垂直な平板に沿う乱流自然対流の壁面せん断応力に関する一考察*

稲垣 照美^{*1}, 小森 勝夫^{*1}One Proposal on Wall Shear Stress of the Turbulent
Natural Convection along a Vertical Flat Plate

Terumi INAGAKI and Katsuo KOMORI

Wall shear stress of the turbulent natural convection along a vertical flat plate was investigated semi-numerically. In the natural convection, measurements of the turbulent quantities near wall are usually difficult as a result of its strong temperature fluctuation. On the other hand, a number of attempts to describe turbulent heat transfer were made and reliable data were presented. Therefore, in this study, Surface Renewal model was introduced and wall shear stress of the turbulent natural convection was considered in relation to its heat transfer. It was revealed from a simple attempt that the dependence of the wall shear stress on Grashof number varied with various heat transfer correlations.

Key Words: Natural Convection, Turbulence, Wall Shear Stress, Convective Heat Transfer, Surface Renewal Model

1. 結 言

これまで乱流自然対流の壁面せん断応力に関しては, 測定が困難なこともあってその詳細はほとんど明らかにされていない。大きな熱物性値変化を伴う流れを熱線・熱膜流速計で測定する場合, 壁面への熱伝導損失・プローブ自身が誘起する擾乱および高温・低流速に起因する温度乱れの影響などが不確かさの原因として考えられる。自然対流では, 温度乱れが大きく, 壁面近傍の速度こう配すなわち壁面せん断応力などを正確に測定することはかなり難しいと言える。一方壁面近傍の温度こう配から算出することのできる熱伝達率については, かなり多くの伝熱相関式が報告されており, 信頼できるデータも揃っている。したがって本研究では, 垂直な平板に沿う乱流自然対流の壁面せん断応力を熱線流速計による測定とは異なる観点, すなわち熱伝達率の側面から考察を加えて行くことにした。また本研究では, 速度場と温度場とを結びつけるものとして「熱輸送は乱流中に存在する流体塊運動により支配される」とした壁面更新モデルを導入した。

記 号 表

C_f : 摩擦係数
 Gr : グラシホフ数
 g : 重力加速度 m/s^2
 Nu : ヌセルト数
 Pr : プラントル数
 q : 熱流束 W/m^2
 Ra : レイリ数
 Re : レイノルズ数
 T : 温度 K
 U : 速度 m/s
 t : 滞在時間 s
 x : 平板先端からの距離 m
 y : 壁面からの距離 m
 α : 温度伝導率 m^2/s
 β : 体積膨張率 $1/\text{K}$
 θ : 無次元温度
 ν : 動粘性係数 m^2/s
 τ : せん断応力 N/m^2
 $\bar{\quad}$: 時間平均値
 $+$: 無次元量
 I : 初期値

* 平成2年3月14日 東海支部第39期総会講演会において講演, 原稿受付 平成元年8月24日。

^{*1} 正員, 豊田工業高等専門学校 (〒471 豊田市栄生町2-1)。

w : 壁
 ∞ : 主流

2. 速度場と温度場の推測法

2・1 壁面更新モデル 複雑な熱流体を模擬するためには、まず基礎方程式をなんらかの方法でモデル化する必要がある。現在工学的に最も広く応用されているモデルは、 x - ϵ 二方程式モデルであるが、より複雑な流れになるほど物理的なモデルはより簡便であるほど望ましい。

先に入谷ら⁽¹⁾は感温液晶を用いて強制対流乱流境界層の壁面近傍の流れを可視化し、粘性底層内においても時間・空間的にスケールの大きな低温筋状模様が存在することを見出した。また北村ら⁽²⁾は、自然対流乱流境界層内の壁面温度分布をやはり感温液晶で可視化した。その結果、自然対流の場合でも強制対流同様時間・空間的に大きなスケールを有する低温筋状模様が存在し、それが自然対流の熱や運動量輸送に重要な役割を果たしていることを明らかにした。これらの低温模様に代表される流体塊運動は、壁面更新モデル^{(3)~(5)}の概念と類似しており、速度場と温度場とを構造論的に考察する上で都合が良い。このモデルは、強制対流の分野ですでに確立された手法であるが、本研究では、これを単に速度場と温度場との関連性を類推する上で用いることにした。また壁面更新モデルは壁面近傍での熱伝達率や壁面摩擦係数を予測するだけでなく、乱流輸送機構を解明する手段として用いることもできる。

さて壁面更新モデルは、壁面近傍の流体塊がある周期ごとにその外側の流体により更新され、その間非定常熱伝導で伝熱面から流体塊へ熱が移動する現象を模擬したものである。図1にそのモデル概念図を示す。

まずモデル化に当たり以下の仮定を設ける。

(1) 伝熱面に向かって侵入する流体塊は、伝熱面へ直接到達し、ある時間 τ 滞在する。

(2) 侵入する流体塊の初期速度および温度は、主流の値に等しい。

(3) 流体の物性値は一定とし、圧縮性および粘性散逸の影響は無視できる。

(4) 流れは、流体力学的および熱力学的に発達した状態にある。

仮定(1)、(2)は大胆な仮定と言えるが、壁面更新モデルはもともと複雑な乱流輸送機構を単純化したモデルに置き換え、伝熱・流動を探ろうとするものであること。またこれらの仮定を導入することにより、計算が大幅に簡略化されることなどの点を考慮して採用し

た。仮定(4)は、乱流域の局所熱伝達率が長さあるいは高さ X 方向に大きな変化を示さないという従来の伝熱実験結果を参考にした。

したがって以上の仮定より基礎方程式は、次の一次元非定常熱伝導方程式に帰結しうる。

運動量方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) \quad (1)$$

エネルギー方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2)$$

式(1)、(2)の初期条件は、仮定(1)および(2)より、

$$t=0; U=U_i (=U_\infty), \quad T=T_i (=T_\infty) \quad (3)$$

である。また境界条件は、

$$y=0; U=0, \quad T=T_w \quad (4)$$

$$y \rightarrow \infty; \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

である。乱流であるため瞬時の速度および温度は不規則に変化しているが、ここでは滞在時間 t がある時間平均値 t_R の周りに次式の Danckwerts 不規則分布関数にしたがって分布していると仮定し、

$$\phi(t) = \frac{1}{t_R} \exp\left(-\frac{t}{t_R}\right) \quad (6)$$

時間平均速度および温度を次のように定義する。

$$\bar{U} = \int_0^\infty U(t, y) \phi(t) dt \quad (7)$$

$$\bar{T} = \int_0^\infty T(t, y) \phi(t) dt \quad (8)$$

そこで式(1)、(2)に式(6)を乗じ、 $t=0 \sim \infty$ で積分すると、式(1)、(2)は次の2階の常微分方程式に変換できる。

$$\frac{(\bar{U} - \bar{U}_i)}{t_R} = \nu \frac{d^2 \bar{U}}{dy^2} + g\beta(\bar{T} - T_\infty) \quad (9)$$

$$\frac{(\bar{T} - \bar{T}_i)}{t_R} = \alpha \frac{d^2 \bar{T}}{dy^2} \quad (10)$$

図1 壁面更新モデル概念図

式(9)～(10)を次の無次元数を用いて無次元化し、

$$U^+ = \frac{\bar{U}}{U_m}, \quad T^+ = \frac{(\bar{T} - T_\infty)}{(T_w - T_\infty)}$$

$$y^+ = \frac{y}{x}, \quad t_R^+ = \frac{t_R U_m}{x}$$

$$U_m = [g\beta(T_w - T_\infty)\nu]^{1/3} \dots\dots\dots(11)$$

式(3), (4)の初期および境界条件のもとで解析的にとくと、その解は最終的に以下になる。なお $[g\beta(T_w - T)\nu]^{1/3}$ は浮力によって誘起される特性速度である。自然対流では、浮力で誘起された流れが熱や運動量の輸送を支配している。

$$U^+ = \frac{Grx^{1/3} t_R^+}{(Pr-1)} [\exp(-a^+ y^+) - \exp(-b^+ y^+)] \dots\dots\dots(12)$$

$$T^+ = \frac{Nux}{b^+} \exp(-b^+ y^+) \dots\dots\dots(13)$$

$$a^+ = \left(\frac{Grx^{1/3}}{t_R^+} \right)^{1/2}, \quad b^+ = \left(\frac{Grx^{1/3} Pr}{t_R^+} \right)^{1/2} \dots\dots\dots(14)$$

ヌセルト数は式(13)で $y^+ = 0$ と置き、 $T_w^+ = 1$ であることを利用すると、

$$Nux = b^+ = \left(\frac{Grx^{1/3} Pr}{t_R^+} \right)^{1/2} \dots\dots\dots(15)$$

となる。

式(12)～(15)は乱流の特性周期すなわち流体塊の壁面滞在時間 t_R が与えられれば解くことができる。しかしながら一般にその計測は前述の理由からかなり困難である。したがって本研究では、次節の方法に従って式(12)～(15)を解析する。

2.2 熱伝達率と壁面せん断応力 本研究では、まず壁面極近傍の平均速度こう配から壁面せん断応力を求め、

$$Grx^{-1/3} \frac{dU^+}{dy^+} \Big|_w = \frac{C_f}{2} \dots\dots\dots(16)$$

自然対流の場合は辻・長野⁽⁶⁾⁽⁷⁾が最近明らかにした局所摩擦係数の経験式

$$\frac{C_f}{2} = 0.684 Grx^{1/11.9} \quad (10^{10} < Grx < 2 \times 10^{11}) \dots\dots\dots(17)$$

を利用した。菱田・長野⁽⁸⁾は、局所摩擦係数の経験式として式(17)とは全くグラスホフ数の依存性が逆の関係式

$$\frac{C_f}{2} = 0.644 Grx^{-0.158} \quad (3 \times 10^9 < Grx < 10^{12}) \dots\dots\dots(18)$$

を提案しているが、ここでは信頼性の高い式(17)に沿って考察を進める。

ついで平均滞在時間 t_R^+ と壁面せん断応力との置換は、式(12)を y^+ で一階微分し、 $y^+ = 0$ と置くことに

よって求まる。

$$t_R^{+1/2} = \frac{(Pr^{1/2} + 1)}{Grx^{1/2}} \frac{dU^+}{dy^+} \Big|_w \dots\dots\dots(19)$$

したがって式(17)を式(16)に代入し $C_f/2$ を消去したものを式(19)に代入し、最後にそれを式(15)に代入することによって最終的に熱伝達率を算出することができる。

$$Nux = 1.462 \frac{Grx^{0.249} Pr^{1/2}}{(Pr^{1/2} + 1)} \dots\dots\dots(20)$$

一方式(19)を式(15)に代入し、式(16)を考慮することによって、

$$\frac{C_f}{2} = \frac{Gr^{1/3} Pr^{1/2}}{(Pr^{1/2} + 1) Nux} \dots\dots\dots(21)$$

が得られ、各伝熱相関式を式(21)右辺分母に代入することにより、壁面せん断応力を計算することができる。

3. 推測結果および考察

3.1 乱流強制対流 本節では、本推定法の妥当性を検証する上で、まずこれまで多くの実験および解析の両面から研究がなされている乱流強制対流について述べる。すなわちここでは、熱伝達率が平均滞在時間を壁面せん断応力で置換することによって算出できるという事実を示すことにした。強制対流の場合、粘性底層内に時間的・空間的にスケールの大きな流体塊運動が存在し、その特性周期(平均滞在時間)をモデルに取り込むことができる。

この場合、特性速度には、式(11)の代わりに主流の速度 U_∞ を使い、平均速度および平均温度を求めると、

$$U^+ = 1 - \exp(-a_j^+ y^+) \dots\dots\dots(22)$$

$$T^+ = \frac{Nux}{b_j^+} \exp(-b_j^+ y^+) \dots\dots\dots(23)$$

となる。ここで $a_j^+ = (Rex/t_R^+)^{1/2}$, $b_j^+ = (RexPr/t_R^+)^{1/2}$ である。そして壁面近傍の平均速度こう配から求まる壁面せん断応力は、式(16)の $Grx^{-1/3} \rightarrow Rex^{-1}$ に、また平均滞在時間は、式(19)が $t_R^{+1/2} = Rex^{1/2} / dU^+/dy^+|_w$ に変換される。したがって2.2節同様、熱伝達率は最終的に

$$Nux = b_j^+ = 0.0296 Rex^{0.8} Pr^{0.5} \dots\dots\dots(24)$$

と表される。なお壁面せん断応力の経験式には、良く知られている Schlichting⁽⁹⁾の平板に沿う強制対流の局所摩擦係数 $C_f/2 = 0.0296 Rex^{-1/5}$ を採用した。

図2は縦軸に壁面更新モデルから計算されるヌセルト数 $Nux [= q_w X / (x(T_w - T_\infty))]$ をとり、横軸にレイノルズ数 $Rex (= U_\infty X / \nu)$ をとって計算結果をプロットしたものである。図中の実線 ($Pr = 0.71$) および点線

($Pr=7$) は、平板に沿う強制対流の伝熱相関式⁽¹⁰⁾

$$Nux = \frac{0.0296 Rex^{0.8} Pr}{[1 + 1.54 Rex^{-0.1} Pr^{-1/4} (Pr-1)]} \dots (25)$$

を示し、記号○●印は壁面更新モデルによる計算結果を示す。図から明らかなように、本研究で計算したレイノルズ数およびプラントル数 $Pr (= \nu/a)$ の範囲においては、単純な推定法でも熱伝達の予測が可能であることがわかる。また熱伝達率あるいは壁面せん断応力のいずれかが明らかにされていない流れを推測する場合、本研究の推定法は、速度場と温度場を結びつける上で十分意味のある考察を進め得ることが明らかとなった。

3.2 乱流自然対流 従来の研究⁽²⁾では、自然対流の場合でも強制対流同様時間・空間的に大きなスケールを有する流体塊運動が存在し、それが自然対流の熱や運動量輸送に重要な役割を果たしていることが明らかにされている。この流体塊運動は、壁面近傍の流体塊がある周期ごとにその外側の流体により更新され、その間非定常熱伝導で伝熱面から流体塊へ熱が移動する現象を模擬した壁面更新モデルの概念に近く、本モデルの自然対流への拡張はこの概念に基づいている。

これまで強制対流の分野では壁法則による整理を含めて多くの実験および解析例が報告されているが、一方自然対流の場合、実験が困難なこともあって、従来信頼できる速度および温度場のデータが乏しいとされていた。最近辻・長野は自然対流乱流境界層の速度場・温度場にわたる実験を行い、壁面摩擦係数の経験式(17)等を明らかにした。このことから本研究では、式(17)を壁面更新モデルに取り込み、まず熱伝達の推測を行った。

図3は、縦軸にヌセルト数、横軸にレイリ数 $Rax [= g\beta(T_w - T_\infty)X^3/\nu^2 \cdot \nu/a]$ をとって計算結果(●), 式(20), を示したものである。また図中のA~E式は、以下に示される平板に沿う乱流自然対流の伝熱相関式である。

図2 強制対流乱流熱伝達

Cheesewright⁽¹¹⁾ ($6 \times 10^9 < Rax < 2.2 \times 10^{10}$)

$$Nux = 0.87 Rax^{1/4} \left(\frac{\nu_\infty}{\nu_w} \right)^{0.21} \dots (A)$$

$$(2.2 \times 10^{10} < Rax < 1.3 \times 10^{11})$$

$$Nux = 0.0245 Rax^{2/5} \left(\frac{\nu_\infty}{\nu_w} \right)^{0.21} \dots (B)$$

Pirovano⁽¹²⁾ ($3.5 \times 10^9 < Rax < 3.5 \times 10^{10}$)

$$Nux = 2.05 Rax^{0.21} \left(\frac{\nu_\infty}{\nu_w} \right)^{0.21} \dots (C)$$

$$(3.5 \times 10^{10} < Rax < 3.5 \times 10^{11})$$

$$Nux = 0.103 Rax^{1/3} \left(\frac{\nu_\infty}{\nu_w} \right)^{0.21} \dots (D)$$

Tsuji and Nagano

$$Nux = 0.12 Rax^{1/3} \dots (E)$$

ここで変物性効果 $(\nu_\infty/\nu_w)^{0.21}$ は、壁温上昇に伴い5%低下と見積もった。なお式(17)の適用範囲は $Grx < 2 \times 10^{11}$ であることから、それ以上のグラスホフ数域における計算結果は、考察対象としない。この図から計算による熱伝達率が若干低いものの、強制対流同様、本研究で用いた簡単な推定法でも熱伝達の予測が可能であることがわかる。ただし式(20)は、式(17)の信頼性にのみ依存していると考えられる。また自然対流の熱伝達率は、各伝熱相関式によって20%程度の差異が存在することから考えても、本推定法は妥当な熱伝達率を与えていると言える。

図4は、各伝熱相関式A~Eを式(21)に代入して得られた壁面せん断応力を縦軸にとって、結果を $\tau_w/\rho U_m^2 - Gr$ 数平面上にまとめたものである。なお図中式Fは、式(17)である。図から明らかなように図3で最も高い熱伝達率を与える式Bから計算される壁面摩擦係数はグラスホフ数に対し負の相関を与えるが、一方最も低い解析結果を与える式Fから計算される壁面摩擦係数は正の相関を与える。また式D, Eから計算される壁面摩擦係数は、グラスホフ数に全く依存しない結果を与える。また菱田らの相関式(18)は、負の相関を示した。信頼性の高い伝熱相関式から得られた式Eと熱線流速計による測定から得られた式F

図3 自然対流乱流熱伝達

図 4 乱流自然対流の壁面せん断応力

で求められる壁面せん断応力には、差異が見受けられるが、これには計測の不確かさも一因と考えられる。特に自然対流では、温度乱れが大きく、壁面近傍の速度あるいは速度こう配を正確に測定することは難しいといえる。

乱流自然対流の場合、レイノルズ応力が強制対流とは全く異なる分布を示すことが Miyamoto ら⁽¹³⁾によって報告されている。強制対流の壁面せん断応力がレイノルズ数に対し負の相関を示し、一方式 D, E, F のように自然対流の壁面せん断応力がグラスホフ数に対し正の相関あるいは無相関を示すとした事実は、その物理的根拠が必ずしも明らかでないが、こうした自然対流・強制対流それぞれのレイノルズ応力の違いをも考慮する必要がある。

自然対流の分野では、モデルの基礎となるべき測定データが乏しいこともあって、二方程式あるいは応力モデルなどモデリングに関する議論が十分なされているとはいえない。例えばモデル中の浮力項の取扱いあるいは乱流プラントル数の仮定などまだ残されている問題も多い。一方本モデルの特長は、前述した物理的背景のほかに簡易な手法で熱伝達率や壁面せん断応力を推定できるところにある。従来乱流自然対流の壁面

せん断応力に関する研究はほとんど行われておらず、本研究は乱流自然対流の壁面せん断応力を考察する一つの手法を示したものである。

4. 結 言

本研究は、乱流自然対流の熱伝達と壁面せん断応力について簡易な考察を加えたものである。ここでは構造論的な壁面更新モデルを援用し、速度場の最新情報や信頼できる伝熱相関式を比較・検討することによって、比較的簡易に乱流自然対流の熱伝達率や壁面せん断応力を推定することができた。

文 献

- (1) Iritani, Y., Kasagi, N. and Hirata, M., *Trans. Japan Soc. Mech. Engrs.* **38**, (1982), 2284-2294.
- (2) Kitamura, K., Koike, M., Fukuoka, I. and Saito, T., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **28-4** (1985), 837-850.
- (3) Chung, B. T. F., Thomas, L. C. and Pang, Y., *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, Ser. C, **100** (1978), 92-97.
- (4) Thomas, L. C., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **23** (1980), 1099-1104.
- (5) Thomas, L. C., *AIAA J.*, **13** (1975), 32-35.
- (6) Tsuji, T. and Nagano, Y., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **31-8** (1988), 1723-1734.
- (7) Tsuji, T. and Nagano, Y., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **31-10** (1988), 2101-2111.
- (8) Hishida, M., Tsuji, T., Nagano, Y. and Nishio, S., *Proc. 16th National Heat Transfer Symposium, Japan*, (1979), 424-426.
- (9) Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, 6th Ed., (1968), 596-605, McGraw-Hill.
- (10) Katto, Y., *Dennetsu Gairon (Outline of Heat Transfer)*, Tokyo (1964), 122 Yokendo.
- (11) Katto, Y., ほか 4 名, *Dennetsu Tokuron*, Tokyo, (1984), 67, Yokendo.
- (12) Pirovano, A., ほか 2 名, *Heat Transfer 1970*, (1970) NC 1.8, Elsevier, Amsterdam.
- (13) Miyamoto, M., ほか 3 名, *Proc. 7th Int. Heat Trans. Conf.*, **2** (1982), 323.