マイクロ・ポーラ理論による 磁性流体の基礎方程式* (第2報, 構成方程式)

井門康司*¹, 棚橋隆彦*²

Fundamental Equations for Magnetic Fluids by Micropolar Theory (2nd Report: Constitutive Equations)

Yasushi IDO and Takahiko TANAHASHI

Most of the previous theories for fundamental equations of magnetic fluids have not been able to describe both viscoelastic effect and internal rotation simultaneously. They cannot give the behaviour of magnetic fluids completely. In the present paper, to derive the complete set of equations for magnetic fluids, we unify the micropolar theory and the thermodynamical method. First, thermodynamical equations for magnetic fluids, for example, Gibbs' equation and dissipative function, are obtained by using the strain tensors for micropolar theory, the balance equations and electromagnetic equations which were derived in the previous paper. And next, the constitutive equations including nonlinear terms are obtained by using the principle of material frame indifference and the principle of maximal dissipation rate. These constitutive equations can represent the behaviour sufficiently when we must consider viscoelastic effect, internal rotation and nonlinear effect.

Key Words: Magnetic Fluid, Viscoelastic Fluid, Constitutive Equation, Fluid Dynamics, Internal Rotation, Thermodynamical Method, Micropolar Theory

1. 緒言

磁性流体とは水やケロシンなどの液体中に、高分子材料などで表面処理を施した粒子径約10nm程度の強磁性体微粒子を安定に分散させたようなけん濁液である。このような磁性流体の流動特性を記述する基礎方程式に関する研究はこれまで Neuringer-Rosensweig⁽¹⁾, Shliomis⁽²⁾⁽³⁾, Janson⁽⁴⁾, 志澤・棚橋⁽⁵⁾⁽⁶⁾あるいは著者ら⁽⁷⁾によってなされてきている。ところで、このような磁性流体の基礎方程式, 特に構成方程式が満足しなければならない条件として以下のようなものが考えられる。すなわち, (a) 標構無差別性の原理を満足していること, (b) 粘弾性効果が考慮されていること, (c) 熱力学的な議論を経て誘導されていること, (d) 内部自由度, すなわち極性が考慮されていること, などである。前述の理論はこれらの条件すべてを十分に満たしていない。そこでこれらの条件のすべてを満足するような構成方程式, 基礎方程式を誘導するために前報

⁽⁷⁾で示した基本不変量理論と最大散逸速度の原理を用いた熱力学的手法とマイクロ・ポーラ理論との融合を根幹とした理論を展開する。その第1段階として前報⁽⁸⁾において非導電性磁性流体に対する歪テンソルを定義し, 電磁場の方程式とつり合い方程式を誘導した。本論文ではこれらのつり合い方程式においてまだ決定されていない構成方程式を誘導し, 非導電性磁性流体に対する支配方程式系を確立することを目的とする。まず, 前報で得たエネルギー方程式と熱力学の諸法則を用いて, エネルギー方程式のエントロピー表示, 散逸関数およびGibbsの方程式などの熱力学的関係式を導出する。こうして得られた熱力学的関係式から構成方程式の準保存部分を決定し, 最大散逸速度の原理から構成方程式の散逸部分を決定し, これらの和をとることにより最終的に構成方程式が誘導されることになる。この際に基本となるのは, 散逸関数や自由エネルギーなどの構成量は座標系に無関係でなければならないという標構無差別性の原理である。なお, 前報と同様に, 磁性流体は非導電性で, 流速は光速に比べて十分に遅く, 時間的に速やかに変動する磁場およびあらゆる印加電場が無いものとして分極を無視して

* 原稿受付 平成元年8月17日。

*¹ 正員, 慶應義塾大学大学院 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。

*² 正員, 慶應義塾大学理工学部。

議論するものとする.

主な記号

$d_{ij}^{(v)}$	: 変形速度テンソル $= (v_{i,j} + v_{j,i})/2$
i	: 体積平均慣性半径
p	: 圧力
$p^{(e)}$	: 電磁場が存在する場合の圧力
s	: 単位質量あたりのエントロピー
T	: 絶対温度
$\hat{t}_{ij}$	$= t_{ij} + p\delta_{ij}$
$\tilde{t}_{ij}$	$= \hat{t}_{ij} - b_i h_j$
α, β, γ	: スピン粘性係数
η	: せん断粘性係数
η_1	: うず粘性係数 $= \rho i^2 / \tau^{(s)}$
η_2	: 第2粘性係数
κ	: 熱伝導率
τ	: 磁化の緩和時間
$\tau^{(s)}$	: 流体摩擦にもとづく回転運動の緩和時間
Φ	: 単位質量あたりの散逸関数
ψ	: 自由エネルギー $= \varepsilon - Ts$
$\tilde{\psi}$	: 熱力学的ポテンシャル $= \psi - H_I B_I / \rho_0$
$\chi^{(m)}$	: 磁化率
ω_i	: 角速度ベクトル $= \epsilon_{ijk} v_{k,j} / 2$

また, 上添字(q)は準保存部分であることを, 同じく上添字(d)は散逸部分であることを表す. なお, 上記以外の記号については前報⁽⁶⁾を参照されたい.

2. 熱力学的関係式

2.1 熱力学の第1法則 熱力学の第1法則はエネルギーの保存の法則を表す. すなわち, 系になされた仕事と系に供給された熱量の和が系の全エネルギーの増加 $d\varepsilon$ に等しいということで, これをエントロピー s と巨視的力 A_k を用いて表わすと

$$d\varepsilon = A_k^{(q)} da_k + T ds \quad (1)$$

となる. ここで a_k は運動学的パラメータであり, $A_k^{(q)}$ は a_k に対応する巨視的力 A_k の準保存部分である.

ところで前報⁽⁶⁾より非導電性磁性流体に対するエネルギー方程式は空間表示で

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\varepsilon}{dt} &= t_{ij}(v_{j,i} - \epsilon_{ijk} v_k) + \lambda_{ij} v_{j,i} \\ &\quad + h_i \frac{Db_i}{Dt} - q_{i,i} + \rho r \end{aligned} \quad (2)$$

である. ここで D/Dt は流束に対する微分で

$$\frac{Db_i}{Dt} = \frac{\partial b_i}{\partial t} + b_{j,j} v_i - \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} (v_l b_m)_{,j}$$

で定義される. いま磁性流体を考えているから, 応力テンソル t_{ij} を圧力項とそれ以外の項 $\hat{t}_{ij}$ とに分解することができる. すなわち,

$$t_{ij} = -p^{(e)} \delta_{ij} + \hat{t}_{ij} \quad (3)$$

となる. ここで $p^{(e)}$ は電磁場が存在するときの圧力である. 式(3)を式(2)に代入して ϵ_{ijk} が3階の交代テンソルであることを考慮すると

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\varepsilon}{dt} &= -p^{(e)} \delta_{ij} v_{j,i} + \hat{t}_{ij} (v_{j,i} - \epsilon_{ijk} v_k) \\ &\quad + \lambda_{ij} v_{j,i} + h_i \frac{Db_i}{Dt} - q_{i,i} + \rho r \end{aligned} \quad (4)$$

を得る. 前報⁽⁶⁾よりおもな物理量の空間表示と物質表示との変換式は

$$\left. \begin{aligned} C_{IJ} &= c_{ij} x_{i,I} x_{j,J} \\ \Gamma_{IJ} &= \gamma_{ij} x_{i,I} x_{j,J} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} B_I &= J X_{I,i} b_i \\ H_I &= x_{i,I} h_i \\ M_I &= J X_{I,i} m_i \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

である. また,

$$v_{j,i} - \epsilon_{ijk} v_k = \frac{dC_{IJ}}{dt} X_{I,i} X_{J,j} \quad (7)$$

$$v_{i,j} = \frac{d\Gamma_{IJ}}{dt} X_{J,i} X_{I,j} \quad (8)$$

なる関係式が成り立つ. 式(6), (7), (8)および連続の方程式

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \delta_{ij} v_{j,i}$$

$$\rho_0 - J\rho = 0$$

を用いて式(4)を物質表示に変換すると

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{d\varepsilon}{dt} &= -p^{(e)} \frac{dJ}{dt} + \hat{T}_{IJ} \frac{dC_{IJ}}{dt} + \Lambda_{IJ} \frac{d\Gamma_{IJ}}{dt} \\ &\quad + \rho_0 H_I \frac{d}{dt} \left(\frac{B_I}{\rho_0} \right) - B_I H_J v_{i,I} X_{J,j} \\ &\quad - Q_{I,I} + \rho_0 r \end{aligned} \quad (9)$$

を得る. さらに

$$B_I H_J v_{i,I} X_{J,j} = J b_i h_j X_{I,i} X_{J,j} \frac{dC_{IJ}}{dt} + B_I H_J x_{i,I} X_{J,j} \epsilon_{ijk} v_k$$

を利用して書き換えると

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{d\varepsilon}{dt} &= -p^{(e)} \frac{dJ}{dt} + \hat{T}_{IJ} \frac{dC_{IJ}}{dt} + \Lambda_{IJ} \frac{d\Gamma_{IJ}}{dt} \\ &\quad + \rho_0 H_I \frac{d}{dt} \left(\frac{B_I}{\rho_0} \right) - B_I H_J x_{i,I} X_{J,j} \epsilon_{ijk} v_k \\ &\quad - Q_{I,I} + \rho_0 r \end{aligned} \quad (10)$$

が得られる。ここで

$$\tilde{T}_{IJ} = J(i_{ij} - b_i h_j) X_{I,i} X_{J,j} = J \tilde{i}_{ij} X_{I,i} X_{J,j} \quad (11)$$

である。ところで巨視的力 A_k の散逸部分を $A_k^{(d)}$ で表すと

$$-Q_{I,I} + \rho_0 = \rho_0 T \frac{ds}{dt} - A_k^{(d)} \frac{da_k}{dt} \quad (12)$$

となる。ここで s は単位質量あたりのエントロピー、 T は絶対温度である。上式を式(10)に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{d\epsilon}{dt} = & -p^{(e)} \frac{dJ}{dt} + \tilde{T}_{IJ}^{(q)} \frac{dC_{IJ}}{dt} + \Lambda_{IJ}^{(q)} \frac{d\Gamma_{JI}}{dt} \\ & + \rho_0 H_I \frac{d}{dt} \left(\frac{B_I}{\rho_0} \right) + \rho_0 T \frac{ds}{dt} \end{aligned} \quad (13)$$

ただし $\tilde{T}_{IJ}^{(q)}$ および $\Lambda_{IJ}^{(q)}$ はそれぞれ応力テンソルおよび偶応力テンソルの準保存部分であり

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T}_{IJ}^{(q)} &= \tilde{T}_{IJ} - \tilde{T}_{IJ}^{(d)} \\ \Lambda_{IJ}^{(q)} &= \Lambda_{IJ} - \Lambda_{IJ}^{(d)} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

で定義される。 $\tilde{T}_{IJ}^{(d)}$ および $\Lambda_{IJ}^{(d)}$ はそれぞれ応力テンソルおよび偶応力テンソルの散逸部分である。式(13)の両辺に dt を掛けると Gibbs の方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} d\epsilon = & -p^{(e)} dJ + \frac{\tilde{T}_{IJ}^{(q)}}{\rho_0} dC_{IJ} + \frac{\Lambda_{IJ}^{(q)}}{\rho_0} d\Gamma_{JI} \\ & + H_I d \left(\frac{B_I}{\rho_0} \right) + T ds \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)は Tarapov⁽⁹⁾ によって与えられている分極・磁化性媒質に対する Gibbs の方程式を、分極を無視した場合について極性効果および粘弾性効果を同時に考慮できるように一般化された方程式であるといえる。

2.2 熱力学的ポテンシャル 自由エネルギー ψ は

$$\psi = \epsilon - Ts \quad (16)$$

で与えられる。これを全微分形にして式(15)を代入すると

$$\begin{aligned} d\psi = & -s dT - p^{(e)} dJ + \frac{\tilde{T}_{IJ}^{(q)}}{\rho_0} dC_{IJ} \\ & + \frac{\Lambda_{IJ}^{(q)}}{\rho_0} d\Gamma_{JI} + H_I d \left(\frac{B_I}{\rho_0} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

となる。ここで熱力学的ポテンシャル $\tilde{\psi}$ を

$$\tilde{\psi} = \psi - \frac{H_I B_I}{\rho_0} \quad (18)$$

で定義し、式(18)の両辺の全微分をとり式(17)を代入して整理すると

$$\begin{aligned} d\tilde{\psi} = & -s dT - p^{(e)} dJ + \frac{\tilde{T}_{IJ}^{(q)}}{\rho_0} dC_{IJ} \\ & + \frac{\Lambda_{IJ}^{(q)}}{\rho_0} d\Gamma_{JI} - \frac{B_I}{\rho_0} dH_I \end{aligned} \quad (19)$$

を得る。式(19)より以下のような熱力学の関係式を得る。

$$\begin{aligned} s &= - \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial T} \right)_{J, C_{IJ}, \Gamma_{JI}, H_I} \\ p^{(e)} &= - \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial J} \right)_{T, C_{IJ}, \Gamma_{JI}, H_I} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\tilde{T}_{IJ}^{(q)} = \rho_0 \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial C_{IJ}} \right)_{T, J, \Gamma_{JI}, H_I} \quad (21)$$

$$\Lambda_{IJ}^{(q)} = \rho_0 \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \Gamma_{JI}} \right)_{T, J, C_{IJ}, H_I} \quad (22)$$

$$B_I = -\rho_0 \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial H_I} \right)_{T, J, C_{IJ}, \Gamma_{JI}} \quad (23)$$

いま、磁束密度ベクトルの構成方程式は一般に

$$B_I = \mu_0 H_I + M_I \quad (24)$$

で与えられる。したがって、式(23)から決定されるのは磁化ベクトル M_I の準保存部分であるから、式(23)は次のように書き換えられる。

$$M_I^{(q)} = -\rho_0 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial H_I} - \mu_0 H_I \quad (25)$$

2.3 散逸関数 式(12)よりエネルギー方程式のエントロピー表示

$$\rho_0 T \frac{ds}{dt} = \Phi - Q_{I,I} + \rho_0 r \quad (26)$$

が得られる。ただし Φ は散逸関数で

$$\Phi = \tilde{T}_{IJ}^{(d)} \frac{dC_{IJ}}{dt} + \Lambda_{IJ}^{(d)} \frac{d\Gamma_{JI}}{dt} - M_I^{(d)} H_{J,i} X_{J,j} \epsilon_{ijk} \nu_k \quad (27)$$

である。この散逸関数を空間表示に変換する。式(6)、(7)および(8)を用いて式(27)を書き換えると

$$\Phi = \tilde{i}_{ij}^{(d)} (v_{j,i} - \epsilon_{ijk} \nu_k) + \lambda_{ij}^{(d)} \nu_{j,i} - m_i^{(d)} h_j \epsilon_{ijk} \nu_k \quad (28)$$

が得られる。ここで変形速度テンソル $d_{ij}^{(v)}$ およびスピン・テンソル w_{ij} を

$$\left. \begin{aligned} d_{ij}^{(v)} &= (v_{j,i} + v_{i,j})/2 \\ w_{ij} &= (v_{j,i} - v_{i,j})/2 - \epsilon_{ijk} \nu_k \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

で定義すると、式(28)は

$$\Phi = \tilde{i}_{ij}^{(d)} (d_{ij}^{(v)} + w_{ij}) + \lambda_{ij}^{(d)} \nu_{j,i} - m_i^{(d)} \epsilon_{ijk} h_j \nu_k \quad (30)$$

のように書き換えられる。

2.4 Clausius-Duhem の不等式 熱力学の第2法則は、系内のエントロピーの増加が、系への

供給エントロピーよりも大きく、その差は内部エントロピー生成によって補われるというものである。これを連続体の場に適用すれば、 q_i/T を局所的なエントロピー流束として

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho s^{(i)} dv = \frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho s dv - \left(- \int_{S_m} \frac{n_i q_i}{T} da + \int_{V_m} \frac{\rho r}{T} dv \right) \geq 0 \quad (31)$$

が得られる。ここで $s^{(i)}$ は内部エントロピー生成である。式(31)の実質時間微分の項に Reynolds の輸送定理を適用し、Gauss の定理を用いて面積分の項を体積分に変換し、積分記号をはずすと

$$\rho \frac{ds}{dt} + \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} - \frac{\rho r}{T} \geq 0 \quad (32)$$

を得る。式(32)の両辺に T を掛け、式(26)を代入すると

$$\Phi + q_i (\ln T^{-1})_{,i} \geq 0 \quad (33)$$

となる。任意の現象に対して熱力学的な項とそれ以外の項に分解できることが知られている⁽¹⁰⁾から

$$\left. \begin{aligned} \Phi &\geq 0 \\ \Phi^{(th)} = q_i (\ln T^{-1})_{,i} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

となる。 Φ は散逸関数の運動学的部分、 $\Phi^{(th)}$ は散逸関数の熱力学的部分と考えることができる。

3. 構成方程式

3.1 基礎原理 これから決定しなければならない構成方程式は応力テンソル t_{ij} 、偶応力テンソル λ_{ij} 、磁化ベクトル m_i および熱流束密度ベクトル q_i の4個である。まず、これらの構成方程式を決定する際の基礎となる原理を述べる。本手法において基礎となる原理は標構無差別性の原理と最大散逸速度の原理である。標構無差別性の原理は物質の性質を表わすスカラー・ベクトル・テンソルは座標系に無関係でなければならない、というものである。すなわち、構成量である散逸関数および熱力学的ポテンシャルは標構に無差別で、したがって、散逸関数と熱力学的ポテンシャルはそれぞれの関数の引数を作る基本不変量の多項式という形で表わされることになる。一方、最大散逸速度の原理は、散逸力 $A_k^{(d)}$ が与えられているものとすれば、実際の速度 da_i/dt は、付帯条件

$$\Phi = A_k^{(d)} \frac{da_i}{dt} = L^{(d)} \geq 0$$

のもとで散逸速度 $L^{(d)}$ を最大にする、というものである⁽¹¹⁾。この最大散逸速度の原理は垂直性条件

$$A_k^{(d)} = \nu \frac{\partial \Phi}{\partial (da_k/dt)}$$

ただし ν は比例定数で

$$\nu = \Phi \left[\frac{\partial \Phi}{\partial (da_k/dt)} \frac{da_i}{dt} \right]^{-1}$$

に等価である。この垂直性条件を用いて構成方程式の散逸部分を決定する。

3.2 準保存部分の決定 式(7)、(24)および連続の方程式を用いると

$$-\frac{B_I}{\rho_0} dH_I = -d \left(\frac{\mu_0 H_I H_I}{2\rho_0} \right) + \frac{\mu_0 H_K H_K}{2\rho_0} X_{I,i} \chi_{J,i} dC_{IJ} - \frac{M_I}{\rho_0} dH_I \quad (35)$$

なる関係式が得られる。式(35)を式(19)に代入すると

$$d\tilde{\psi} = -sdT + \left(\frac{\tilde{T}_{IJ}^{(q)}}{\rho_0} + \frac{\mu_0 H_K H_K}{2\rho_0} X_{I,i} \chi_{J,i} \right) dC_{IJ} + \frac{\Lambda_{IJ}^{(q)}}{\rho_0} d\Gamma_{IJ} - d \left(\frac{\mu_0 H_I H_I}{2\rho_0} \right) - \frac{M_I}{\rho_0} dH_I \quad (36)$$

を得る。式(36)を積分すると

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_0(\rho_0, T, C_{IJ}, \Gamma_{IJ}) - \frac{\mu_0 H_I H_I}{2\rho_0} + \tilde{\psi}^{(M)} \quad (37)$$

のように書くことができる。ここで $\tilde{\psi}^{(M)}$ は具体化できない磁化に関する部分である。したがって、式(37)より式(21)は次のように書き換えられる。

$$\tilde{T}_{IJ}^{(q)} = \rho_0 \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial C_{IJ}} \right)_{J,T,\Gamma_{IJ},H_I} - \frac{\mu_0 H_K H_K}{2} X_{I,i} \chi_{J,i} \quad (38)$$

いま、空間表示の方程式系を誘導したい。そこで式(20)、(38)、(22)および(25)を空間表示に変換する。式(5)、(6)および連続の方程式 $\rho_0 - J\rho = 0$ を利用して

$$p^{(e)} = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial (1/\rho)} \quad (39)$$

$$\tilde{t}_{ij}^{(q)} = \rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial c_{ij}} - \frac{1}{2} \mu_0 h_k h_k \delta_{ij} \quad (40)$$

$$\lambda_{ij}^{(q)} = \rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \gamma_{ij}} \quad (41)$$

$$m_i^{(q)} = -\rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial h_i} - \mu_0 h_i \quad (42)$$

を得る。式(37)を式(6)により空間表示に変換して式(39)に代入すると

$$p^{(e)} = p_0 + \frac{1}{2} \mu_0 h_i^2 + p^{(M)} = p + \frac{1}{2} \mu_0 h_i h_i \quad (43)$$

となる。ここで p_0 および $p^{(M)}$ はそれぞれ $\tilde{\psi}_0$ および $\tilde{\psi}^{(M)}$ から得られる圧力である。これらを合わせた圧力をあらためて p で定義する。すなわち p は静圧力と電磁圧力のうち具体化できない磁化による部分を含む。

$\tilde{t}_{ij}^{(q)}$ 、 $\gamma_{ij}^{(q)}$ および $m_i^{(q)}$ を決定する。不変量は表示をかえてもその形は不変であるから、 $\tilde{\psi}$ は空間表示において引数 c_{ij} 、 γ_{ij} および h_i を持ち、これら2個のテンソルと1個のベクトルで作られる不変量の多項式として

表わされる。したがって、構成方程式の準保存部分は、数学的には c_{ij} , γ_j , および h_i で作られる不変量のうち独立な不変量, すなわち基本不変量の多項式として表わされることになる。いま, 結合過程の場合のみを考えて議論することにする。Chakrabarti-Wainwright⁽¹²⁾の理論にしたがって上記の2個のテンソルと1個ベクトルで作られる基本不変量は結合過程の場合以下のようないくつかの量となる。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= c_{ii}, \\ I_2 &= c_{ij}c_{ji}, \\ I_3 &= c_{ij}c_{jk}c_{ki}, \\ I_4 &= c_{ij}c_{ij}, \\ I_5 &= c_{ij}c_{jk}c_{ik}, \\ I_6 &= c_{ij}c_{jk}c_{ik}c_{il}, \\ I_7 &= \gamma_{ii}, \\ I_8 &= \gamma_{ij}\gamma_{ji}, \\ I_9 &= \gamma_{ij}\gamma_{jk}\gamma_{ki}, \\ I_{10} &= \gamma_{ij}\gamma_{ij}, \\ I_{11} &= \gamma_{ij}\gamma_{jk}\gamma_{ik}, \\ I_{12} &= \gamma_{ij}\gamma_{jk}\gamma_{ik}\gamma_{il}, \\ I_{13} &= h_i h_i \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

熱力学的ポテンシャル $\tilde{\psi}$ はこれら13個の基本不変量の多項式であることから式(40), (41) および(42)は次のように書き換えることができる。

$$\tilde{t}_{ij}^{(q)} = \sum_{n=1}^{13} \alpha_n \frac{\partial I_n}{\partial c_{ij}} - \frac{1}{2} \mu_0 h_k h_k \delta_{ij} \quad (45)$$

$$\lambda_{ij}^{(q)} = \sum_{n=1}^{13} \alpha_n \frac{\partial I_n}{\partial \gamma_{ij}} \quad (46)$$

$$m_i^{(q)} = - \sum_{n=1}^{13} \alpha_n \frac{\partial I_n}{\partial h_i} - \mu_0 h_i \quad (47)$$

ただし係数 α_n は

$$\alpha_n = \rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial I_n} \quad (48)$$

で定義される。式(45), (46) および(47)に式(44)で示された基本不変量を代入すれば構成方程式の準保存部分が以下のように決定される。

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{ij}^{(q)} &= \alpha_1 \delta_{ij} + 2\alpha_2 c_{ji} + 3\alpha_3 c_{ki}c_{jk} + 2\alpha_4 c_{ij} \\ &+ \alpha_5 (c_{ik}c_{jk} + c_{ki}c_{kj} + c_{ik}c_{kj}) + 2\alpha_6 (c_{ik}c_{ji}c_{kl} \\ &+ c_{ki}c_{lj}c_{kl}) - \frac{1}{2} \mu_0 h_k h_k \delta_{ij} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}^{(q)} &= \alpha_7 \delta_{ij} + 2\alpha_8 \gamma_{ij} + 3\alpha_9 \gamma_{ik}\gamma_{kj} + 2\alpha_{10} \gamma_{ji} + \alpha_{11} (\gamma_{ik}\gamma_{jk} \\ &+ \gamma_{ki}\gamma_{kj} + \gamma_{ki}\gamma_{jk}) + 2\alpha_{12} (\gamma_{ik}\gamma_{ji}\gamma_{lk} + \gamma_{ki}\gamma_{lj}\gamma_{lk}) \end{aligned} \quad (50)$$

$$m_i^{(q)} = (-2\alpha_{13} - \mu_0) h_i \quad (51)$$

3.3 散逸部分の決定 これから決定する構成方程式の散逸部分は $\tilde{t}_{ij}^{(d)}$, $\gamma_{ij}^{(d)}$, $m_i^{(d)}$ および q_i である。これらの量は最大散逸速度の原理, それと等価な垂直性条件によって決定される。式(30)より

$$\Phi = \tilde{t}_{ij}^{(d)} \sigma_{ij} + \lambda_{ij}^{(d)} \nu_{j,i} + m_i^{(d)} \zeta_i \quad (52)$$

である。ただし σ_{ij} および ζ_i は

$$\sigma_{ij} = d_{ij}^{(v)} + w_{ij} \quad (53)$$

$$\zeta_i = \epsilon_{ijk} \nu_j h_k \quad (54)$$

で定義される。したがって, 散逸関数の引数は σ_{ij} , $\nu_{j,i}$ および ζ_i の2個のテンソルと1個のベクトルである。準保存部分の決定の場合と同様に Chakrabarti-Wainwright⁽¹²⁾の理論によってこれらのテンソルとベクトルで作られる基本不変量を結合過程の場合について求めると

$$\left. \begin{aligned} \hat{I}_1 &= \sigma_{ii}, \\ \hat{I}_2 &= \sigma_{ij}\sigma_{ji}, \\ \hat{I}_3 &= \sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}, \\ \hat{I}_4 &= \sigma_{ij}\sigma_{ij}, \\ \hat{I}_5 &= \sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ik}, \\ \hat{I}_6 &= \sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ik}\sigma_{il}, \\ \hat{I}_7 &= \nu_{i,i}, \\ \hat{I}_8 &= \nu_{j,i}\nu_{i,j}, \\ \hat{I}_9 &= \nu_{j,i}\nu_{k,j}\nu_{i,k}, \\ \hat{I}_{10} &= \nu_{j,i}\nu_{j,i}, \\ \hat{I}_{11} &= \nu_{j,i}\nu_{k,j}\nu_{k,i}, \\ \hat{I}_{12} &= \nu_{j,i}\nu_{k,j}\nu_{k,i}\nu_{i,i}, \\ \hat{I}_{13} &= \zeta_i \zeta_i \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

の13個である。したがって, 散逸関数はこれら13個の基本不変量の多項式で表わされることから, 最大散逸速度の原理の式は

$$\tilde{t}_{ij}^{(d)} = \sum_{n=1}^{13} \beta_n \frac{\partial \hat{I}_n}{\partial \sigma_{ij}} \quad (56)$$

$$\lambda_{ij}^{(d)} = \sum_{n=1}^{13} \beta_n \frac{\partial \hat{I}_n}{\partial \nu_{j,i}} \quad (57)$$

$$m_i^{(d)} = \sum_{n=1}^{13} \beta_n \frac{\partial \hat{I}_n}{\partial \zeta_i} \quad (58)$$

のように書き換えられる。ただし係数 β_n は

$$\beta_n = \nu \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{I}_n}$$

で定義される。 ν は比例定数である。式(56), (57) および(58)に式(55)で与えられた13個の基本不変量を代入すると, 応力テンソル, 偶応力テンソルおよび磁化ベクトルの構成方程式の散逸部分がそれぞれ以下のように決定される。

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{ij}^{(d)} = & \beta_1 \delta_{ij} + 2\beta_2 \sigma_{ji} + 3\beta_3 \sigma_{ki} \sigma_{jk} + 2\beta_4 \sigma_{ij} \\ & + \beta_5 (\sigma_{ik} \sigma_{jk} + \sigma_{ki} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} \sigma_{kj}) \\ & + 2\beta_6 (\sigma_{ik} \sigma_{jl} \sigma_{kl} + \sigma_{ki} \sigma_{lj} \sigma_{kl}) \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}^{(d)} = & \beta_7 \delta_{ij} + 2\beta_8 \nu_{i,j} + 3\beta_9 \nu_{i,k} \nu_{k,j} + 2\beta_{10} \nu_{j,i} \\ & + \beta_{11} (\nu_{k,i} \nu_{k,j} + \nu_{i,k} \nu_{j,k} + \nu_{k,i} \nu_{j,k}) \\ & + 2\beta_{12} (\nu_{k,i} \nu_{l,j} \nu_{l,k} + \nu_{i,k} \nu_{j,l} \nu_{l,k}) \end{aligned} \quad (60)$$

$$m_i^{(d)} = 2\beta_{13} \zeta_i \quad (61)$$

つぎに熱流束密度ベクトルに対する構成方程式を求め、熱流束密度ベクトルは熱力学的散逸関数 $\Phi^{(th)}$ から先の応力テンソルや偶応力テンソルの場合と同様にして最大散逸速度の原理から決定できる。いま $\Phi^{(th)}$ の引数は

$$\Phi^{(th)} = q_i (\ln T^{-1})_{,i} = -q_i \frac{T_{,i}}{T}$$

であることからベクトル $T_{,i}$ である。このベクトルから作られる基本不変量は1個のみで $T_{,i} T_{,i}$ である。したがって、最大散逸速度の原理の式から熱流束密度ベクトルは

$$q_i = -\bar{\kappa} \frac{\partial(T_{,j} T_{,j})}{\partial T_{,i}} \quad (62)$$

によって決定され、 $2\bar{\kappa}$ をあらためて κ と置く

$$q_i = -\kappa T_{,i} \quad (63)$$

が得られる。これはFourieの法則としてよく知られているもので、係数 κ は熱伝導率である。

3.4 構成方程式の決定 前節までに得られた結果をまとめ、磁性流体に対する構成方程式を最終的に決定する。式(3), (11), (14)などにより

$$t_{ij} = -p^{(e)} \delta_{ij} + \tilde{t}_{ij}^{(a)} + \tilde{t}_{ij}^{(d)} + b_i h_j \quad (64)$$

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ij}^{(q)} + \lambda_{ij}^{(d)} \quad (65)$$

$$m_i = m_i^{(q)} + m_i^{(d)} \quad (66)$$

である。式(64)に式(43), (49)および(59)を代入すると応力テンソル t_{ij} が決定され

$$\begin{aligned} t_{ij} = & -p \delta_{ij} + \alpha_1 \delta_{ij} + 2\alpha_2 c_{ji} + 3\alpha_3 c_{ki} c_{jk} + 2\alpha_4 c_{ij} \\ & + \alpha_5 (c_{ik} c_{jk} + c_{ki} c_{kj} + c_{ik} c_{kj}) + 2\alpha_6 (c_{ik} c_{jl} c_{kl} \\ & + c_{ki} c_{lj} c_{kl}) + \beta_1 \delta_{ij} + 2\beta_2 \sigma_{ji} + 3\beta_3 \sigma_{ki} \sigma_{jk} \\ & + 2\beta_4 \sigma_{ij} + \beta_5 (\sigma_{ik} \sigma_{jk} + \sigma_{ki} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} \sigma_{kj}) \\ & + 2\beta_6 (\sigma_{ik} \sigma_{jl} \sigma_{kl} + \sigma_{ki} \sigma_{lj} \sigma_{kl}) \\ & + b_i h_j - \frac{1}{2} \mu_0 h_k h_k \delta_{ij} \end{aligned} \quad (67)$$

のようになる。また、式(65)に式(50)と(60)を代入すると、偶応力テンソルが以下のように決定される。

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} = & \alpha_7 \delta_{ij} + 2\alpha_8 \gamma_{ij} + 3\alpha_9 \gamma_{ik} \gamma_{kj} + 2\alpha_{10} \gamma_{ji} \\ & + \alpha_{11} (\gamma_{ik} \gamma_{jk} + \gamma_{ki} \gamma_{kj} + \gamma_{ki} \gamma_{jk}) + 2\alpha_{12} (\gamma_{ik} \gamma_{jl} \gamma_{lk} \\ & + \gamma_{ki} \gamma_{lj} \gamma_{lk}) + \beta_7 \delta_{ij} + 2\beta_8 \nu_{i,j} + 3\beta_9 \nu_{i,k} \nu_{k,j} \\ & + 2\beta_{10} \nu_{j,i} + \beta_{11} (\nu_{k,i} \nu_{k,j} + \nu_{i,k} \nu_{j,k} + \nu_{k,i} \nu_{j,k}) \\ & + 2\beta_{12} (\nu_{k,i} \nu_{l,j} \nu_{l,k} + \nu_{i,k} \nu_{j,l} \nu_{l,k}) \end{aligned} \quad (68)$$

式(66)に式(51)と(61)を代入すると磁化ベクトルが

$$m_i = (-2\alpha_{13} - \mu_0) h_i + 2\beta_{13} \zeta_i \quad (69)$$

のように決定される。あと1つの構成方程式である熱流束密度ベクトルは式(63)のまま

$$q_i = -\kappa T_{,i}$$

である。なお、いま結合過程を考えているから、係数 α_n ($n=1\sim 6$)は式(44)で示した基本不変量のうち I_n ($n=1\sim 6$)の6個の量の多項式の形で書くことができる。同様に、 α_n ($n=7\sim 12$)は式(44)の I_n ($n=7\sim 12$)の基本不変量の多項式、 α_{13} は I_{13} の一次式の形となる。また、 β_n ($n=1\sim 6$)は式(55)の $\hat{I}_n$ ($n=1\sim 6$)、 β_n ($n=7\sim 12$)は $\hat{I}_n$ ($n=7\sim 12$)のそれぞれ多項式形で書くことができ、 β_{13} は $\hat{I}_{13}$ の1次式である。

これまでに得た構成方程式は非線形項を含んでおり、つぎにこれを線形化し、さらに従来の理論と比較する。まず、式(67)と(68)における2次以上の項を省略すると

$$\begin{aligned} t_{ij} = & -p \delta_{ij} + \alpha_1 \delta_{ij} + 2\alpha_2 c_{ji} + 2\alpha_4 c_{ij} + \beta_1 \delta_{ij} \\ & + 2\beta_2 \sigma_{ji} + 2\beta_4 \sigma_{ij} + b_i h_j - \frac{1}{2} \mu_0 h_k h_k \delta_{ij} \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} = & \alpha_7 \delta_{ij} + 2\alpha_8 \gamma_{ij} + 2\alpha_{10} \gamma_{ji} + \beta_7 \delta_{ij} \\ & + 2\beta_8 \nu_{i,j} + 2\beta_{10} \nu_{j,i} \end{aligned} \quad (71)$$

となる。つぎに式(70)を式(53)と(29)に用い、変形速度テンソル $d_{ij}^{(v)}$ は対称テンソルでありスピン・テンソル ω_{ij} が反対称テンソルであることを考慮して書き換えると次式のようになる。

$$\begin{aligned} t_{ij} = & -p \delta_{ij} + \alpha_1 \delta_{ij} + 2\alpha_2 c_{ji} + 2\alpha_4 c_{ij} + \beta_1 \delta_{ij} \\ & + 2(\beta_2 + \beta_4) d_{ij}^{(v)} + 2(\beta_4 - \beta_2) \epsilon_{ijk} (\omega_k - \nu_k) \\ & + b_i h_j - \frac{1}{2} \mu_0 h_k h_k \delta_{ij} \end{aligned} \quad (72)$$

ただし、 ω_k は角速度ベクトルで

$$\omega_k = \frac{1}{2} \epsilon_{klm} v_{m,l} \quad (73)$$

で定義される。また、磁化ベクトルの構成方程式(69)に式(54)を代入して書き換えると

$$m_i = \chi_{ij}^{(m)} h_j \quad (74)$$

を得る。ここで $\chi_{ij}^{(m)}$ は磁化率テンソルで

$$\chi_{ij}^{(m)} = (-2\alpha_{13} - \mu_0)\delta_{ij} + 2\beta_{13}\nu_k\epsilon_{ikj} \quad (75)$$

で定義される。

最後に、磁場の作用が無い場合、磁性流体は等方的であると考えられることを考慮して、従来の理論、特に志澤・棚橋の理論⁽⁶⁾と比較して構成方程式を書き直すと以下ようになる。

$$t_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda c_{kk}\delta_{ij} + 2\alpha_2 c_{ji} + 2\alpha_4 c_{ij} + \eta_2 d_{kk}^{(v)}\delta_{ij} + 2\eta_1 d_{ij}^{(v)} + 2\eta_1 \epsilon_{ijk}(\omega_k - \nu_k) + b_i h_j - \frac{1}{2}\mu_0 h_k h_k \delta_{ij} \quad (76)$$

$$\lambda_{ij} = \bar{\alpha}\gamma_{kk}\delta_{ij} + 2\alpha_8\gamma_{ij} + 2\alpha_{10}\gamma_{ji} + \alpha\nu_{k,k}\delta_{ij} + \beta\nu_{i,j} + \gamma\nu_{j,i} \quad (77)$$

$$m_i = \chi^{(m)}(\delta_{ij} - \tau\nu_k\epsilon_{kij})h_j \quad (78)$$

$$q_i = -\kappa T_{,i}$$

ここで、 λ , α_2 , α_4 は弾性係数であり、 η はせん断粘性係数、 η_1 はうず粘性係数、 η_2 は第2粘性係数である。また、 $\bar{\alpha}$, α_8 および α_{10} はスピン弾性係数に、 α , β , γ はスピン粘性係数にそれぞれ相当し、 $\chi^{(m)}$ は磁化率、 τ は磁化の緩和時間でそれぞれ

$$\chi^{(m)} = -2\alpha_{13} - \mu_0$$

$$\tau = -\frac{2\beta_{13}}{2\alpha_{13} + \mu_0}$$

である。これらの構成方程式において、従来の構成方程式には含まれていなかった項は、応力テンソルの $\lambda c_{kk}\delta_{ij} + 2\alpha_2 c_{ji} + 2\alpha_4 c_{ij}$ および偶応力テンソルの $\bar{\alpha}\gamma_{kk}\delta_{ij} + 2\alpha_8\gamma_{ij} + 2\alpha_{10}\gamma_{ji}$ の項である。これらの項は粘弾性効果に極性の影響を正しく考慮した結果、導入されたものである。これによって従来では無視されていた弾性効果を表わす項への極性の影響が考慮されたことになる。

4. 基礎方程式系

前報⁽⁶⁾も含めてこれまでに得られた非導電性磁性流体に対する基礎方程式系を線形理論についてまとめると以下ようになる。

[連続の方程式]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0 \quad (79)$$

[Cauchy の運動方程式]

$$\rho \frac{dv_j}{dt} = t_{ij,i} + \rho f_j \quad (80)$$

[角運動量方程式]

$$\rho \frac{d(i_{jk}\nu_k)}{dt} = \lambda_{ij,i} + \epsilon_{jki}t_{ki} + \rho l_j \quad (81)$$

[エネルギー方程式]

$$\rho \frac{d\epsilon}{dt} = t_{ij}(d_{ij}^{(v)} + w_{ij}) + \lambda_{ij}\nu_{j,i} + h_i \frac{Db_i}{Dt} - q_{i,i} + \rho r \quad (82)$$

[電磁場の方程式]

$$\epsilon_{ijk}e_{k,j} = -\frac{Db_i}{Dt} \quad (83)$$

$$\epsilon_{ijk}h_{k,j} = 0 \quad (84)$$

$$b_{i,i} = 0 \quad (85)$$

[構成方程式]

$$t_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda c_{kk}\delta_{ij} + 2\alpha_2 c_{ji} + 2\alpha_4 c_{ij} + \eta_2 d_{kk}^{(v)}\delta_{ij} + 2\eta_1 d_{ij}^{(v)} + 2\eta_1 w_{ij} + b_i h_j - \frac{1}{2}\mu_0 h_k h_k \delta_{ij} \quad (86)$$

$$\lambda_{ij} = \bar{\alpha}\gamma_{kk}\delta_{ij} + 2\alpha_8\gamma_{ij} + 2\alpha_{10}\gamma_{ji} + \alpha\nu_{k,k}\delta_{ij} + \beta\nu_{i,j} + \gamma\nu_{j,i} \quad (87)$$

$$m_i = \chi^{(m)}(\delta_{ij} - \tau\nu_k\epsilon_{kij})h_j \quad (88)$$

$$b_i = \mu_0 h_i + m_i \quad (89)$$

$$q_i = -\kappa T_{,i} \quad (90)$$

5. 結論

自由エネルギーと散逸関数を用いた熱力学的手法にマイクロ・ポーラ理論を融合させ、標構無差別性の原理と最大散逸速度の原理を主体とした非導電性磁性流体の基礎方程式および構成方程式の誘導手法を提示した。この手法により、非導電性磁性流体に対する基礎方程式系を誘導した。このような手法によって得られた構成方程式は、従来の理論での不備を十分に補うものである。すなわち、標構無差別性の原理を基礎にしているため、すべての構成方程式が標構に無差別であり、マイクロ・ポーラ弾性体理論の考え方を導入したことにより磁性流体の持つ極性効果の粘弾性効果への影響

を正しく表わすことが可能となった。また、非線形理論であるので、従来の線形効果のみならず、電磁効果以外の非線形性をも表わすことができる。また、本理論はこれまでの極性流体理論や粘弾性体理論を含み、より一般性を持った理論である。なお、構成方程式中の係数の具体的な数値については、今後の実験による計測、あるいは理論的にはより微視的な理論から出発する統計理論などによる検討が必要であると考えられる。

最後に本研究において慶應義塾大学理工学部・志澤一之氏の適切な助言を得たことを感謝する。

参考文献

- (1) Neuringer, J. L. and Rosensweig, R. E., *Phys. Fluids*, 7-12 (1964), 1927.
- (2) Shliomis, M. I., *Sov. Phys. JETP*, 34-6 (1972), 1291.
- (3) Shliomis, M. I., *Sov. Usp.*, 17-2 (1974), 153.
- (4) Janson, K. M., *J. Fluid Mech.*, 137 (1983), 187.
- (5) 志澤・棚橋, 機論, 50-461, B (1985), 95.
- (6) 志澤・棚橋, 機論, 52-480, B (1986), 2905.
- (7) 井門・棚橋, 機論, 55-517, B (1989), 2602.
- (8) 井門・棚橋, 機論, 現在投稿中. 論文 No.89-1055.
- (9) Tarapov, I. E., *Magnit. Gidrodin.*, No.1 (1971), 3.
- (10) 棚橋, 機械の研究, 35-8 (1983), 930.
- (11) Ziegler, H., *An Introduction to Thermomechanics*, (1983), 245, North-Holland Pub. Co..
- (12) Chakrabarti, S. K., and Wainwright, W. L., *Int. J. Engng. Sci.*, 7 (1969), 601.