定常非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の曲線座標格子 に適用できる効率的差分スキーム*

申 炳 録^{*1}, 井小萩 利明^{*2}, 大宮司 久明^{*2}

An Efficient Finite-Difference Scheme for the Steady Incompressible Navier-Stokes Equations Using a Curvilinear Coordinate Grid

Byeong Rog SHIN, Toshiaki IKOHAGI, and Hisaaki DAIGUJI

An implicit time-marching finite-difference scheme for solving the steady incompressible Navier-Stokes equations is proposed. This scheme is based on the SMAC method for the curvilinear coordinate grid, where the delta-form approximate-factorization and the flux vector splitting techniques are applied, and some upstream-difference schemes and a staggered grid are also employed to suppress spurious error and numerical instabilities, especially for high Reynolds number flows. Numerical results for 2-D duct flow over a backward-facing step are shown, and compared with experimental data and existing numerical results to inspect the validity of the present scheme. The convergence rate to a steady state solution is improved several times in comparison with the explicit scheme, showing the present scheme to be very efficient.

Key Words: Fluid Mechanics, Numerical Analysis, CFD, Incompressible Navier-Stokes Equations, Finite-Difference Method, Implicit Time-Marching Scheme, Curvilinear Coordinate Grid.

1. 緒 言

非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の数値解法の研究は現在まで著しい数にのぼっている^{(1)~(5)}。圧力と流速を未知変数に用いる方法は、三次元の乱流も扱うことができ、今日一般的なものになっている。その中でChorin⁽⁶⁾に始まる人工圧縮性法は、圧縮性ナビエ・ストークス方程式の解法の成熟を背景に、主流になりつつある。Steger-Kutler⁽⁷⁾は線形化を導入、Soh⁽⁸⁾は直交曲線座標格子に拡張、Changら⁽⁹⁾はさらに一般曲線座標格子に拡張するとともに対角化の手法を導入、Hartwich-Hsu⁽¹⁰⁾はこれに流束分離法を適用、またDick⁽¹¹⁾は $c^2 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ を用い流速差分分離法を適用している。現在まで、圧縮性流れの解法のために開発されたおもな手法は非圧縮性流れに利用されたことになる。

他方、非圧縮性粘性流れの解法の主流をなしてきたのはMAC形解法である。MAC法は連続方程式の代わりに圧力方程式を用いるもので、この方法ではspurious誤差(圧力の市松模様の振動)の発生と連続

の条件からの逸脱は、食違い格子を用い圧力方程式に補正項を考慮することによって完全に除かれている。この解法は後に、Chorinの部分段階法⁽¹²⁾、Amsden-HarlowのSMAC法⁽¹³⁾、CamettoらのSIMPLE法⁽¹⁴⁾などに改良され、これらはさらにNakamura-Takemoto⁽¹⁵⁾、Reggio-Cararero⁽¹⁶⁾などによって一般曲線座標格子に拡張されている。曲線座標格子の部分段階法に関しては、最近塩島ら⁽¹⁷⁾が対流差分を導入して解の収束性を改善し、また著者らも前報⁽¹⁸⁾で反変速度の運動方程式を用い、MAC法の特色をいかした合理的スキームを提案している。

本論文では、MAC形解法の一つであるSMAC法を曲線座標格子に適用できるように拡張した新しい陰的スキームを提案する。基礎方程式には前報⁽¹⁸⁾と同様に反変速度の運動方程式を用い、速度の計算にはBeam-Warmingの Δ 形式近似因子化法⁽¹⁹⁾とChakravarthy-OsherのTVDスキーム⁽²⁰⁾を応用し、計算効率を高めるとともに解の安定化を図った。以下、2章には解法の詳細、3章には二次元後方ステップ流れの数値例について既存の結果との比較を示す。

記 号

g_{ij}, h_{ij} : 測度〔式(9)〕

* 原稿受付 平成元年8月3日。

^{*1} 正員、東北大学大学院 (〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)。

^{*2} 正員、東北大学工学部。

J : ヤコビアン [式(5)]

p : 圧力

Re : レイノルズ数 $= u_{\max}(H-h)/\nu$

u_i : 速度成分(二次元では u, v)

U_i : 反変速度成分(二次元では U, V) [式(6)]

x_i : デカルト座標系(二次元では x, y)

Z_i : 反変渦度成分 [式(7)]

t : 時間

Δt : 時間間隔

ϵ_{ijk} : エディントンの ϵ

ζ_i : 渦度成分

ν : 動粘性係数

ξ_i : 一般曲線座標系(二次元では ξ, η)

ϕ : 圧力補正量

添 字

n : n 時間レベル

$*$: 部分段階法の間中レベル

2. 非圧縮性流れの差分解法

2.1 基礎方程式 非定常非圧縮粘性流の基礎方程式は、ナビエ・ストークス方程式と連続方程式で次のように書かれる。

$$\mathbf{u}_t + \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

式(1), (2)に SMAC 法⁽¹³⁾を適用すれば,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \mathbf{u}^n - \Delta t (\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u})^n \\ \nabla^2 \phi &= \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \phi \\ p^{n+1} &= p^n + \phi \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

2.2 一般曲線座標系の基礎方程式 本論文では、MAC 法を緒言に述べたこの解法の特徴を完全に保ちながら曲線座標格子に適用できるように拡張するために、単に物理空間の運動方程式を写像空間で計算するのではなく、写像空間の速度である反変速度の運動方程式を写像空間で計算する。デカルト座標系(x_1, x_2, x_3)から一般曲線座標系(ξ_1, ξ_2, ξ_3)への変換の測度の関係とヤコビアンは

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \quad (5)$$

また、物理空間の速度(u_1, u_2, u_3)と反変速度(U_1, U_2, U_3)の関係はアインシュタインの総和規約を用いれば

$$U_i = (\partial \xi_i / \partial x_k) u_k \quad (i=1, 2, 3) \quad (6)$$

同様に、渦度($\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$)に対し反変渦度(Z_1, Z_2, Z_3)を定義し使うことにする。

$$Z_i = (\partial \xi_i / \partial x_k) \zeta_k \quad (i=1, 2, 3) \quad (7)$$

反変速度成分 U_i のナビエ・ストークス方程式は、式(1)に $J \nabla \xi_i$ を演算し、式(4)~(7)の関係を用いることによって次のように導くことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (JU_i) + \frac{\partial}{\partial \xi_i} (JU_i U_i) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{J} \left(U_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) \nabla \xi_i \\ = -Jg_{ii} \frac{\partial p}{\partial \xi_i} - \nu \epsilon_{ijl} \frac{\partial}{\partial \xi_i} h_{jk} Z_k \quad (l=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} g_{ij} &= \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \quad (i, j=1, 2, 3) \\ h_{ij} &= \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} \quad (i, j=1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(8)の左辺第3項は対流項を発散形にするために導入された付加項で、等間隔直方体格子では零になる。また、右辺の粘性項は一般に6項からなるが直交格子では2項だけ残る。連続方程式は式(2)から

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_i} (JU_i) = 0 \quad (10)$$

2.3 曲線座標格子の SMAC 法 曲線座標系の基礎方程式(8), (10)に式(3)の SMAC 法を適用すれば次のようになる。

$$\begin{aligned} JU_i^* &= JU_i^n - \Delta t \left\{ Jg_{ii} \frac{\partial p}{\partial \xi_i} + \frac{\partial}{\partial \xi_i} (JU_i U_i) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{u} \cdot \mathbf{J} \left(U_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) \nabla \xi_i + \nu \epsilon_{ijl} \frac{\partial}{\partial \xi_i} h_{jk} Z_k \right\}^n \quad (11) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(Jg_{ii} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial \xi_i} (JU_i^*) \quad (12)$$

$$JU_i^{n+1} = JU_i^* - \Delta t Jg_{ii} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} \quad (13)$$

$$p^{n+1} = p^n + \phi \quad (14)$$

この SMAC 法の式は、MAC 法と同様の食違い格子を用い、図1に示すように写像空間の立方体セルの中心に圧力、各面の中心に反変速度の法線成分、各りょうの中心に反変渦度の接線成分を定義すれば、具合良く解くことができる。すなわち、式(12)の差分方程式を式(13)の6個の差分方程式の一次結合に連続の条件を考慮して作れば、これらの式から得られる JU_i^{n+1} の値は連続の条件を十分に満足する。また、式(12)の差分方程式の7個の ϕ は隣接セルのものからなり、したがって圧力の spurious 誤差は発生しない。

2・4 陰的差分スキームへの拡張 SMAC 法では速度は陽的に圧力は陰的に解かれる。定常解を求める目的には、 Δt を大きく取り解の収束性を良くしたいが、陽的部分で Δt が安定条件によってきびしく制限される。本論文では、二次元問題に限定して、上述の SMAC 法の陽的部分を陰的に書き換えた新しい解法を提案する。式(11)ではオイラー前進法が用いられたが、オイラー前進法と台形則を選択的に用いることにすれば次式がえられる。

$$\begin{aligned} & JU^* + \Delta t \theta \left(\frac{\partial}{\partial \xi} JU^2 + \frac{\partial}{\partial \eta} JUV + \nu \zeta_\eta \right)^* \\ &= JU^n - \Delta t (1 - \theta) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} JU^2 + \frac{\partial}{\partial \eta} JUV + \nu \zeta_\eta \right)^n \\ &\quad - \Delta t \left\{ Jg_{11} p_\xi + Jg_{12} p_\eta - \mathbf{u} \cdot J \left(U \frac{\partial}{\partial \xi} + V \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \nabla \xi \right\}^n \\ & JV^* + \Delta t \theta \left(\frac{\partial}{\partial \xi} JUV + \frac{\partial}{\partial \eta} JV^2 - \nu \zeta_\xi \right)^* \\ &= JV^n - \Delta t (1 - \theta) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} JUV + \frac{\partial}{\partial \eta} JV^2 - \nu \zeta_\xi \right)^n \\ &\quad - \Delta t \left\{ Jg_{21} p_\xi + Jg_{22} p_\eta - \mathbf{u} \cdot J \left(U \frac{\partial}{\partial \xi} + V \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \nabla \eta \right\}^n \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ただし、

$$\zeta = \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (h_{21} U + h_{22} V) - \frac{\partial}{\partial \eta} (h_{11} U + h_{12} V) \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

θ は通常 1 に取られ、零のとき式(15)は上述の陽的 SMAC 法になる。式(15)の*印の付いている非線形項を n 時間レベルの既知の値を用いて線形化し、さらに Beam-Warming の Δ 形式近似因子化法⁽¹⁹⁾を応用すれば

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \Delta t \theta \left(JU \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{J} - \nu \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{h_{22}}{J} \right) \right\} \cdot \\ & \left\{ 1 + \Delta t \theta \left(JV \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{J} - \nu \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{h_{11}}{J} \right) \right\} \Delta JU^* \\ &= RHS_1 \\ & \left\{ 1 + \Delta t \theta \left(JU \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{J} - \nu \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{h_{22}}{J} \right) \right\} \cdot \\ & \left\{ 1 + \Delta t \theta \left(JV \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{J} - \nu \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{h_{11}}{J} \right) \right\} \Delta JV^* \\ &= RHS_2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (17)$$

図 1 曲線座標系の MAC 形格子

ただし、

$$\begin{aligned} & JU^* = JU^n + \Delta JU^* \\ & JV^* = JV^n + \Delta JV^* \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18)$$

また、式(17)の右辺は

$$\begin{aligned} RHS_1 &= -\Delta t \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} JU^2 + \frac{\partial}{\partial \eta} JUV - \mathbf{u} \cdot J \right. \\ &\quad \times \left(U \frac{\partial}{\partial \xi} + V \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \nabla \xi + J(g_{11} p_\xi + g_{12} p_\eta) + \nu \zeta_\eta \left. \right\}^n \\ RHS_2 &= -\Delta t \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} JUV + \frac{\partial}{\partial \eta} JV^2 - \mathbf{u} \cdot J \right. \\ &\quad \times \left(U \frac{\partial}{\partial \xi} + V \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \nabla \eta + J(g_{21} p_\xi + g_{22} p_\eta) - \nu \zeta_\xi \left. \right\}^n \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (19)$$

定常解を求める場合には、式(17)の右辺は残差値、 ΔJU^* 、 ΔJV^* は修正値を表し、残差が零に近づけば修正値も零に近づき解は収束する。したがって、解の精度は右辺の近似のみによって決まり、左辺の演算子は解の安定性、収束性、CPU 時間を考慮し適当なものを選ぶことが許される。式(17)の左辺の演算子は、付加項を省略し、粘性項の主要な部分だけを含めたものになっている。なお、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{h_{22}}{J} \Delta JV^* \rightarrow -\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{h_{22}}{J} \Delta JU^* \\ & \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{h_{11}}{J} \Delta JU^* \rightarrow -\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{h_{11}}{J} \Delta JV^* \end{aligned}$$

のように置いているが、この関係は J 、 h_{11}/J 、 h_{22}/J が定数で、 JU^* 、 JV^* が連続の条件を満足するときには正確に成り立つもので、これらの項は式(17)で拡散項として解の安定化に役立っている。

2・5 差分近似と計算手順 図 2 に写像面上の正方形格子と各変数の定義点を示す。 p 、 JU 、 JV 、 ζ の定義点を必要に応じ添字 P 、 U 、 V 、 X を付けて示すことにする。たとえば、点 X の JU の値はラグランジュ補間多項式より

$$\begin{aligned} (JU)_{0,0X} &= \{ -(JU)_{0,-2} + 9(JU)_{0,-1} \\ &\quad + 9(JU)_{0,0} - (JU)_{0,1} \} / 16 \end{aligned}$$

図 2 写像面上の MAC 形スキームの格子

のように求めることができる。

式(17)は近似因子化法により2段階に分けて解かれる。たとえば、

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \Delta t \left(JU \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{J} - \nu \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{h_{22}}{J} \right) \right\} \Delta JU^1 \\ & = RHS_1 \\ & \left\{ 1 + \Delta t \left(JV \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{J} - \nu \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{h_{11}}{J} \right) \right\} \Delta JV^1 \\ & = \Delta JU^1 \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

一般に、二次中心差分が用いられるが、左辺の対流項は

$$\begin{aligned} (JU f_\xi)_{0,0} &= \{ (JU + |JU|)_{0,0} (f_{0,0} - f_{-1,0}) \\ &+ (JU - |JU|)_{0,0} (f_{1,0} - f_{0,0}) \} / 2h \\ (JV f_\eta)_{0,0} &= \{ (JV + |JV|)_{0,0} (f_{0,0} - f_{0,-1}) \\ &+ (JV - |JV|)_{0,0} (f_{0,1} - f_{0,0}) \} / 2h \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

のように上流化され、また RHS_1 中の対流項も高レイノルズ数流れでは QUICK 法⁽²¹⁾や Chakravarthy-Osher 法⁽²⁰⁾に若干の修正を加えたもの⁽²²⁾⁽²³⁾で上流化される。また、式(13)の差分方程式は

$$\begin{aligned} JU_{0,0}^{n+1} &= JU_{0,0}^* - \Delta t (Jg_{11}\phi_\xi + Jg_{12}\phi_\eta)_{0,0} \\ (\phi_\xi)_{0,0} &= (\phi_{0,0} - \phi_{-1,0})/h \\ (\phi_\eta)_{0,0} &= (\phi_{-1,1} + \phi_{0,1} - \phi_{-1,-1} - \phi_{0,-1})/4h \dots\dots (22) \end{aligned}$$

圧力方程式(12)の差分方程式は、直接中心差分を取って作るのではなく、式(22)の一次結合に連続の条件を考慮して作られる。

$$\begin{aligned} & (Jg_{11}\phi_\xi + Jg_{12}\phi_\eta)_{1,0} - (Jg_{11}\phi_\xi + Jg_{12}\phi_\eta)_{0,0} \\ & + (Jg_{21}\phi_\xi + Jg_{22}\phi_\eta)_{0,1} - (Jg_{21}\phi_\xi + Jg_{22}\phi_\eta)_{0,0} \\ & = \{ (JU^*)_{1,0} - (JU^*)_{0,0} + (JV^*)_{0,1} - (JV^*)_{0,0} \} / \Delta t \\ & \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

ナビエ・ストークス方程式(20)、(22)、渦度の式(16)の計算では、上流の入口または固定壁境界上で反変速度 U, V の値が与えられる。また、圧力方程式(23)では、これらの境界上で式(22)に相当の式が境界条件として用いられる。このとき、境界近傍の圧力方程式からは境界の外の ϕ が具合良く除かれ、また境界上の JU^* または JV^* も不用になる。下流の出口境界上には、たとえば変数の一次変化が与えられる。

陰的時間進行法による定常流の計算手順は概略次のようなものである。

- (1) ヤコビアン J , 測度 g_{ij} , h_{ij} の決定。
- (2) 圧力方程式(23)の係数の設定。
- (3) 三重対角行列の連立一次方程式(20)をガウス消去法で解いて ΔJU^* , ΔJV^* を計算、式(18)から JU^* , JV^* を決定。
- (4) 式(23)の境界値問題を SOR 法またはベクトル計算機ではチェビシェフ SLOR 法で解いて ϕ を求

め、式(14)から p^{n+1} を決定。

(5) 式(22)から JU^{n+1} , JV^{n+1} を計算。

(6) u, v, ζ, D を計算。

$$u = x_\xi U + x_\eta V, \quad v = y_\xi U + y_\eta V \dots\dots\dots (24)$$

$$D_{0,0} = (JU_{1,0} - JU_{0,0} + JV_{0,1} - JV_{0,0})/h \dots\dots (25)$$

(7) 解が十分収束するまで、すなわち RHS_1, RHS_2 , ϕ が十分零に近づくまで(3)~(6)を反復する。

3. 数値計算結果

2章で提案した非圧縮性流れの曲線座標格子による陰的差分スキームの精度と効率を吟味するため、これまで数値スキームの検証に広く使われている二次元後方ステップ流れ⁽⁴⁾の数値計算を行った。後方ステップ流れはステップ背後に主再循環域を伴う比較的複雑な流れ場であり、またステップ近傍の曲線座標格子に対して流れはかなり厳しく変化する。図3に流路形状を示す。下流側流路の幅 H はステップ高さ h の3倍で、出口境界は循環域より十分下流に取られた。境界条件としては、入口境界上に放物形速度分布、出口境界上に $\partial^2 u / \partial x^2 = \partial^2 v / \partial x^2 = p = 0$, 固定壁境界上に $U = V =$

図3 $Re=100$ の定常流の計算結果と格子

表 1 再付着点の距離(x_R/h)

Scheme	Re = 100	Re = 300
Present	2.9	6.2
Artificial Compressibility	2.8	6.0
GAMM-Workshop	1.56-3.1	5.6-6.0
Experiment	3	6

表 2 各解法による定常解の計算時間の比較($Re=100$)

Scheme	Convective Term in RHS	Δt	CFL	Time Step n	CPU Time (Sec)	Maximum CFL
Implicit $\theta = 1$	Central	0.5	5.598	342	5.017	22.764
	Q U I C K	0.5	5.590	338	5.429	22.726
	T V D	0.5	5.568	336	6.027	22.639
	Crank-Nicholson	0.3	3.347	414	6.116	5.590
A D I		0.1	1.1	1135	13.385	1.1
Euler Explicit		0.044	0.49	1087	13.081	0.49

図 4 $Re=5000$ の定常流の計算結果

0 と式(13)から得られる ϕ の第 2 種境界条件が与えられた。定常解を求める計算では、まず境界条件を満足する適当な初期値を与え、 Δt を一定として前節の陰的差分スキームで反復計算を行い、解の収束は RHS_1 , RHS_2 , ϕ のすべてが 5×10^{-5} 以下になった時点で判定した。なお、以下の計算例では式(25)の D の値は 10^{-5} 以下になり、連続の条件は十分に満足されていた。図 3 には、レイノルズ数 $Re=100$ の場合の計算格子(70×21)と等渦度線、流線、速度ベクトル、等圧力線の計算結果を示す。ここで、レイノルズ数は入口幅と最大速度で $Re = u_{\max}(H-h)/\nu$ と定義する。計算格子は、だ円形方程式のディリクレ問題を解いて発生させた非直交曲線座標格子で、固定壁境界に少しよせたものである。図 3 は式(19)の右辺の対流項に修正 QUICK 法⁽²²⁾を用いた場合の計算結果であるが、レイノルズ数が小さいため中心差分を用いた結果とも完全に同じになる。また、前報⁽¹⁸⁾の結果とも良く一致する。なお、対流項に TVD 法を用いた場合は、一次精度上流差分への切換えを含むため、ステップ背後の圧力分布に多少差が見られるが、全体的にはほとんど差異はなかった。以下には、修正 QUICK 法を用いた結果のみを示す。

図 4 には、 $Re=5000$ の流れの場合の計算結果を示す。出口境界条件を満足させるため、計算領域を下流

図 5 レイノルズ数による再付着点位置の変化

側に延長しており、格子点数は 110×21 である。このレイノルズ数領域になると、対流項に中心差分を用いたスキームでは解が発散する。修正 QUICK 法では、 $Re=5000$ でも一応安定に計算ができ定常解が得られる。流れは上下固定壁に沿って交互に二次はく離泡の形成されたものになる。ここで、本スキームの精度を吟味するために、主循環域の再付着点位置の比較を図 5 および表 1 に示す。本結果は、既存の多くの計算結果⁽⁴⁾⁽²⁴⁾や実験⁽⁴⁾と良く一致し、本スキームが十分な

図 6 $Re=1000$ の定常流の計算時間の比較

精度を有することが確認できた。

本スキームの収束性を検討するために、表 2 に定常解を得るまでの CPU 時間の比較を $Re=100$ の場合について示す。これから明らかなように、完全陰解法は陽解法に比べ 2 倍以上の加速率を有し、安定に計算できるクーラン数(CFL)の値は大幅に増加している。図 6 は、クーラン数による CPU 時間の変化を $Re=1000$ の場合について比較したもので、格子点数は 90×21 である。図 6 中の NNF は、 ϕ の境界値問題を SOR 法で解く際の各時間ステップ当たりの最大反復回数である。陰解法の計算時間が陽解法に比べ短縮できることは $Re=100$ の場合と同様であるが、陰解法では計算時間を最小にする最適クーラン数が中間に存在し、 $Re=1000$ の場合には約 4 倍の加速効果が見られる。また、陽解法では最適クーラン数より少し大きいクーラン数で解が突然発散するが、陰解法では最適クーラン数よりかなり大きなクーラン数でも一応安定に計算でき、収束解の得られる最大クーラン数は最適クーラン数の数倍にも達する。図 7 に、陰解法の場合の最大速度修正値 $|u^{n+1} - u^n|_{\max}$ の時間ステップ数 n に対する変化を示す。修正値は最適クーラン数まではだいたい単調に減少し、 Δt の大きいほど収束性は良くなる。しかし、最適クーラン数を超えると、修正値は収束の過程で一時的に増大し振動しながら減少するようになり、これが収束性を悪くする。 $Re=5000$ までの計算の範囲では、最適クーラン数のレイノルズ数依存性は小さく、本論文の陰的スキームが在来の陽的スキームに対し十分高レイノルズ数まで計算を加速する効率的スキームであることがわかる。

図 7 時間ステップ数による最大速度修正値の変化 ($Re=1000$)

なお、計算は東北大学大型計算機センターの SX-2 N コンピュータを利用して行った。

4. 結 言

定常非圧縮粘性流れを解析するために、著者らが導いた反変速度を未知変数とする一般曲線座標系のナビエ・ストークス方程式に SMAC 法を適用した陰的差分スキームを提案した。

(1) MAC 法の食違い格子と反変速度の運動方程式を用いることにより、連続の条件を恒等的に満足させるとともに spurious 誤差の発生を防いだ。

(2) Δ 形式近似因子化法を用い陰解化し、解の収束性を改善した。

(3) 対流項に修正 QUICK 法または TVD スキームの上流差分法を用い高レイノルズ数流れにおける解の安定化を図った。

(4) 本スキームを用いて二次元後方ステップ流れを解析し、既存結果と比較することにより本スキームの精度と安定性を明らかにした。特に、CPU 時間を最小とする最適クーラン数は在来の陽的差分スキームのそれより 1 けた程度も大きくなり、本スキームの効率的な特徴が明らかにされた。

本研究の一部は文部省科学研究費補助金〔一般(c) 01550131〕によるものであることを付記し、感謝の意を表す。

文 献

- (1) Roache, P. J., *Computational Fluid Dynamics*, (1976).

- Hermosa Pub.
- (2) 流体工学における電算機利用に関する調査研究分科会 (P-SC 47) 成果報告書, (1983), 日本機械学会.
 - (3) Temam, R., *Navier-Stokes Equations*, (1984), North-Holland.
 - (4) Morgan, K., ほか 2 名編, *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 9(1984), Vieweg.
 - (5) Ferziger, J. H., *J. Comput. Phys.*, 69-1(1987), 1.
 - (6) Chorin, A. J., *J. Comput. Phys.*, 2-1(1967), 12.
 - (7) Steger, J. L. and Kutler, P., *AIAA J.*, 15-4(1977), 581.
 - (8) Soh, W. Y., *J. Comput. Phys.*, 70-1(1987), 232.
 - (9) Chang, J. L. C., ほか 3 名, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 8-10(1988), 1241.
 - (10) Hartwich, P. M. and Hsu C. H., *AIAA J.*, 26-11(1988), 1321.
 - (11) Dick, E., *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 9-1(1989), 113.
 - (12) Chorin, A. J., *Math. Comput.*, 22-4(1968), 745.
 - (13) Amsden, A. A. and Harlow, F. H., *J. Comput. Phys.*, 6-2(1970), 322.
 - (14) Caretto, L. S., ほか 3 名, *Proc. 3rd Int. Conf. Numer. Methods Fluid Mech.*, II(1972), 60, Springer-Verlag.
 - (15) Nakamura, Y. and Takemoto, Y., *Proc. Int. Symp. Comput. Fluid Dyn.*, II(1985), 285, Tokyo.
 - (16) Reggio, M. and Camarero, R., *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, 109-4(1987), 345.
 - (17) 塩島・ほか 2 名, *機論*, 54-507, B(1988), 3133.
 - (18) 大宮司・ほか 2 名, 第 2 回数値流体力学シンポジウム, (1988), 15.
 - (19) Beam, R. M. and Warming, R. F., *AIAA J.*, 16-4(1978), 393.
 - (20) Chakravarthy, S. R. and Osher, S., *AIAA Paper*, 85-0363(1985).
 - (21) Leonard, B. P., *Computational Techniques in Transient and Turbulent Flow*, (1981), 1, Pineridge Press.
 - (22) 大宮司・ほか 2 名, *機論*, 53-486, B(1987), 16.
 - (23) Yamamoto, S., ほか 2 名, *Computational Fluid Dynamics*, (1988), 773, North-Holland.
 - (24) Michelassi, V. and Benocci, C., *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 7-12(1987), 1383.