境界適合座標系を用いたぜん動流路内の流れ解析*
(第1報, ニュートン流体の場合)本田 逸郎^{*1}, 大庭 英樹^{*2}, 近藤 徹^{*2}
浅見 啓介^{*3}, 中嶋 幸敏^{*2}Flow Analysis in a Peristaltic Flows Using Boundary Fitted Coordinate
(1st Report, A Case of Newtonian Fluid)Itsuro HONDA, Hideki OHBA, Toru KONDO,
Keisuke ASAMI and Yukitoshi NAKASHIMA

Two-dimensional peristaltic flows are calculated by the finite difference method. In order to concentrate grid points near the wall, Thompson's grid generation method is employed. Pressure is calculated by solving the Poisson equation which is derived by the MAC method. The Kawamura-Kuwahara scheme is applied for the non linear term in the Navier-Stokes equation. As the result of this investigation, it is clear that the finite difference method is useful for analysis in peristaltic flows.

Key Words: Fluid Transportation System, Peristaltic Flows, Numerical Analysis, Finite Difference Method, Boundary Fitted Coordinate

1. 緒 言

血液や薬品などの、機械部との直接的な接触が望まれない流体の輸送手段の一つに、ぜん動運動を利用するものがある。このような方法を利用した輸送管内の流動状態は、工業上よく用いられているポンプなどを用いた場合のものとは、かなり異なることが予測される。したがって、ぜん動運動を利用した輸送手段の設計法を確立するためには、流体力学的な研究が必要であると考えられる。とくに、工業的な適用を考えると、レイノルズ数の高い領域での流動状態を把握することが重要であり、大量輸送を考えた場合は振幅の大きなものが要求される。このような流れに対し理論的な研究が行われている^{(1)~(3)}が、流れを正確に把握しようとした場合、解くべき方程式はナビエ・ストークスの式となり、理論解を求めることは絶望的となる。そのため、ナビエ・ストークス式を解析するためには数値解析が一般的に用いられる。

ぜん動流れに数値解析を適用した例として、鮎川ら^{(4)~(6)}が渦渡輸送方程式に対し一次精度風上差分ス

キームを用いた解析を行っている。この解析では、差分格子に斜方格子を用いているため、かなり複雑なものとなっており、はん用化が難しいように思われる。さらにこの解析では、振幅が大きくなった場合に計算が発散しており、この点からも改良が必要であるように思われる。また、川橋ら⁽⁷⁾は有限個のぜん動流路に対しHSMAC法を適用しているが、格子点が少なく、対流項に対して中心差分スキームが用いられているため、高レイノルズ数流れの場合に安定性が問題となると考えられる。振幅が大きくなった場合の解析について、高畠ら⁽⁸⁾は有限要素法を用いた大規模な解析を行っている。しかしながら、この解析ではレイノルズ数が高い場合に計算不能となっており、さらに有限要素法は差分法にくらべ計算時間が長くなるという欠点を持っている。これらの問題を解決するためには、振幅が大きいかつレイノルズ数が高い場合にも安定な差分法を用いることが有効であると考えられる。

本研究では、前記の問題を解決するためにBrownら⁽⁹⁾の解析を参考にし、はん用性の高い解法の開発を目的とし、Thompsonら⁽¹⁰⁾の境界適合座標系を導入した解析を行った。さらに、高レイノルズ数領域における安定化をはかるためにKawamuraら⁽¹¹⁾の三次精度風上差分スキームを適用した。この結果、高レイノ

* 原稿受付 平成元年10月9日。

^{*1} 正員, 熊本大学大学院 (〒860 熊本市東区2-39-1)。^{*2} 正員, 熊本大学工学部。^{*3} 学生員, 熊本大学大学院。

ルズ数、高振幅時においても安定な解析が可能となった。

2. 数値解析法

2・1 基礎式 いま、流れ場を二次元とし対象とする流体を非圧縮性ニュートン流体とすれば、流れの支配方程式はつぎの無次元化された連続の式とナビエ・ストークスの式で与えられる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla) U = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 U \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{div } U = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

上式において、 U は速度ベクトル、 P は圧力、 Re はレイノルズ数である。よく知られているように、非圧縮性流れを解析する場合、圧力の計算が問題となるが、ここでは最も一般的な MAC 法⁽¹²⁾を用いる。式(1)の発散をとり、連続の条件を陰的に付加すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \nabla^2 P = & \frac{-D^{n+1} + D^n}{\Delta t} - \text{div}[(U^n \cdot \nabla) U^n] \\ & + \frac{1}{Re} \nabla^2 D^{n+1} \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

式(1)、(3)を連立させて解くことにより流れ場の計算を行うことができる。ただしこの際、連続の式を満足させるため $D^{n+1} = 0$ とする。

上式はデカルト座標系での基礎式であるため、曲線を持った境界の基で解析すると複雑な取扱いが必要となる。そのため境界適合座標系 (ξ, η) へ変換するとつぎのようになる⁽¹³⁾。

$$\begin{aligned} u_\xi + \left(\frac{u_\eta \eta - v_\xi \xi}{J} \right) u_\xi + \left(\frac{v_\xi \xi - u_\eta \eta}{J} \right) u_\eta \\ = -\frac{y_\eta P_\xi - y_\xi P_\eta}{J} + \frac{1}{Re} \tilde{\Delta} u \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_\xi + \left(\frac{u_\eta \eta - v_\xi \xi}{J} \right) v_\xi + \left(\frac{v_\xi \xi - u_\eta \eta}{J} \right) v_\eta \\ = -\frac{x_\xi P_\eta - x_\eta P_\xi}{J} + \frac{1}{Re} \tilde{\Delta} v \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} P = & -[(y_\eta u_\xi - y_\xi u_\eta)^2 + 2(x_\xi u_\eta - x_\eta u_\xi) \\ & \times (y_\eta v_\xi - y_\xi v_\eta) + (x_\xi v_\eta - x_\eta v_\xi)^2]/J^2 \\ & + (y_\eta u_\xi - y_\xi u_\eta + x_\xi u_\eta - x_\eta v_\xi)/(J \Delta t) \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} A = & (a A_{\xi\xi} - 2\beta A_{\xi\eta} + \gamma A_{\eta\eta})/J^2 \\ & + [(a x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta})(y_\xi A_\eta - y_\eta A_\xi) \\ & + (a y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta})(x_\eta A_\xi - x_\xi A_\eta)]/J^3 \end{aligned}$$

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$$

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2$$

$$\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$$

$$\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2$$

上式中の A は物理量を表し、ナビエ・ストークス式

中の u, v に対応する。

式(4)～(6)を解くことによって、境界適合座標系における流れ場の計算ができる。離散化には、対流項以外の項に対し二次精度中心差分スキーム、対流項には次式で示される河村スキームを用いた。

$$\begin{aligned} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = & u_i [-u_{i+2} + 8(u_{i+1} - u_{i-1}) \\ & + u_{i-2}]/12\Delta x + |u_i|(u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i \\ & - 4u_{i-1} + u_{i-2})/4\Delta x \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

2・2 格子生成法 2・1節で述べた計算をぜん動流路に対して行うために、計算格子を生成する必要がある。ここでは、その概要を説明する。基礎式は以下の二つのポアソン方程式である。

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = R(\xi, \eta) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = S(\xi, \eta) \quad \dots\dots\dots (9)$$

上式中の R および S は格子間隔を制御する関数であり、Sorenson ら⁽¹⁴⁾と同様のものを使用する。

$$\begin{aligned} R(\xi, \eta) = & -\sum_{j=1}^n a_j \text{sgn}(\xi - \xi_j) \exp(-c_1 |\xi - \xi_j|) \\ & - \sum_{j=1}^m b_j \text{sgn}(\eta - \eta_j) \exp \\ & \times [-d_j \sqrt{(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2}] \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

S についても同様に与えられる。 $a \sim d$ は格子分布を制御するパラメータである。このままの形では物理面上の式となっているため、独立変数と従属変数を入れ換えた次の式とする。

$$\begin{aligned} a x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = \\ -J^2 [x_\xi R(\xi, \eta) + x_\eta S(\xi, \eta)] \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = \\ -J^2 [y_\xi R(\xi, \eta) + y_\eta S(\xi, \eta)] \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

上式を解くことによって、格子を生成することができる。本研究では SOR を用いて計算を行った。

3. 解析結果

2章で説明した解析法をぜん動流路に適用した例を以下に示す。本研究で対象とした流路は鮎川⁽⁴⁾と同一のものとした。図1にぜん動流路の概略図、図2に計算に用いた格子図を示す。流路は波長 λ の周期性を持ち、移動速度 c の進行波である。また u, v はそれぞれ x, y 方向の流速を表す。格子は 31×31 としている。流路は次式で示される正弦波形とした⁽⁴⁾。

$$\begin{aligned} H(X, \hat{T}) = & h - \epsilon \cos 2\pi(X - CT)/\lambda \\ \eta(x) = & h - \epsilon \cos 2\pi x/\lambda \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

つぎに境界条件であるが、流速については上下の壁面で次式により与えた。

$$u=0, v=2\pi\phi\sin 2\pi x$$

$$u=-1, v=0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

左右の境界では周期境界条件を与えた。圧力については壁面上で圧力こう配を零とし、左右の境界で圧力差を与えた。また、ぜん動流路の形状を決定する定数およびレイノルズ数は次式で定義した値を用いた。

$$\phi=\varepsilon/h, \alpha=h/\lambda, Re=(ch/\nu)\alpha \quad \dots\dots\dots (15)$$

時間積分にはオイラーの陰スキームを用い、時間刻みは0.01として時間進行法によって計算を行った。時間積分および圧力のポアソン方程式には点SOR法で計算を行い、緩和係数はそれぞれ1.2と1.0を用いた。

図3にレイノルズ数10, $\alpha=0.4$, $\phi=0.6$ の場合の解析結果を示す。図3は高島らの結果とよく一致しており、本計算法が十分な精度であることを示している。また、この計算例は鮎川らの斜方格子を用いた差分解析では計算不可能であったもので、格子分割数も同じであることより、本計算法の安定性が優れているとすることができる。

図4～6に示したものは、解析領域の形が同じでレイノルズ数をそれぞれ100, 1000, 5000として計算を行ったものである。これらの図から、レイノルズ数が高くなるにしたがい、流れ関数 $\psi=0$ の線が下方の滑

(a) 等圧力線図 ($\Delta P=0.5$)

(b) 流線図 ($\Delta\psi=0.05$)

図3 解析結果 ($Re=10$)

図1 ぜん動流路概略図

(a) 等圧力線図 ($\Delta P=0.5$)

(b) 流線図 ($\Delta\psi=0.05$)

図4 解析結果 ($Re=100$)

図2 計算格子

(a) 等圧力線図 ($\Delta P=0.5$) (b) 流線図 ($\Delta\psi=0.05$)図5 解析結果 ($Re=1000$) (a) 等圧力線図 ($\Delta P=0.5$) (b) 流線図 ($\Delta\psi=0.05$)図7 解析結果 ($Re=10$) (a) 等圧力線図 ($\Delta P=0.5$) (b) 流線図 ($\Delta\psi=0.05$)図6 解析結果 ($Re=5000$)

り壁面に近づいていることがよくわかる。また、山の部分での圧力線の数が増加にともない減少していることがわかる。このことは、レイノルズ数が増加するにしたがって慣性が大きくなり、山とともに移動する流体の塊が増大していることを示していると考えられる。図6のレイノルズ数5000の流線で一部凹凸が見られるものは、対流項による非線形性のために生じたものであると考えられる。

図7に示したものはレイノルズ数10, $\alpha=0.5$, $\phi=0.7$ における計算結果である。このように振幅比が大きな場合においても、境界適合座標系を用いた差分解析法によれば安定な解が求まることが判明した。

なお、本計算は32 bit パーソナルコンピュータによって行い1000ステップの計算に要する時間は約1 hである。

4. 結 言

ぜん動流路内の流れに対し、境界適合座標系を用いた三次精度風上差分スキームを取り入れた解析を適用

した結果, 従来計算不可能であった高振幅比, 高レイノルズ数の領域において安定な解析を行うことが可能となった。さらに, 本計算は小形の計算機で実行が可能のため, 現象の解明に十分に供することが可能であると推測される。

文 献

- (1) Fung, Y. C. and Yih, C. S., *Trans. ASME, Ser. E*, **35**-4(1968), 669.
- (2) Shapiro, A. H., ほか2名, *J. Fluid Mech.*, **37**-4(1969), 799.
- (3) Jaffrin, M. Y., *Int. J. Eng. Sci.*, **11**-6(1973), 681.
- (4) 鮎川・高畠, 機論, **47**-423, B(1981), 2120.
- (5) 高畠・鮎川, 機論, **48**-428, B(1982), 619.
- (6) 高畠・ほか2名, 機論, **51**-467, B(1985), 2365.
- (7) 田橋・ほか3名, 機論, **48**-427, B(1982), 473.
- (8) 高畠・鮎川, 機論, **53**-488, B(1988), 1207.
- (9) Brown, T. J. and Hung, T. K., *J. Fluid Mech.*, **83**-2(1977), 249.
- (10) Thompson, J. F., ほか2名, *J. Comput. Phys.*, **15**(1974), 299.
- (11) Kawamura, T. and Kuwahara, K., *AIAA Paper*, 84-0340(1984).
- (12) Harlow, F. H. and Welch, J. E., *Phys. Fluids*, **8**(1965), 2182.
- (13) Thompson, J. F., *Numerical Grid Generation*, (1985), North Holland, 126.
- (14) Sorenson, R. L. and Steger, J. L., *NASA CP*, 2166(1980), 449.