壁面係数 δ および電場効果パラメータ ζ である。

(2) 導電性磁性流体の流動特性を支配する主な無次元数が流れに及ぼす影響は次のとおりである。

(a) 極性効果パラメータ ϵ を小さくすると, 流れは非極性の電磁流体の流れに近づく。

(b) 電場効果パラメータ ζ を大きくすると Lorentz 力が増加し, 流れは増速される。

(c) 磁場効果パラメータ σ を増大させると, 流れは減速され, 粒子の回転は磁化作用によって抑えられ, 粒子の角速度は減少する。

(d) 磁気レイノルズ数 Re_m を増大させると壁面の影響が平板間中央付近にまで伝わりにくくなり, 壁面近傍での粒子の回転が激しくなる。また, 磁気レイノルズ数 Re_m と電場効果パラメータ ζ をともに小さくしていくと流れは非導電性磁性流体の流れに近づく。

(3) 本解析モデルにおける壁面係数 δ の適切な範囲は次式で与えられる。

$$0 \leq \delta \leq \frac{4\epsilon}{4\epsilon + Per\sigma^2 h(1-h)}$$

最後に, 本論文の作成にあたり, 慶応義塾大学理工学部, 志澤一之氏の適切な助言を得たことに感謝する。また, 本研究の一部に対して文部省科学研究費の補助を受けたことをここに記し, 感謝の意を表す。

文 献

- (1) Brenner, H., *J. Coll. Interface Sci.*, **32**-1(1970), 141.
- (2) Brenner, H. and Weissman, M. H., *J. Coll. Interface Sci.*, **41**-3(1972), 499.
- (3) Buyevich, Iu. A., *J. Appl. Math.*, **38**-2(1974), 274.
- (4) 神山・奎屋, 機論, **47**-424, B(1981), 2290.
- (5) 神山・ほか2名, 文献(4)の2299ページ.
- (6) Kaneda, T., ほか2名, *JSME*, **30**(1987), 1567.
- (7) McTague, J., *Chem. Phys.*, **52**-1(1969), 133.
- (8) Rosensweig, R. E., ほか2名, *J. Coll. Interface Sci.*, **29**-4(1969), 680.
- (9) 志澤・ほか3名, 機論, No. 840-12(1984), 146.
- (10) 志澤・棚橋, 機論, **52**-473, B(1986), 325.
- (11) 志澤・ほか2名, 機論, **53**-492, B(1987), 2404.
- (12) 志澤・ほか2名, 文献(11)の2423ページ.
- (13) Shliomis, M. I., *Sov. Phys. JETP*, **34**-6(1972), 1291.
- (14) 棚橋・岡永, 機論, **55**-511, B(1989), 749.