円孔を通る周期変動粘性流*
(はく離を伴う場合)納 富 哲 雄*¹, 難 波 昌 伸*¹Periodic Viscous Flow through a Circular Hole
(With Laminar Separation)

Tetsuo NOTOMI and Masanobu NAMBA

The N-S equations formulated with the orthogonal curvilinear coordinate system have been solved numerically for periodic viscous flows through a circular hole driven by fluctuating far field pressure. The flow patterns and acoustic impedance of the circular hole are investigated for various combinations of pressure/viscous force ratio, fluctuating frequency and hole edge thickness. For the high frequency and low pressure range, there is no laminar separation, and the resistance is independent of the periodic pressure amplitude. For the intermediate frequency and pressure range, an attached separation bubble is generated near the downstream side of the hole edge, and the resistance is larger for smaller hole edge thickness and smaller force ratio. For the low frequency and high pressure range, the separation bubble grows to a detached vortex ring and the resistance is proportional to the square root of the pressure amplitude but independent of the viscosity of the fluid and almost invariant with the frequency.

Key Words: Periodic Flow, Viscous Flow, Numerical Analysis, Laminar Separation, Circular Hole, Acoustic Impedance

1. 序 論

著者らは前報⁽¹⁾において、ヘルムホルツ共鳴器形吸音ライナの音響インピーダンスに関連して、孔あき板の音響インピーダンスを純理論的に評価することを目的とし、薄板に穴あけられた小さな円孔を通る周期変動粘性流れ場を、時間依存性ナビエーストックス方程式の差分分解を求めることにより、計算する手法を示した。さらに無限遠境界の変動圧力と粘性力の比が小さく(音響力が小さく)はく離流が生じない場合についての計算を行い、音響インピーダンスと種々のパラメータとの関係を明らかにした。

本論文では、変動圧力と粘性力の比が大きき(音響圧力が大きき)はく離流が生じる場合についての計算を行い、高音圧レベルにおける孔あき板の音響インピーダンス特性について報告する。

2. 理論モデル

前報で示したように、無限に広い板にあいた単一の円孔において、円孔の片側の無限遠方圧力が周期的に

変動することによって生じる非定常非圧縮性軸対称粘性流を考える。図1に示すように、円孔端は曲率半径 h^* の小さな丸みを持ち、円孔中心から曲率中心までの距離を b^* とする。以下において長さ、速度、圧力および時間はおのこの b^* , $\sqrt{\Delta p^*/\rho^*}$, Δp^* および $b^*/\sqrt{\Delta p^*/\rho^*}$ を用いて無次元化する。ここで上付きの $*$ は有次元量を示し、 Δp^* は無限遠方変動圧力振幅、 ρ^* は流体密度である。

なお本理論モデルにおける主要パラメータは、円孔端曲率半径(半板厚) h 、境界圧力の変動周波数 $\omega (= \omega^* b^*/\sqrt{\Delta p^*/\rho^*} = 2\pi f^* b^*/\sqrt{\Delta p^*/\rho^*})$ およびその変動圧力振幅 Δp^* に対応する圧力と粘性力の比 $P (= \sqrt{\Delta p^*/\rho^*} b^*/\nu^*, \nu^*$ は動粘性係数)である。

3. 計算例と考察

以下の計算は九州大学大型計算機センターのFACOM M 780/20を用いて行った。差分計算では、 ξ 方向格子数は31、 η 方向格子数は ω の大きさに応じて15, 20, 25とし、孔端部境界層厚さが薄くなる(ω 大なる)ほど η 方向格子数を増して境界層内の格子点が多くなるようにした。流れは軸対称とし、計算領域は前報⁽¹⁾と同じである。

* 原稿受付 平成元年10月2日。

¹ 九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)。

数値計算は、代表長さを $b^*=2\times 10^{-3}\text{m}$ とし、圧力粘性力比 $P=3.657\times 10^2, 1.156\times 10^3, 3.657\times 10^3$ (おのおのの空気の音圧振幅 $\Delta p^*=9.806\,65, 9.806\,65\times 10, 9.806\,65\times 10^2\text{Pa}$, あるいは変動圧力の実効デシベル値で 110.8, 130.8, 150.8 dB に相当する), 板の円孔部端の曲率半径 (孔端部板厚の半分) を $h=0.05, 0.01, 0.002$ とし、無限遠下方境界の周期変動圧力の無次元角周波数 ω は f^* が可聴域の周波数に対応する範囲で行った ($f^*=1\text{kHz}$ に対応する ω は上記の P の各値に対しおのおの $\omega=4.405, 1.393, 4.405\times 10^{-1}$ である)。

前報と同様、時間進行法により定常な周期解に速やかに到達させるために、無限遠下方境界変動圧力 $p_{-\infty}$ は、時間ステップ n とともに振幅を増大させ、次式で与えた。

$$p_{-\infty}=c_n \sin(\omega n \Delta t) \cdots \cdots (1)$$

$$c_n = \begin{cases} \sin(\omega n \Delta t/5) : \omega n \Delta t/5 < \pi/2 \\ 1 : \omega n \Delta t/5 \geq \pi/2 \end{cases}$$

3.1 流れ場の変動形態 式(1)で与えた境界変動圧力の振幅が1になった以後の周期的流れ場の形態は、(I)はく離を生じない流れ ($\omega_{c1} < \omega$)、(II)付着した小さなはく離泡が発生消滅を繰り返す流れ ($\omega_{c2} < \omega < \omega_{c1}$)、(III)離脱渦(輪)が存在する流れ ($\omega < \omega_{c2}$) の三つのパターンに分けられる。

パターン(I)は $\xi = \text{一定面}$, $\eta = \text{一定面}$ がおのおの等圧面、流面にほぼ一致する流れで、板面近傍を除いては非粘性非回転のポテンシャル流れに近い。境界無次元周波数 ω_{c1} は、 P が大きいほどまた h が小さいほど大きく、特に h に対する依存度が極めて強い。すなわち h が大きいほどはく離は生じ難い。圧力粘性力比

$P=1.156\times 10^3$ では、円孔端半板厚 $h=0.05, 0.01, 0.002$ のおのおのに対し $\omega_{c1} \approx 2, 4, 5$ である。ただし ω は ω^* に比例するのみならず、 $\sqrt{\Delta p^*}$ に逆比例する量であることに注意すべきである。

ω を小さくするとまずパターン(II)が現れる。この形態の例として図2(a)に1周期分の6等分割時間点(①～⑥)における孔部近傍の流線を、図2(b)に無限遠下方境界圧力および孔部断面平均速度の時間変化を示す。図2(a)の①～⑥は図2(b)の時間点を示す。①～③は ξ の正の向き (図の下から上へ)、④～⑥は負の向き (図の上から下へ) の孔部平均流に対応し、図中の矢印は流れの向きを表す。①から⑥に向かって時間ステップが増大し、境界変動圧力は再び①にもどる。対応する速度ベクトル図によると、①と④、②と⑤、③と⑥はそれぞれ互いに速度ベクトルの向きがほぼ逆転し、はく離泡の成長過程も孔部 ($\xi=0$, 図1参照) を中心に対称形となっており、周期変動流の定常解が得られているのがわかる。

前報で示したように、円孔端近傍で一種の角を曲がる流れが生じ、壁近傍部に大きな流速がみられる。対応する圧力分布図によると、孔部平均流速が極値をとる②、⑤において、孔端部に流れを加速する大きな圧力こう配があり、孔端ごく近傍の下流側の大きな逆圧力こう配によりはく離泡が形成されている。②、⑤で孔端部の下流側に発生したはく離泡が時間の進行とともに成長している様子が③、⑥でみられる。さらに、時間ステップが進み速度が零に近づくとともに、はく離泡は孔端下流部から離脱することなく消滅する。

ω がさらに小さい範囲 ($\omega < \omega_{c2}$) では、はく離泡が孔部下流側の壁表面よりはがれて大きな離脱渦となるパターン(III)となる。 ω_{c2} は ω_{c1} と同じく、 h が小さいほど大きい。 $P=1.156\times 10^3$ においては $h=0.05, 0.01, 0.002$ のおのおのに対し $\omega_{c2} \approx 0.75, 1.0, 1.25$ である。図3にこの形態例の流線図を示す。1周期分の6等分時間点①もしくは④で孔端近傍下流側で生じた付着はく離泡が、時間ステップが進むとともに②、③もしくは⑤、⑥でみられるように、壁から離脱し渦領域を広げつつ渦度を弱めながら下流側に流される様子がわかる。さらにこの流れの形で特徴的な点は、孔部近傍において対称軸上によどみ点 (図3中×印) が生じ、軸上に正負両方向の流れがみられることである。孔部の上下流側に現れる離脱渦の回転方向は互いに逆向きである。

3.2 孔部速度分布 円孔部局所速度振幅と平均速度振幅との比 $v_{\text{amp}}/\bar{v}_{\text{amp}}$ の半径方向分布を $P=$

図1 理論モデルと座標系

(a) 流線図

図 2 周期変動流の様子(付着はく離泡が生じる場合)
 $(P=1.156 \times 10^3, h=0.01, \omega=2.0)$

1.156×10^3 , $h=0.01$ の場合に, ω をパラメータにして描くと図 4 のようになる。図 4 中 (I), (II), (III) は先に述べた流れのパターンに対応する。パターン (I) の流れでは, 壁 ($r/\sqrt{1-2h}=1$) 近傍を除いて太実線のポテンシャル流れにおける分布に極めて近い ($\omega=6$)。 ω が下がりパターン (II) の流れになると, ピークが急激

(b) 無限下方境界圧力および孔部断面
 平均速度の時間変化

図 3 周期変動流の様子(離脱渦が生じる場合) ($P=1.156 \times 10^3$, $h=0.01$, $\omega=0.75$)

に低くなりその位置も壁から離れていく ($\omega=2.5, 1$)。さらに ω が小さくパターン(III)の流れになると、ピークはさらに低くなり、それに伴って孔中央部での流速が大きくなっていく ($\omega=1, 0.5$)。

図5に $h=0.01$ の場合の孔部平均速度振幅 $\bar{v}_{amp}$ と境界変動圧力振動数 ω の関係を、圧力粘性力比 P をパラメータにして示す。小さな付着はく離泡が生ずる中周波数域 [$\omega_{c2} < \omega < \omega_{c1}$, (II)] およびはく離が生じない高周波数域 [$\omega_{c1} < \omega$, (I)] では、 $\bar{v}_{amp}$ がポテンシャル流れの値すなわち $(2/\pi\omega)(1-\sqrt{2h})/(1-2h)$ よりわずかに大きい、それに近いという関係が保たれる。離脱渦が形成される低周波数域 [$\omega < \omega_{c2}$, (III)] では $\bar{v}_{amp}$ はポテンシャル流れのそれより小さく、 ω に対する依存性も小さい。

孔部 ($\xi=0$) での ξ 方向速度分布のピーク位置から孔端部までの距離として定義する境界層厚さ δ と、粘性波の波長に比例する $1/\sqrt{P\omega} = \sqrt{\nu^*/\omega^*}/b^*$ との関係を圧力粘性力比 P 、孔端部曲率半径 h をパラメータにして描くと図6のようになる。(I), (II), (III) の各パターンで一般に $\delta \sim A/\sqrt{P\omega}$ の関係が成立するが、パターン(I) (ω 大)の流れでは、 A はほぼ h のみに依存し、 h 大なるほど A は大である。小さなはく離泡が

生じるパターン(II)すなわち ω の小さい範囲では、 A は大きな値をとる。さらに ω が小さい離脱渦パターン(III)の流れでは、 A は小さく、また A は h のみならず P にも依存する。

3.3 インピーダンス 無限遠上方と下方境界の圧力差と孔部断面平均速度の比として定義したインピーダンスを $\sqrt{\rho^* \Delta p^*}$ で無次元化した無次元インピーダンス $Z = ((p^*_{-\infty} - p^*_{+\infty})/(\bar{v}_t^*)_{t=0})/\sqrt{\rho^* \Delta p^*}$ について調べる。

図5でみたように、 ω が大きいと $\bar{v}_{amp}$ が小さく、したがって円孔を通る流速 v は小さいが、 ω が小さくなるにつれて $\bar{v}_{amp}$ は大きくなり、 v も大きくなる。したがって ω が大きいと運動方程式において圧力こう配は慣性項の $\partial v/\partial t$ とほぼ釣り合い、 $(\bar{v}_t^*)_{t=0}$ の時間変化は正弦波的だが、 ω の減少とともに $v \cdot \nabla v$ の寄与

図4 孔部局所速度振幅の分布
(変動周波数 ω の影響)

図5 孔部平均速度振幅と変動周波数 ω の関係

図6 境界層厚さと粘性波波長との関係
(記号は図8に同じ)

が大きくなり正弦波形からひずんでくる。このため無限遠境界変動圧力 $p_{-\infty}$ と孔部平均速度 $(\bar{v}_z)_{z=0}$ の位相差 α として、 $p_{-\infty}$ と、 $(\bar{v}_z)_{z=0}$ のフーリエ分解基本成分との位相差をとる。

ポテンシャル流れと粘性流(おのおの添字 $p.f.$, $v.f.$ で示す)のリアクタンス $\text{Im}[Z]$ の相対差および位相差 α を、境界圧力の変動周波数 ω の関数とし、 P をパラメータにして図7に示す。 P が大のほう $\pi/2 - \alpha$ が小さい。 α は領域(I)において ω が大きくなるとともに $\pi/2$ に漸近するが、小さな周波数範囲[(II)および(III)]においては、 ω の減少とともに α は急激に小さくなる。

リアクタンスの相対差は付着小はく離泡流れ(II)で極小値をとり、その点より ω の小さな範囲においては、 ω の減少とともに急激に大きくなる。

孔端板厚補正レジスタンス $\text{Re}[Z](1-2h)/(1-\sqrt{2h})$ 対 ω の関係を前報で示した結果も含め、 P , h をパラメータにして両対数グラフに示すと図8のようになる。(I)の流れでは h が一定ならば ω の減少とともに $\text{Re}[Z]$ も小さくなるが、付着はく離泡が生ず

る周波数域 $(\omega_{c2} < \omega < \omega_{c1}, \text{ (II)})$ の高周波数側境界近傍で、レジスタンスは極小値をとる。(II)では ω を小さくするとともにはく離領域が大きくなり、レジスタンスが増大する。 h が大になるほどはく離流が生じ難くなり、したがって $\text{Re}[Z]$ が極小となる ω は小さくなる。また ω 一定なら h または P が小さいほど

図7 変動周波数 ω に対するポテンシャル流れと粘性流のリアクタンスの相対差および孔部平均変動速度と境界圧力との位相差 α の依存性

図8 孔端板厚補正レジスタンスと変動周波数との関係

$\text{Re}[Z]$ は大きい。

離脱渦が存在するパターン(III)で ω が極めて小さくなると ($\omega < 0.3$), $\text{Re}[Z](1-2h)/(1-\sqrt{2h})$ はほぼ一定値になり,

$$\text{Re}[Z] \approx 0.95 \frac{1-\sqrt{2h}}{1-2h} : \omega < 0.3 \quad \dots\dots\dots (2)$$

が成り立つ。したがって低周波数域 ($\omega < \omega_{c2}$, (III)) では h が小さいほど, $\text{Re}[Z]$ は大きい。

ポテンシャル流れの孔部平均流速振幅 $(\bar{v}_{\text{amp}})_{p.f.}$ とそれに基づくレイノルズ数 $[(\bar{v}_{\text{amp}})_{p.f.} \cdot P]$ との積 $(\bar{v}_{\text{amp}})_{p.f.}^2 \cdot P \propto P/\omega^2$ と $\text{Re}[Z]$ との関係を両対数目盛で

示すと図9のようになる。はく離しない流れ ($\omega > \omega_{c1}$, (I)) においては, $\text{Re}[Z]$ は図9中の実線で示す直線

$$\begin{aligned} \text{Re}[Z] &\approx 0.65 \{ (\bar{v}_{\text{amp}})_{p.f.}^2 \cdot P \}^{-1/3} \\ &\approx 0.88 \left(\frac{1-2h}{1-\sqrt{2h}} \right)^{2/3} P^{-1/3} \omega^{2/3} : \omega > \omega_{c1} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

で表せる。すなわち円孔のレジスタンス $\text{Re}[Z]$ は, 無限遠境界の変動圧力周波数 ω の $2/3$ 乗に比例し, 圧力粘性力比 P の $1/3$ 乗に反比例する。

なおここで示した無次元インピーダンス Z は先に述べたように $\sqrt{\rho^* \Delta p^*}$ で無次元化したもので, 通常用

図9 レジスタンス $\text{Re}[Z]$ と $(\bar{v}_{\text{amp}})_{p.f.}^2 \cdot P$ との関係

いられる $\rho^* a_0^*$ (a_0^* は音速) で無次元化したインピーダンス Z' については, 式 (2), (3) はおのの次のように書き換えられる。

$$\text{Re}[Z'] \approx 0.95 \frac{1 - \sqrt{2h}}{1 - 2h} \frac{\sqrt{\Delta p^* / \rho^*}}{a_0^*} \quad \therefore \omega < 0.3 \quad \dots\dots\dots (2)'$$

$$\text{Re}[Z'] \approx 0.88 \left(\frac{1 - 2h}{1 - \sqrt{2h}} \right)^{2/3} \left(\frac{\omega^* b^*}{a_0^*} \right)^{2/3} \left(\frac{\nu^*}{a_0^* b^*} \right)^{1/3} \quad \therefore \omega > \omega_{c1} \quad \dots\dots\dots (3)'$$

すなわち高周波数域 [$\omega > \omega_{c1}$, (I)] においては $\text{Re}[Z']$ は周波数の $2/3$ 乗, ν^* の $1/3$ 乗に比例し, 音圧振幅 Δp^* には依存しない。離脱渦が生じる低周波数域内 [$\omega < 0.3$, (III)] では $\text{Re}[Z']$ は ω^* および ν^* にはほとんど依存せず, $\sqrt{\Delta p^* / \rho^*}$ に比例する。この領域がいわゆる非線形インピーダンス領域とみなされる⁽²⁾。

4. 結 論

一方の無限遠方境界の圧力が時間的に変動する場合の円孔を通る周期変動粘性流について, 無次元角周波数 ω , 圧力粘性力比 P および円孔端曲率半径 h を種々変化させて数値計算した結果, 以下の結論を得た。

(1) 円孔を通る周期変動流は, (I) はく離なし流

れ(高周波数・低圧力振幅域), (II) 付着はく離泡を生じる流れ(中周波数・中圧力振幅域), (III) 離脱渦を伴う流れ(低周波数・高圧力振幅域)の3種類に大別できる。

(2) パターンが変わる無次元周波数は, h に強く依存し, h が小さいほど大きい。

(3) 各領域で境界層厚さは $1/\sqrt{P\omega}$ にほぼ比例して変化するが, その比例定数はパターン(II)の流れにおいて極めて大きい。

(4) 流体密度と音速の積で無次元化した円孔の音響レジスタンス $\text{Re}[Z']$ は, 高周波数・低音圧域(I)では音圧には依存せず, 周波数 ω^* の $2/3$ 乗, 動粘性係数 ν^* の $1/3$ 乗に比例する。低周波数・高音圧域(III)では ω^* および ν^* にはほとんど依存せず, $(1 - \sqrt{2h})/(1 - 2h)$ および $\sqrt{\Delta p^* / \rho^*}$ に比例する。

(5) 中周波数・中音圧域(II)においては h と P が小さいほど $\text{Re}[Z']$ は大きく, またこの領域で ω の関数としての $\text{Re}[Z']$ は最小値をとる。

文 献

- (1) 納富・難波, 機論, 55-517, B(1989), 2711.
- (2) 例えば, Ingard, U. and Ising, H., *J. Acoust. Soc. Am.*, 42-1(1967), 6.