移動液膜自由界面のメニスカス不安定性*

古口 日出男^{*1}, 矢 田 敏 夫^{*1}

A Meniscus Instability for the Moving Free Surface of Thin Liquid Film

Hideo KOGUCHI and Toshio YADA

The authors studied the instability of the meniscus of a viscous liquid between two closely spaced tilted plates when they are separated from each other in the normal direction of the plates. The instability has a close relation with that of the creeping flow in a Hele-Shaw cell and is caused by viscous forces. In the present paper, a local capillary number is newly defined by the local velocity of the leading meniscus the instability criterion is theoretically deduced. The simple criterion for the instability concerned with the local capillary number and the nondimensional wave number for perturbation on the meniscus agrees well the experimental results. The theoretical formulation of the disturbances of the free surface predicts fairly well the experimental wavelength.

Key Words: Viscous Flow, Stability, Meniscus, Linear Instability Theory, Hele Shaw Cell, Neutral Stability, Wave Number, Local Capillary Number

1. 結 言

著者らは、粘性流体を間に入れた傾斜平板を引き離した際の自由表面のメニスカス不安定性に関して一連の研究を行っている。この現象は、接着テープを引きはがすとき⁽⁴⁾や軸受けの油膜が破断⁽³⁾⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾するとき、円筒ローラによるコーティング⁽¹⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹³⁾⁽¹⁶⁾などで観察される自由表面の不安定性と同じものである。そして、これらの流れは基本的には遅い粘性流れである Hele-Shaw セル内の流れ⁽⁵⁾⁽¹¹⁾と類似のもので、表面張力と粘性力がそれぞれ界面を安定あるいは不安定にする要因である。著者らは、流体をはさむ板を引き離す際の自由表面の乱れの発生クライテリアや乱れの波長などについて研究を行ってきた⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾。

前報⁽¹⁹⁾では、板を引き離す速度で修正キャピラリー数を定義したが、本論文では移動する界面位置における移動速度を用いた局所キャピラリー数を新たに提案する。この局所キャピラリー数は、Hele Shaw セルなどの研究⁽⁶⁾⁽¹⁰⁾⁽¹²⁾⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾で用いられている従来のキャピラリー数の定義の自然な拡張になっており、将来それらの研

究結果と本研究の結果を比較することができると考えられる。本報では、その局所キャピラリー数と乱れの中立的安定域および乱れの無次元波数と局所キャピラリー数との関係を導き、実験結果と比較する。

2. メニスカス不安定の理論解析

基本解の誘導は、前報⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾で詳細に述べてあるので、ここではその概略を説明するにとどめる。

2・1 薄い液膜内の流れ(摂動がない場合) 解析する液膜の形状と座標系を図1に示す。ただし、すき間は y 軸方向には変化せず、 x 軸は常にすき間の中央に取るものとする。はじめ板の一端は閉じており(B端)、他端は初期すき間 h_0 に開いている(A端)とする。この板を z 軸方向(板面に垂直な方向)に板の傾斜を一定に保ったまま、速度 V で互いに引き離す(負のスクイーズ運動)。その時の液膜内の流体の速度 u, v は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \\ v &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

ここで、 u, v は x, y 軸方向の速度、 p は圧力、 μ は粘性係数である。なお、 h は図1の傾斜平板間の液膜の

* 平成元年10月15日 第67期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和63年11月18日。

*¹ 正員、長岡技術科学大学工学部 (〒940 21 長岡市上富岡町1603-1)。

厚さで、 $\alpha = V_s t / h_0$ (t は時間) とおけば、 $h = h_0(1 + \alpha - x/L)$ で表される。ここで、 L は x 軸方向の板の長さである (A 端と B 端の長さ)。

式(1)と連続の式から、次の圧力の支配方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 12\mu V_s \quad \dots\dots\dots (2)$$

今、圧力は y 軸方向に変化しないとして式(2)を簡化し、そのときの圧力を p_0 とおき、次式を得る。

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp_0}{dx} \right) = 12\mu V_s \quad \dots\dots\dots (3)$$

この式を解くと、圧力 p_0 は次式のように求まる。

$$p_0(x) = \frac{6\mu V_s L^2(1+\alpha)}{h_0 h^2} - \frac{12\mu V_s L^2}{h_0^2 h} + \frac{C_1 L}{2h_0 h^2} + C_2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

メニスカスの曲率半径を液膜の厚さ h の $1/2$ として境界条件に表面張力 T を考慮することにより、 C_1 と C_2 は次式のように求まる。

$$C_1 = -\frac{4Th_0 h_1 h_2}{L(h_1 + h_2)} - 12\mu V_s L(1+\alpha) + \frac{24\mu V_s L h_1 h_2}{h_0(h_1 + h_2)}$$

$$C_2 = p_a - \frac{2T}{h_1 + h_2} + \frac{12\mu V_s L^2}{h_0^2(h_1 + h_2)} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 p_a は大気圧、 h_1 と h_2 は A 端側と B 端側の自由表面の位置における液膜の厚さであり、 $h_1 = h_0(1 + \alpha - x_1/L)$ 、 $h_2 = h_0(1 + \alpha - x_2/L)$ で表せられる。なお、 x_1 と x_2 は A 端側と B 端側の液膜の x 座標位置である。また、自由表面の運動方程式は次式で与えられる⁽²⁰⁾。

図1 液膜の形状と座標系

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{V_s}{h_1} x_1 - \frac{C_1}{12\mu h_1}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{V_s}{h_2} x_2 - \frac{C_1}{12\mu h_2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

2・2 メニスカスの摂動解析 自由表面に摂動を与えた場合の解析についても前報で報告したが、ここでは Park と Homsy ら⁽⁶⁾ の Hele-Shaw セルの界面の境界条件の研究を参考にして、本研究の境界条件を与えることにする。

ここでは、与えた摂動が成長する条件について詳細に検討する。いま、 y 軸方向の直線自由界面に振幅 ε 、波長 λ の摂動が与えられたとする。この時、A 端側の界面の x - y 面上の形状は次式で表されるとする。

$$S_1(x_1, y, t) = x_1(t) + \varepsilon e^{\omega t} \cos(ky) \quad \dots\dots\dots (7)$$

この式で x_1 は直線状の界面のある位置、 t は時間、 k は波数で $2\pi/\lambda$ である。

前報⁽¹⁹⁾で説明したように、自由界面近傍の圧力は界面に与えた摂動の周期で、界面の曲率に応じて変動する。ここでは、自由界面近傍の圧力分布をメニスカスの乱れを考慮して次のようにおく。

$$p(x, y, t) = p_0(x) + \varepsilon G(x) e^{\omega t} \cos(ky) \quad \dots\dots\dots (8)$$

なお、 $S_1 \leq x \leq S_2$ である。ここで S_2 は B 端側の自由表面の x - y 面上の形状である。

式(8)の $G(x)$ は、摂動のある自由表面の圧力の境界条件から、その符号[式(7)に対する位相のずれ π]も含めて決定される。まず、式(8)を式(1)に代入して速度 u 、 v を求め、それらの式を連続の式に代入して、 ε の一次の項をまとめ、 $G(x)$ に関する 2 階の常微分方程式をつくり、その式を解くと、 $G(x)$ の二つの解が無限級数の形で求まる。ところで、A 端側の乱れは B 端側の乱れとはほとんど関係ないと考えるのが妥当であり、さらに、実験でも A 端側が乱れても B 端側は乱れてない。このことから関数 $G(x)$ は、 $|x - x_1|$ が大きくなるにともない、零に近づく関数を選択する。その結果、次式が得られる。

$$G(x) = a_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^{2m} \xi^{2m}}{4^m (m+1)! m!} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $\xi = x - L(1 + \alpha)$ である。また、この式の未定定数 a_1 は、摂動がある自由表面の圧力の境界条件より決定される。

2・3 圧力の境界条件 ここでは、Park と Homsy ら⁽⁶⁾ の Hele-Shaw セルの研究で導かれた次式を参考にして、本研究の摂動がある界面の圧力の境界条件を考える。

$$p_a - p = -\frac{2T}{h_1} (1 + 3.8Ca^{2/3} + \dots)$$

$$= \frac{T}{R} \left\{ \frac{\pi}{4} + 0(Ca^{2/3}) \right\} \dots\dots\dots (10)$$

この式で $Ca = \mu U_x / T$, U_x は界面の x 軸方向の移動速度, R は y 方向の界面の曲率半径である. 彼らは界面の力の平衡方程式を $Ca \ll 1$ と $h/(2\lambda) \ll 1$ の場合に対して二重級数に摂動展開して解き, この式を導いた.

ここでは, 簡単のため式(10)のキャピラリ数 Ca に関する項を省略した式を圧力の境界条件として用いる. 式(10)に式(7)と式(8)を代入して整理すると, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} p_a - p_0(S_1) - \varepsilon G(S_1) e^{\omega t} \cos(ky) \\ = -T \left\{ \frac{2}{h(S_1)} - \varepsilon k^2 \frac{\pi}{4} e^{\omega t} \cos(ky) \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots (11)$$

この式を Taylor 展開して, ε の一次の項をまとめると次式が求まる.

$$G(x_1) = - \left. \frac{dp_0}{dx} \right|_{x=x_1} + T \left(\frac{2}{h_1^2} \frac{dh_1}{dx} - k^2 \frac{\pi}{4} \right) \dots\dots\dots (12)$$

この式から, 式(9)の未定係数を求めると, 次式のようになる.

$$a_1 = \frac{-1}{h_1(x_1)} \left\{ 12\mu V_{sx_1} + C_1 + T \left(\frac{2h_0}{h_1^2 L} + k^2 \frac{\pi}{4} \right) \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここで,

$$\begin{aligned} h_1(x_1) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^{2m} \xi_1^{2m}}{4^m (m+1)! m!} \dots\dots\dots (14) \\ \xi_1 &= x_1 - L(1+a) \end{aligned}$$

2・4 中立安定曲線 ここでは, ω を求めることにより与えられた摂動の成長と減衰に関連する中立安定条件⁽²⁾⁽⁷⁾を求める. ω は界面の運動方程式から求めることができる. A 端側の自由表面の平均移動速度は, 式(1)を ε で積分し, 液膜厚さで割ることにより次式のように得られる.

$$u = - \frac{h^2}{12\mu} \frac{dp}{dx} \dots\dots\dots (15)$$

この式の左辺に, 式(7)を時間で微分して得た自由表面の移動速度を, 右辺に式(7)と式(8)を代入すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} + \varepsilon \omega e^{\omega t} \cos ky &= - \frac{1}{12\mu} \left[h^2(x_1 + \varepsilon e^{\omega t} \cos ky) \right. \\ &\times \left. \left\{ \frac{dp_0}{dx} + \varepsilon \frac{dG}{dx} e^{\omega t} \cos(ky) \right\} \right] \end{aligned} \dots\dots\dots (16)$$

この式で ε の一次の項をまとめると次式が得られる.

$$\begin{aligned} \omega &= - \frac{1}{12\mu} \left[h_1^2 \frac{dG}{dx} + \frac{d}{dx} \left(h^2 \frac{dp_0}{dx} \right) \right]_{x=x_1} \\ &\dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

ところで乱れの成長は, ε を含む項の $\exp(\omega t)$ の ω の正負により決まる. この ω は, 式(17)から次のように求められる.

$$\begin{aligned} \omega &= - \frac{Th_1^2}{12\mu L^3} \left[Ca_1 12 \left(\frac{I_2 L}{I_1} - \frac{h_0}{h_1} + \frac{V_s}{U_x} \frac{L}{h_1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2h_0 L}{h_1^2} + \frac{\pi k^2 L^2}{4} \right) \frac{I_2 L}{I_1} \right] \end{aligned} \dots\dots\dots (18)$$

ここで,

$$I_2(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^{2m} \xi_1^{2m}}{2^{2m} (m+1)! (m-1)!} \dots\dots\dots (19)$$

なお, Ca_1 はメニスカスの局所的な移動速度 $U_x (= V_{sx_1}/h_1 - C_1/12\mu h_1)$ を含む次式で定義される無次元パラメータで, 局所キャピラリ数と呼ぶ.

$$Ca_1 = \frac{\mu U_x}{T} \left(\frac{L}{h_1} \right)^2 \dots\dots\dots (20)$$

この局所キャピラリ数の定義は, 従来のキャピラリ数の定義の自然な拡張になっており, Hele-Shaw セル⁽⁶⁾⁽¹⁰⁾⁽¹²⁾⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾に関する他の実験や理論と本研究の結果を比較する場合に都合がよいと考えられる.

式(18)は, ω に対する Ca_1 と波数 kL の関係と見ることができ, 図2に, 乱れの波数 kL と ω の関係の一例を示す. この図は, $h_0 = 1.05$ mm, $V_s = 1.0$ mm/min, $\mu = 10.7$ Pa·s, $T = 21.2$ m·N/m, $L = 60$ mm の条件において自由表面の運動方程式(6)をルンゲ・クッタ・ギル法で解いて x_1 と h_1 を求め, $x_1 = 3.0$ mm の場合に対して局所キャピラリ数を 100, 500, 1000, 5000, 10000 と変えて得られたものである. この場合 ω が正の領域は, kL が 0.942 からそれぞれの Ca_1 に対して 25.1, 75.4, 94.2, 251, 377 までの範囲であった. すなわち, 局所キャピラリ数が大きくなるに伴い, ω の正の領域が広がっていくことがわかる.

($h_0 = 1.05$ mm, $V_s = 1.0$ mm/min, $\mu = 10.7$ Pa·s, $T = 21.2$ m·N/m, $L = 60$ mm, $x_1 = 3.0$ mm, $Ca_1 = 100, 500, 1000, 5000, 10000$)

図2 乱れの無次元波数 kL と ω の関係

一般に、乱れが成長する場合は、時間とともに乱れが大きくならなければならないので、 ω は正でなければならない。そして、その限界は式(18)から $\omega=0$ と置いて得られ、その結果は式(21)のように得られる。

$$Ca_l = Ca_{stab} \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで、 Ca_{stab} は次式で与えられる。

$$Ca_{stab} = \frac{1}{12} \frac{\frac{\pi}{4} k^2 L^2 + \frac{2h_0 L}{h_1^2}}{1 + \left(\frac{V_s L}{U_s h_1} - \frac{h_0}{h_1} \right) \frac{I_1}{I_2 L}} \quad \dots\dots\dots (22)$$

式(21)を満足する曲線が中立安定曲線であり、 $Ca_l < Ca_{stab}$ の領域が不安定領域である。図3は、条件が $V_s=0.05$ mm/min, $h_0=0.3$ mm, $\mu=10.7$ Pa·s, $T=21.2$ m·N/mの場合で、前述したように式(6)を解いて液膜自由表面の位置を求め、その位置 $x_1=0, 1, 3, 5, 7$ mmにおける中立安定曲線の一例である。この図より、液膜の移動に伴って不安定領域が Ca_l の大きいほうに移動していくこと、乱れの発生に臨界局所キャピラリ数があり、これに対応して臨界波長を与える無次元臨界波数 $K_{crit}L$ があることがわかる。

次に、板の長さ L を変えた場合の中立安定曲線の変化について示す。図4は、 $T=21.2$ m·N/m, $\mu=1.02$ Pa·s, $V_s=1.0$ mm/min, $h_0=0.5$ mm, $x_1=1.0$ mmの場合で、 $L=10, 20, 40, 60, 80, 100, 150, 200, 250, 300$ mmと変えて得られた中立安定曲線の一例である。この場合、 L を変えることは板の傾斜角 $h_0/(2L)$ を変えることを意味する。この図から、板の傾斜角が小さくなるに伴い、臨界局所キャピラリ数が大きくなっていくことがわかる。さらに、板の初期すき間 h_0 を変えた場合の中立安定曲線の変化を図5に示す。この図は $x_1=1.0$ mm, $T=21.2$ m·N/m, $\mu=1.02$ Pa·s, $V_s=1.0$ mm/min, $L=60$ mmにおいて h_0 を0.01~1.0 mmまで変えて得られたものである。この図で h_0 が小さくなるに伴い、臨界局所キャピラリ数と臨界波数がともに大きくなっていくことがわかる。 L と h_0 を変えた場合の臨界局所キャピラリ数の変化は、およそ次式から推定することができる。すなわち、簡単のため自由表面の位置が $x_1=0$ の近傍にあるとする。一般に、無次元波数 kL が小さくなると I_1/I_2L は小さくなり、その結果式(21)は次式のように簡単になる。

$$Ca_l = \frac{h_0 L}{6h_1^2} \quad \dots\dots\dots (23)$$

あるいは、

$$Ca = \frac{h_0}{6L} \quad \dots\dots\dots (24)$$

式(24)は、 $Ca=\mu U_s/T$ が与えられたとき、その値が

($V_s=0.05$ mm/min, $h_0=0.3$ mm, $\mu=10.7$ Pa·s, $T=21.2$ m·N/m, $x_1=0, 1, 3, 5, 7$ mm)

図3 自由表面移動による中立安定曲線と無次元波数との関係の変化

($T=21.2$ m·N/m, $\mu=1.02$ Pa·s, $V_s=1.0$ mm/min, $h_0=0.5$ mm, $x_1=1.0$ mm, $L=10, 20, 40, 60, 80, 100, 150, 200, 250, 300$ mm)

図4 板の長さ L を変えた場合の中立安定曲線と無次元波数との関係

($x_1=1.0$ mm, $T=21.2$ m·N/m, $\mu=1.02$ Pa·s, $V_s=1.0$ mm/min, $L=60$ mm, $h_0=0.01\sim 1.0$ mm)

図5 板の初期すき間 h_0 を変えた場合の中立安定曲線と無次元波数との関係

板の傾斜角の1/3以上であると自由表面が乱れる可能性があることを意味する。

厳密に無次元波数の臨界値を求めるためには、式(22)を k で微分し、それを零とする。

$$\frac{\pi}{2} k L^2 \left(\frac{I_2 L}{I_1} + \frac{V_s L}{U_x h_1} - \frac{h_0}{h_1} \right) - \left(\frac{\pi}{4} k^2 L^2 + \frac{2 h_0 L}{h_1^2} \right) \times \left(\frac{V_s L}{U_x h_1} - \frac{h_0}{h_1} \right) \frac{I_2 L}{I_1} \frac{d}{dK} \left(\frac{I_1}{I_2 L} \right) = 0 \quad \cdots (25)$$

この式は、無限級数を含む非線形方程式であるが、前述した図から実数の極値は一つであり、その値はニュートン法および繰返し代入法で求めることができる。しかし、これは実際に計算する必要はなく、臨界局所キャピラリ数と臨界波数は次節で示す式(26)の線上を動く。

2・5 最大成長速度の乱れ 次に、 ω を最大にする波数の条件により局所キャピラリ数と波数の関係を導く。式(18)の ω を波数 K で微分することにより、次式が得られる。

$$Ca_l = \frac{\pi}{48} \left\{ (kL)^2 + \frac{2h_0 L}{h_1^2} + k \frac{I_1}{I_2} \frac{d}{dk} \left(\frac{I_2}{I_1} \right) \right\} \quad \cdots (26)$$

この式は、局所キャピラリ数 Ca_l と乱れの波長 λ の関係であり、波長が短くなると第1項目に対して第2項目は無視でき、さらに第3項目の分母はほぼ1になるため簡単な式に変形できる。その時、波長は次式で表すことができる。

$$\lambda = \frac{L \pi^{3/2}}{2 \sqrt{Ca_l}} \quad \cdots (27)$$

ところで、前述した臨界波長と臨界局所キャピラリ数は、式(26)で与えられる線上を移動する。このことは、式(18)を k で微分する際、 $Ca_l = Ca_{stab}$ と $\partial Ca_{stab} / \partial k = 0$ の関係を考慮することにより容易に示すことができる。

2・6 実験との比較 乱れの無次元波数 kL の実験結果を中立安定曲線の式(21)(実線)および式(26)(破線)とともに図6に示す。ところで、実験方法は次のようである。図1に示す2枚のガラス板をA端側の初期すき間 h_0 を0.3, 0.5, 0.75, 1.05 mm, B端側を閉じて、板の傾きを固定したまま一定速度 V_s (0.05~500 mm/min)で引き離し、この時のA端側の自由表面に発生する乱れを測定する。乱れの波長は、最初に目視により確認できたときの値である。この図に示した結果は、粘度 $\mu=1.02, 3.20, 10.7$ Pa·s, 表面張力 $T=21.2$ m·N/mのシリコンオイルと $\mu=1.61$ Pa·s, $T=63.4$ m·N/mのグリセリンに対するもので

ある。なお、図中の実験点に対する局所キャピラリ数は、実験での波長の測定位置の x 座標における h_1 および速度を数値計算により求め、局所キャピラリ数の定義式(20)により求めた。図中には、 h_0 が0.3 mmと1.05 mmの場合の乱れを測定した位置における代表的な理論計算結果を示しておいたが、これ以外のすき間における理論曲線は図に示した曲線の間にある。

この図で実験における自由表面の乱れは、中立安定曲線よりも下すなわち不安定領域で発生しており、乱れの成長速度が最大の条件で得られた式(26)の近傍にある。前報⁽¹⁹⁾における計算結果と実験結果の差は、局所キャピラリ数を用いることにより説明できる。また、この図から式(26)は乱れの発生条件の一部を満たしているだけであり、無次元波数が小さい(波長が長い)領域では安定領域にあることもわかる。これらのことから、メニスカスの移動速度を用いた局所キャピラリ数を用いれば、自由表面に発生する乱れに関する実験結果は説明することができると考えられる。

3. 結 論

本論文は、傾斜平板間の薄いすき間に粘性流体を入れて、板を引き離した時の移動自由表面の不安定性を論じたものである。その結果をまとめると次のようになる。

(1) 従来のキャピラリ数に対応して局所キャピラリ数を新たに提案して、その数と中立安定曲線および乱れの波数の関係式を解析的に求め、実験と比較した結果、本研究で求めた式により実験結果をよく説明することがわかった。

(2) 液膜自由表面が時間とともに移動する場合の

(実線：中立安定曲線、破線：最大成長速度の線)

図6 乱れの無次元波数 kL に対する局所キャピラリ数の理論式と実験結果および中立安定曲線の関係

中立安定曲線の変化を調べた。その結果、移動とともにその曲線は局所キャピラリ数の大きいほうに移動することがわかった。

(3) 傾斜平板の傾斜角を小さくすると、臨界局所キャピラリ数および無次元臨界波数は大きくなる。これを通常のキャピラリ数の定義で考えると、自由表面は傾斜角の1/3以上のキャピラリ数で、乱れる可能性があることがわかった。

文 献

- (1) Carter, G. C. and Savage, M. D., *Math. Eng. Ind.*, **1** (1987), 83-95.
- (2) Chuoke, R. L., ほか3名, *Pet. Trans. AIME*, **216** (1959), 188-194.
- (3) Dalmaz, G., *Trans. ASME, J. Lub. Tech.*, **102**(1980), 466-477.
- (4) McEwan, A. D. and Taylor, G. I., *J. Fluid Mech.*, **26** (1966), 1-15.
- (5) Nittmann, J., Daccord, G. and Stanley, H. E., *Nature*,

- 314**(1985), 141-144.
- (6) Park, C. W. and Homsy, G. M., *J. Fluid Mech.*, **139** (1984), 291-308.
- (7) Park, C. W., Gorell, S. and Homsy, G. M., *J. Fluid Mech.*, **141**(1984), 257-287.
- (8) Pearson, J. R. A., *J. Fluid Mech.*, **11**(1960), 481-500.
- (9) Pitts, E. and Greiller, J., *J. Fluid Mech.*, **11**(1961), 33-50.
- (10) Reinelt, D. A., *J. Fluid Mech.*, **183**(1987), 219-234.
- (11) Saffman, P. G. and Taylor, G. I., *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, **245**(1958), 312-329.
- (12) Saffman, P. G., *J. Fluid Mech.*, **173**(1986), 73-94.
- (13) Savage, M. D., *J. Am. Inst. Chem. Eng.*, **30**-6(1984), 999-1002.
- (14) Savage, M. D., *J. Fluid Mech.*, **80**(1977), 743-756.
- (15) 文献(14)の757-767ページ.
- (16) Savage, M. D., *J. Fluid Mech.*, **117**(1982), 443-455.
- (17) Tabeling, P., Zocchi, G. and Libchaber, A., *J. Fluid Mech.*, **177**(1987), 67-82.
- (18) Taylor, G. I., *J. Fluid Mech.*, **10**(1961), 161-165.
- (19) 古田・岡田, 機論, **53**-491, B(1987), 2062.
- (20) 古田, 文献(19)の2070ページ.

討 論

〔質問〕 長谷川 英治〔慶応義塾大学理工学部〕

局所キャピラリ数をもとに臨界条件を求めていくとよいということが述べられている。しかし、その中には前もって指定できない界面の移動速度 U_x が入っている。そこで、一つの提案なのだが、この問題には σ , μ , ρ , h_0 , L , V_s なる前もって指定できる量があるから、例えば、これらより三つの無次元パラメータ, $\mu(V_s/\sigma)(L/h_0)^2$, $V_s h_0/(\mu/\rho)$, h_0/L を作ることができる。したがって、臨界値を $\mu(V_s/\sigma)(L/h_0)^2 = f(V_s h_0/(\mu/\rho), h_0/L)$ のように示してはどうかということである。このようなキャピラリ数が適切である理由の一つは、 u はこの問題では大体 $(L/h_0)V_s$ の程度となっているから、粘性力 $\int_0^L \mu \frac{\partial u}{\partial z} dx \sim \mu \frac{(L/h_0)V_s}{h_0} L$ と表面張力による力 $\int_0^L \sigma dz \sim \sigma$ との比がこのキャピラリ数となっており、このバランスの上で系の安定不安定が決められるものと考えられるためである。ご意見をおきかせ願いたい。

〔回答〕 有意義なご提案に感謝する。キャピラリ数を前もって与えることができる量で定義したほうが適当ではないかとのご意見であるが、そのキャピラリ数に関して、著者らは質問者と同様な考えで、前報⁽¹⁹⁾では $\mu V_s/T(L/h_0)^3$ で定義した。そのときの解析は液膜が板端部にある場合のものであった。それに対して

本論文では新たに局所キャピラリ数を $\mu U_x/T(L/h_1)^2$ で定義し、これを用いて実験結果を整理した結果、理論と実験はよく一致したことを報告した。この定義に用いられている U_x は本論文では、 $U_x = -(V_s x_1/h_1 + C_1/12\mu h_1)$ を置き換えたものであり、数値計算あるいは実験により求める必要がある。

ところで、質問者の提案に従って、中立安定曲線の理論式を求めると、次式が得られる。

$$\frac{\mu V_s}{T} \left(\frac{L}{h_1} \right)^3 = \frac{1}{12} \frac{\frac{\pi}{4} k^2 L^2 + \frac{4 h_0 L}{h_1^2 (h_1 + h_2)} \left(3 h_1 + 2 h_2 + \frac{I_1}{I_2 L} \frac{h_0 h_2}{h_1} \right)}{\frac{h_1 (h_1 - h_2)}{h_0 (h_1 + h_2)} + \frac{2 h_2}{h_1 + h_2} \frac{I_1}{I_2 L}}$$

なお、この式でキャピラリ数の定義は $\mu V_s/T(L/h_1)^3$ とした。上式では図3のようにキャピラリ数の増大とともに中立安定曲線は1本にまとまらず、液膜の厚さに応じて曲線が描ける。また、式(23)に相当する臨界キャピラリ数は $h_0^2 L(3h_1 + 2h_2)/h_1^3(h_1 - h_2)$ で、 V_s が $T/\mu h_0^2(3h_1 + 2h_2)/(h_1 - h_2)$ 以上の速度で自由表現が乱れる可能性があることがわかる。式(26)の乱れの成長速度最大の条件式は、次式のように表される。

$$\frac{\mu V_s}{T} \left(\frac{L}{h_1} \right)^3 = \frac{h_0(h_1 + h_2)}{12 h_1(h_1 - h_2)}$$

$$\times \left[\frac{\pi}{4} k^2 L^2 + \frac{4h_0 L(3h_1 + 2h_2)}{h_1^2(h_1 + h_2)} + \frac{\frac{\pi(kL)^2}{2}}{k \frac{I_1}{I_2} \frac{d}{dk} \left(\frac{I_2}{I_1} \right)} \right]$$

この式は、前述した式と同様に液膜の厚さに応じて異なるキャピラリ数と乱れの波数の関係を与えるため、

乱れの実験結果を統一的に整理するには適当とは思われない。系の安定性を論ずるにはどのようなキャピラリ数を用いても可能であるが、実験結果を総合的に整理する場合には、本論文で提案したキャピラリ数のほうが適すると考える。